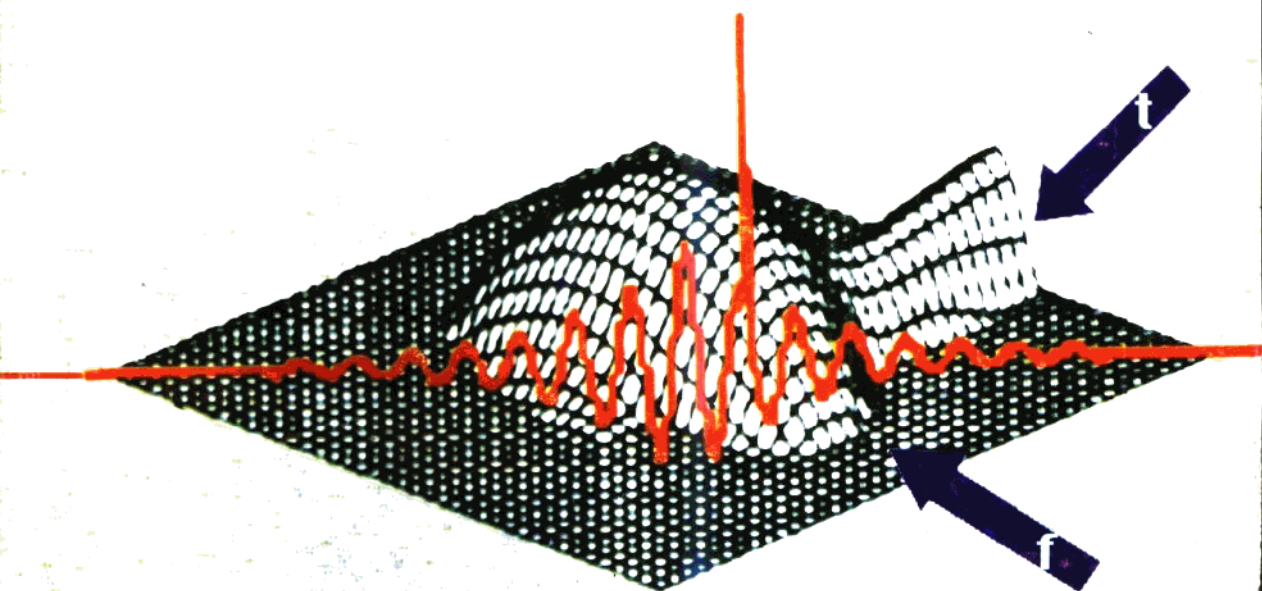


现代工程信号处理及应用

吴 森 编著



1.72

中国矿业大学出版社

现代工程信号处理及应用

吴 森 编著

“青蓝工程基金”资助

中国矿业大学出版社

内 容 摘 要

本书系统深入地介绍了现代工程信号处理的常用理论、方法和应用。全书共分十一章,内容包括数学变换基础、信号的采样及加窗、傅氏变换及快速傅氏变换、相关分析及应用、频谱分析及应用、互谱理论及声强测量、频率响应函数及相干分析、倒谱分析及应用、暂态信号及时频分析、连续小波变换基础、离散小波变换及其应用。

本书取材广泛,内容新颖,实用性强,在注重介绍传统信号分析理论工程应用的同时,尽可能较为充分地反映应用广泛的若干现代信号处理的理论、技术、方法和应用,并以较多应用实例帮助读者了解这些理论的使用方法与应用背景。

本书可作为机械、动力、土木、环保等非电子类专业本科生和研究生的教材或教学参考书,亦可作为上述有关专业广大工程技术人员的自学用书。

责任编辑 朱守昌

责任校对 关湘雯

现代工程信号处理及应用

主 编 吴 森

中国矿业大学出版社出版
新华书店经销 中国矿业大学印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/16 印张 10.25 字数 246 千字

1997年10月第一版 1997年10月第一次印刷

印数 1—2000册

ISBN 7 - 81040 - 731 - 7

TN·4

定价:15.00元

序 言

信号处理是起源于 17 和 18 世纪数学的一个学科,目前在各个科技领域中已成为一种重要的现代化工具。信号处理的种种方法和应用既有悠久的历史,又像计算机和集成电路那样,以崭新的面貌出现于科技和工程实践的大舞台。

由于计算机技术的大量应用,现代工程信号处理技术主要是指数字信号处理技术。数字信号处理主要研究如何用数字或序列表示信号及如何处理这些序列。其目的可能是估计信号的特征参数,也可能是将信号变换成某种更为需要的形式。经典的数值分析公式(如内插、微分、积分等数值算法)无疑就是数字信号处理算法。而高速计算机的出现促进了现代信号处理算法日益复杂巧妙,集成电路技术的突飞猛进又使得十分复杂的信号处理系统变得更为经济。

信号处理在各个不同的学科领域如声学、声纳、雷达、地震学、语音通信、数据通信、机械工程、电子工程、医疗工程等领域都充分显示出他的重要性。在一些应用场合下,例如脑电图、心电图分析,所希望的是提取某些特征参数;而在另外一些场合下,如声学信号分析,所希望的则是消除信号中的噪声和干扰,或将信号变换成更为容易解释的形式。简而言之,上述的每种情况都需要对信号进行处理。信号分析技术不仅限于一维信号问题,多数图像处理都需采用二维信号处理技术,如 X 射线照片和航空照片的图像增强问题。石油勘探、地震测量的数据分析同样要用到多维信号处理技术。

过去信号处理主要是用模拟设备实现的。50 年代才开始用大型数字计算机处理某些地球物理数据。这是用数字计算机进行信号处理的早期例子之一,虽然还不能实时处理而需要很长时间,但数字计算机的灵活性仍然引起人们的极大注意。因此在用模拟硬件实现信号处理系统之前,人们往往先用计算机进行模拟,以节约大量的信号处理系统的研制经费。在此之后,人们自然而然地在计算机上进行各种巧妙的信号处理算法的尝试。这些信号处理算法的发展,吸引人们去积极研制全数字化的信号处理系统。1965 年出现的快速傅氏变换(FFT)的高效算法,进一步增强了用数字方法实现信号处理的观念,因为 FFT 大大加快了数字信号处理的速度。

现代信号处理技术及应用,目前正以惊人的速度迅猛发展。随着大规模集成电路的成本下降、体积缩小和运算速度提高,信号处理的应用日益广泛。信号处理的标准算法不断出现,各种高效经济的专用信号分析仪广泛应用,而在普通微机上就能实现的功能强大的“虚拟仪器”,更是代表了信号处理仪器的一个发展方向。涉及信号处理问题的普通工程技术人员,所关心的不一定是信号处理算法的具体细节,而可能是各种方法的原理及工程应用。有鉴于此,本书从工程应用的角度介绍了现代工程信号处理的常用理论、方法和应用。其特点是在建立概念和介绍理论的同时,以较多的应用实例强调了这些理论的应用背景和方法,以达到学以致用目的。

本书共分为 11 章。第 1 章为绪论,简单介绍了信号分析基础和信号的分类;第 2 章为数学变换,较为详细地介绍了信号处理最为常用的几种数学变换(傅氏变换、拉氏变换、Z 变换和希尔伯特变换)的内容;第 3 章讨论了信号的采集、加窗方法及离散傅氏变换的基本内容;第 4 章至第 6 章分别为相关分析、频谱分析、互谱分析的理论及其应用;第 7 章介绍了频率响应函数的概念和测量方法以及相干分析的应用;第 8 章为倒谱分析的理论及其应用;最后三章为暂态信号及其分析方法,内容涉及时频分析方法(如短时傅氏变换、Wigner 变换方法等)和小波变换的理论基础及其工程应用实例。本书可作为机械、动力、土木、环保等非电子类专业本科生和研究生的教材或教学参考书,也可作为上述有关专业工程技术人员的自学用书。书中带“※”的章节内容较深,在学时较少时可省去不学,并不影响其内容的系统性。

由于现代工程信号处理正在蓬勃发展之中,加之篇幅有限,本书的选材与介绍定有种种不足之处,疏漏和错误在所难免,诚恳读者批评指正。

编 著 者
1997 年 10 月

目 录

1 绪论	(1)
1.1 信号分析基础	(1)
1.2 信号的分类	(3)
2 数学变换	(9)
2.1 傅立叶变换	(9)
2.2 拉普拉斯变换	(14)
2.3 Z 变换*	(18)
2.4 希尔伯特(Hilbert)变换*	(21)
3 信号的采集、加窗与 DFT、FFT	(25)
3.1 信号的数字化	(25)
3.2 离散傅立叶变换(DFT)	(28)
3.3 泄露与加窗	(33)
3.4 窗函数	(35)
4 相关分析与应用	(38)
4.1 概述	(38)
4.2 相关函数	(39)
4.3 互相关分析	(42)
4.4 相关函数的计算*	(44)
4.5 相关测速和定位	(46)
4.6 传递路径识别与“贡献量”的测定	(48)
4.7 相关分析与同频检测*	(51)
5 频谱分析与应用	(53)
5.1 频率分析	(53)
5.2 功率谱分析	(54)
5.3 信号的相位谱	(58)
5.4 旋转机械的特征分析	(59)
5.5 载荷谱与随机环境模拟	(63)
5.6 工程应用实例	(65)
6 互谱理论与声强测量	(68)
6.1 互谱密度函数	(68)
6.2 声波的能量与声强定义	(70)
6.3 声强的互谱表达式	(71)

6.4	声强测量的工程应用	(73)
7	频响函数与相干分析	(78)
7.1	线性系统的描述	(78)
7.2	线性系统的相关函数和功率谱	(79)
7.3	系统的频率响应与相干函数	(80)
7.4	频响函数的计算*	(83)
7.5	频响函数的测量	(87)
7.6	频响函数的应用	(90)
7.7	系统的相干分析*	(91)
8	倒谱分析及应用	(94)
8.1	倒谱的数学模型	(94)
8.2	复倒谱的建立与相位展开	(95)
8.3	倒谱解卷积与倒频滤波	(97)
8.4	倒谱在计算机上的实现*	(100)
8.5	工程应用实例	(101)
9	暂态信号及时频分析*	(106)
9.1	暂态信号及短时傅氏变换	(106)
9.2	Wigner 变换及其他的时频分析方法	(108)
9.3	STFT 方法的局限性	(110)
9.4	使用 Gaussian 窗函数的 STFT 分析	(113)
10	连续小波变换基础*	(116)
10.1	小波分析发展简介	(116)
10.2	连续小波变换	(117)
10.3	连续小波变换的时频窗的精度	(119)
10.4	信号 $f(t)$ 的重构	(120)
10.5	小波分析与其他时频分析的比较	(121)
11	离散小波变换及其应用*	(124)
11.1	小波分解	(124)
11.2	尺度函数的延拓	(128)
11.3	小波函数的延拓	(130)
11.4	小波系数的性质	(133)
11.5	循环小波变换	(135)
11.6	离散小波变换	(137)
11.7	离散小波变换算例	(144)
	参考文献	(156)

1 绪 论

1.1 信号分析基础

1.1.1 测试、信息与信号

测试是人们认识客观事物的方法之一。测试过程是从客观事物中提取有关信息的过程。

测试包含测量与试验。在测试过程中,人们需要借助专门设备,通过合适的实验和必要的数据处理,获得所研究对象的有关的信息量值。测试科学属于信息科学范畴,所以又被称为信息探测工程学。

所谓信息,一般可理解为消息、情报或知识。例如,语言文字是社会信息;商品报道是经济信息;遗传密码是生物信息等。然而,从物理学观点出发来考虑,信息却是物质所固有的,是其客观存在或运动状态的特征。

信息本身不是物质,不具有能量,但信息的传输却依靠物质和能量。一般说,传输信息的载体称为信号,信息蕴涵于信号之中。例如,在无线电通讯中,电磁波信号运载着新闻或音乐信息。

信号具有能量,它描述了物理量的变化过程,在数学上可以表示为一个或几个独立变量的函数,可以取为随时间或空间变化的图形。例如,噪声信号可以表示为一个时间函数;机械零件的表面粗糙度,则可表示为一个二元空间变量的高度函数。

按照信号变化的物理性质,可分为非电信号与电信号。例如,随时间变化的力、位移、加速度等,可称为非电信号;而随时间变化的电压、电流、电荷、磁通等,则称为电信号。电信号与非电信号可以比较方便地互相转换,因此,在工程中常常将各种非电物理量变换为电信号,以利于传输、变换和分析处理。

信号的分析处理,是指从传感器等一次敏感元件获得初始信息,用一定的设备和手段进行分析处理。图 1-1 表示了信息—信号的转换、传输与分析处理过程。

1.1.2 测试信号分析的基本内容

测试信号中携带着人们所需要的有用信息,也常常含有大量人们不感兴趣的其他信息。后者常被称为干扰噪声,它是在测试过程中不可避免地混入测试系统的。对测试信号的分析处理(如滤波、调制、变换、增强、估值等),就是对信号的加工变换,其目的是改变信号的形态,便于滤除干扰噪声、提取有用信息、对信号进行分析和识别。

信号分析的经典方法有时域分析法与频域分析法。时域分析又可称为波形分析,是用信号的幅值随时间变化的图形或表达式来进行分析,可以得到任一时刻信号的瞬时值或最大值、最小值、均值、均方根值等;也可以通过信号的时域分析,研究其稳态分量与波动分量;对信号的相关分析,可以研究信号本身或相互之间的相似程度;研究信号的幅值取值的分布状

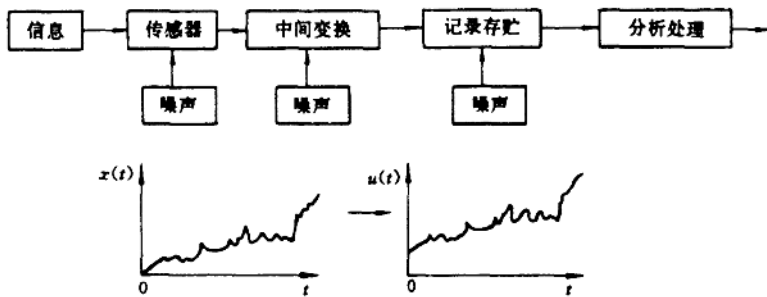


图 1-1 信息—信号的转换、传输与分析处理过程

态,可以了解信号幅值大小取值的概率及概率分布情况(后者又称为幅值域分析)。

测试信号的频域分析是把信号的幅值、相位或能量变换为以频率坐标轴表示,进而分析其频率特性的一种方法,又称为频谱分析,例如幅值谱、相位谱、能量谱密度、功率谱密度等。对信号进行频谱分析可以获得更多的有用信息,因此,频谱分析在近代信号分析技术中已成为一个重要手段。

1.1.3 测试信号分析技术的发展概况

信号分析技术已被应用于许多学科,诸如:通讯、雷达、声纳、地震、遥感、生物医学、机械振动等。特别是近代电子技术、数字计算机及微型机的发展和应用,使信号分析技术得到了迅速的发展,目前它已成为信息科学技术中一种必不可少的工具手段。

50年代以前,信号分析技术主要是模拟分析方法。进入50年代,大型通用数字计算机在信号分析中有了实际应用。当时曾经争论过模拟与数字分析方法的优缺点,争论的焦点是运算速度、精度与经济性。

进入60年代,人造卫星、宇航探测以及通讯、雷达技术的发展,对信号分析的速度、分辨能力提出了更高的要求。1965年美国库列(J. W. Cooley)和图基(J. W. Tukey)提出了快速傅立叶变换(FFT)计算方法,使计算离散傅立叶变换(DFT)的复数乘法次数从 N^2 减少到 $N\log_2 N$ 次,从而大大节省了计算量。这一方法促进了数字信号处理的发展,使其获得更广泛应用。因为卷积可以利用DFT来计算,故FFT算法也可以用正比于 $N\log_2 N$ 的运算次数来计算卷积,而卷积运算在电子计算机科学和其他一些领域都有广泛应用。

70年代以后,大规模集成电路的发展以及微型机的应用,为信号分析技术开拓了广阔的发展远景,许多新的算法不断出现,例如,1968年美国C. M. Rader提出NFFT算法,DFT可用于循环卷积运算;1976年美国S. Winograd提出了WFTA算法,用它计算DFT所需要的乘法次数仅为FFT算法乘法次数的1/3;1977年法国H. J. Nussbaumer提出PFTA算法,结合使用FFT和WFTA方法,在采样点数较大时,较之FFT算法快3倍左右。上述几种方法与DFT方法比较;当采样点 $N=1000$,DFT算法为200万次;FFT为1.4万次;NFFT为0.8万次;WFTA为0.35万次;PFTA为0.3万次。

目前信号分析技术的发展目标是:①在线实时能力的进一步提高;②分辨能力和精度的提高;③扩大和发展新的专用功能;④专用机结构小型化,性能标准化,价格低廉;⑤在

微机上采用软、硬件结合的形式构成“虚拟仪器”。

1.2 信号的分类

1.2.1 确定性信号与非确定性信号

1.2.1.1 确定性信号

可以用明确的数学关系式描述的信号称为确定性信号,它可以进一步分为周期信号、非周期信号与准周期信号。

周期信号是经过一定时间就重复出现的信号,满足条件

$$x(t) = x(t + nT) \quad (1-1)$$

式中 T ——周期, $T = 2\pi/\omega_0$;

$n = 0, \pm 1, \dots$;

ω_0 ——基频。

如在机械系统中,回转体不平衡引起的振动,往往是一种周期性运动,所产生的是周期性信号。

非周期信号往往具有瞬变性。例如锤子的敲击力,承载缆绳断裂时的应力变化,热电偶插入加热炉中温度的变化过程等信号均属于瞬变非周期信号(图 1-2)。准周期信号是周期与非周期的边缘情况,是由有限个周期信号的合成,但各周期信号的频率相互间不是公倍关系,其合成信号不满足周期条件。这种信号往往出现于通信、振动系统中,例如,不同独立振源激起的系统响应,往往属于这一类。

1.2.1.2 非确定性信号

非确定性信号不能用数学关系式描述,其幅值、相位变化是不可预知的,所描述的物理现象是一种随机过程。例如,汽车奔驰时所产生的振动;飞机在大气中的飞行;树叶的随风飘荡;环境噪声等。

然而,需要指出的是,实际的物理过程往往很复杂,既非理想的确定性,也非完全的非确定性的,而是相互掺杂的。

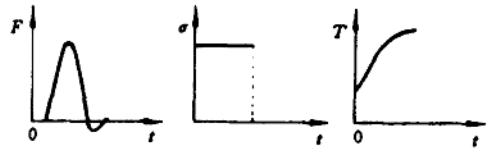


图 1-2 瞬变非周期信号

1.2.2 能量信号与功率信号

1.2.2.1 能量信号

在所分析的区间 $(-\infty, \infty)$,能量为有限值的信号 $x(t)$ 称为能量信号,满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty \quad (1-2)$$

关于信号的能量,可作如下解释:对于电信号,通常是电压或电流,电压在已知区间 (t_1, t_2) 内消耗在电阻上的能量为

$$E = \int_{t_1}^{t_2} \frac{U^2(t)}{R} dt \quad (1-3)$$

对于电流,能量

$$E = \int_{t_1}^{t_2} R I^2(t) dt \quad (1-4)$$

在上面每一种情况下,能量都是正比于信号平方的积分。讨论消耗在 1Ω 电阻上的能量往往是很方便的,因为当 $R=1 \Omega$ 时,上述两式具有相同形式,采用这种规定时,就称方程

$$E = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt$$

为任意信号 $x(t)$ 的“能量”。但需注意到,这一关系式中包括了一个带有适当量纲的数“1”。通常定义,当区间 (t_1, t_2) 为 $(-\infty, \infty)$ 时,能量为有限值的信号称为能量信号,或称为能量有限信号,例如,矩形脉冲、减幅正弦波、衰减指数等信号。

1.2.2.2 功率信号

有许多信号,如周期信号、随机信号等,在区间 $(-\infty, \infty)$ 内能量不是有限值,在这种情况下,研究信号的平均功率更为合适。

在区间 (t_1, t_2) 内,信号的平均功率为

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt \quad (1-5)$$

若区间变为无穷大时,上式仍然大于零,那么信号具有有限的平均功率,称之为功率信号。具体讲,功率信号满足条件

$$0 < \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt < \infty \quad (1-6)$$

对比式(1-2)与式(1-6),显而易见,一个能量信号具有零平均功率,而一个功率信号具有无限大能量。

1.2.3 时限与频限信号

1.2.3.1 时限信号

时域有限信号是在有限区间 (t_1, t_2) 内定义,而其外延恒等于零。例如,矩形脉冲、三角脉冲、余弦脉冲等。而周期信号、指数衰减信号、随机过程等,则称为时域无限信号。

1.2.3.2 频限信号

频域有限信号是指信号经过傅立叶变换,在频域内占据一定带宽 (f_1, f_2) , 其外延恒等于零。例如,正弦信号、 $\text{sinc}(t)$ 函数、限带白噪声等,为时域无限频域有限信号; δ 函数、白噪声、理想采样信号等,则为频域无限信号。

时间有限信号的频谱,在频率轴上可以延伸至无限远。由时频域对称性可推论,一个具有有限带宽的信号,必然在时间轴上延伸至无限远处。显然,一个信号不能够在时域和频域都是有限的。这可用如下定理来叙述:一个严格的频带有限信号,不能同时又是时间上有限的信号;反之亦然。

1.2.4 连续时间信号与离散时间信号

按照时间函数取值的连续性与离散性,可将信号划分为连续时间信号与离散时间信号。

1.2.4.1 连续时间信号

在所讨论的时间间隔内,对于任意时间值,除若干个第一类间断点外,都可给出确定的函数值,此类信号称为连续时间信号或模拟信号。

所谓第一类间断点,应满足条件:函数在间断点处左极限与右极限存在;左极限与右极

限不等, $x(t_0^-) \neq x(t_0^+)$; 间断点收敛于左极限与右极限函数值的中点。故而正弦、直流、阶跃、锯齿波、矩形脉冲、截断信号等(图 1-3), 都称为连续时间信号。

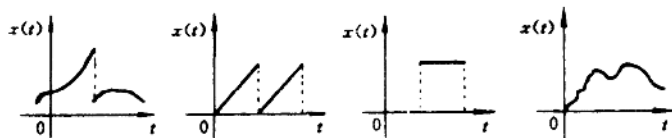


图 1-3 连续时间信号

1.2.4.2 离散时间信号

离散时间信号又称为时域离散信号或时间序列。它是在所讨论的时间区间, 不连续的瞬时函数值。

离散时间信号又可分为两种情况: 时间离散而幅值连续时, 称为采样信号; 时间离散而幅值量化时, 则称为数字信号。

离散时间信号可以从试验中直接得到, 也可从连续时间信号中经采样而得到。

典型离散时间信号有单位采样序列、阶跃序列、指数序列等。

单位采样序列用 $\delta(n)$ 表示, 定义为

$$\delta(n) = \begin{cases} 0, & n \neq 0; \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

此序列在 $n=0$ 处取单位值 1, 其余点上均为零(图 1-4a)。单位采样序列又称为克罗内克(Kronecker) δ 函数或单位样值函数, 它在离散时间系统中的作用, 类似于连续时间系统中的单位脉冲函数 $\delta(t)$ 。但是, 应注意它们之间的区别, $\delta(t)$ 可理解为在 $t=0$ 点脉冲宽度趋于零, 幅度为无限大的信号; 而 $\delta(n)$ 在 $n=0$ 点取有限值, 等于 1。单位延时 $\delta(n-1)$ 和 k 延时 $\delta(n-k)$ 分别如图 1-4b 和 c 所示。

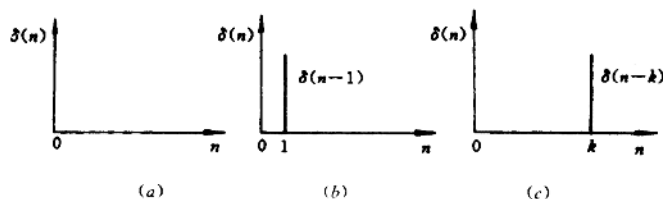


图 1-4 单位采样序列

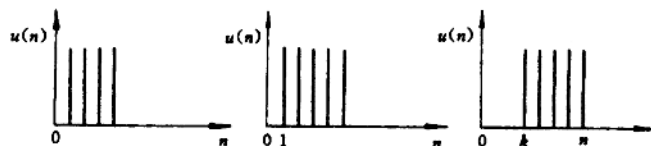


图 1-5 单位阶跃序列

图 1-5 为单位阶跃序列用 $u(n)$ 表示定义为

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

单位阶跃序列与单位采样序列之间的关系为

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) \quad (1-7)$$

或

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (1-8)$$

实指数序列是一个值为 a^n 的任意序列(图 1-6a), 此处 a 为实数。

正弦序列具有 $x(n) = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$ 的形式(图 1-6b), 其中 ω_0 与 φ 是常数。

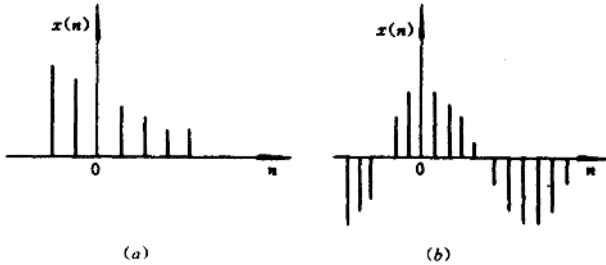


图 1-6 实指数序列与正弦序列

1.2.5 物理可实现信号

物理可实现信号又称单边信号, 满足条件: $t < 0$ 时, $x(t) = 0$, 即在时刻小于零的一侧全为零, 信号完全由时刻大于零的一侧确定。

在实际中出现的信号, 大量的物理可实现信号, 因为这种信号反映了物理上的因果律。实际中所能测得的信号, 许多都是由一个激发脉冲作用于一个物理系统之后所输出的信号。例如, 切削过程, 可以把机床、刀具、工件构成的工艺系统作为一个物理系统, 把工件上的硬质点或切削刀具上积屑瘤的突变等, 作为振源脉冲, 仅仅在该脉冲作用于系统之后, 振动传感器才有描述刀具振动的输出。

所谓物理系统, 具有这样一种性质, 当激发脉冲作用于系统之前, 系统是不会有响应的。换句话说, 在零时刻之前, 没有输入脉冲, 则输出为零, 这种性质反映了物理上的因果关系。因此, 一个信号要通过一个物理系统来实现, 就必须满足 $x(t) = 0 (t < 0)$, 这就是把满足这一条件的信号称之为物理可实现信号的原因。同理, 对于离散信号而言, 满足 $x(n) = 0 (n < 0)$ 条件的序列, 即称为因果序列。

1.2.6 信号分析中的常用函数

1.2.6.1 脉冲函数—— δ 函数

δ 函数表示一瞬间的脉冲。狄拉克(Dirac)于 1930 年在量子力学中引入了脉冲函数。从数学意义上讲, 脉冲函数完全不同于普通函数, 被称之为广义函数。 δ 函数在信号分析中占有特殊地位。

δ 函数的涵义为: 如果在某一理想条件下(如图 1-7 所示), 在 ϵ 时间内激发出一个方波

$s_\epsilon(t)$, 并且设方波面积为 1, 则有

$$s_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon, & 0 \leq t \leq \epsilon; \\ 0, & t < 0, t > \epsilon. \end{cases} \quad (1-9)$$

当 ϵ 变小时, 方波 $s_\epsilon(t)$ 的高度变大; 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 方波的极限就称为单位脉冲函数。从函数的

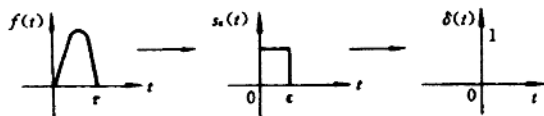


图 1-7 脉冲力与 δ 函数

极限角度看, 有

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0; \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$

从面积角度看, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} s_\epsilon(t) dt = 1$$

从物理意义上看, δ 函数是一个理想函数, 是一种物理不可实现的信号。因为, 无论如何, 当用任何工具产生冲激力时, 其延续时间不可能为零。

δ 函数在原点为无穷大, 表示了当冲激时间 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 其冲激力为无穷大; δ 函数的单位为 1 (亦可以是任意常数 k), 表示了冲激能量为有限值。

1.2.6.2. sinc(t) 函数

$\text{sinc}(t)$ 函数又称为抽样函数、滤波函数或内插函数, 在许多场合下频繁出现。其定义为:

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t} \quad (-\infty < t < \infty) \quad (1-10)$$

或

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi}, \quad (-\infty < t < \infty) \quad (1-11)$$

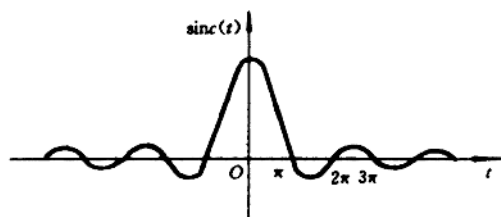


图 1-8 $\text{sinc}(t)$ 函数

如图 1-8 所示, 它是一个偶函数, 在 t 的正、负方向幅值逐渐衰减, 当 $t = \pm\pi, \pm 2\pi \dots \pm n\pi$ 时, 函数为零; $t=0$ 时, 函数为 1。

$\text{sinc}(t)$ 函数所以称为抽样 (或闸门) 函数, 是因为矩形脉冲的频谱为 $\text{sinc}(t)$ 型函数; 所以称为滤波函数, 是因为与 $\text{sinc}(t)$ 型函数进行时域卷积时, 实现低通滤波; 所以称为内插函数, 是因为采样信号复原时, 在时域中由许多 $\text{sinc}(t)$ 函

数叠加而成, 构成非采样点的波形。

1.2.6.3 复指数函数

复指数函数 e^s ($-\infty < t < \infty$) 在信号分析中亦占有特殊地位。其指数 $s = \sigma + j\omega$, 是一个复数, 依据取值不同, 函数 e^s 可以概括信号分析中所遇到的多种波形。例如

(1) 当 s 为实数, 即 $\omega = 0$ 时, 如果 $\sigma \neq 0$, 则 e^s 表示升、降指数函数; 如 $\sigma = 0$, 则表示直流信号;

(2) 当 s 为虚数, 即 $\sigma = 0, \omega \neq 0$ 时,

$$e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t,$$

实部 $\operatorname{Re}[e^{j\omega t}] = \cos \omega t$, 表示余弦;

虚部 $\operatorname{Im}[e^{j\omega t}] = \sin \omega t$, 表示正弦。

(3) 当 s 为复数, 即 $\sigma \neq 0, \omega \neq 0$ 时,

$$e^s = e^{\sigma} \cdot e^{j\omega t} = e^{\sigma} \cos \omega t + j e^{\sigma} \sin \omega t,$$

实部 $\operatorname{Re}[e^s] = e^{\sigma} \cos \omega t$, 表示余弦指数;

虚部 $\operatorname{Im}[e^s] = e^{\sigma} \sin \omega t$, 表示正弦指数。

如果将上述各种情况表示在 s 平面上 (图 1-9), 可以看出 s 平面上的每一点都和一定的指数函数模式相对应。

虚轴 ($j\omega$) 代表 e^s 的振荡频率, 而实轴 (σ) 则代表 e^s 的振幅变化。当 s 沿实轴 (σ) 变化时, $\omega = 0$, 这意味着与 σ 轴相关联的信号是一种振幅单调增大 ($\sigma > 0$)、等幅 ($\sigma = 0$) 或单调减小 ($\sigma < 0$) 的指数信号。当 s 沿虚轴变化时, $\sigma = 0, e^{\sigma} = 1$, 则意味着与 $j\omega$ 轴相关联的信号是一种等幅振荡 (正弦或余弦) 信号, 其振荡频率沿虚轴而变化。这自然会引出一个问题, 即沿 $-j\omega$ 轴表示的信号频率将为负值。根据频率的定义, 频率本来是一个正量, 一个函数在 1 秒钟内通

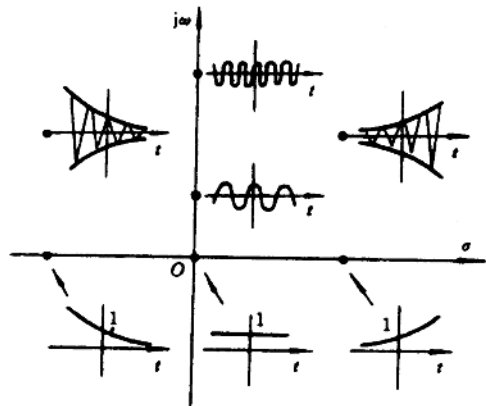


图 1-9 复指数函数表示在 s 平面上

过某一固定点的次数总是正的。那么怎样解释这个“负频率”呢? 之所以产生这种问题, 是由于上述运算中的频率是复指数函数中的指数。因此, 负频率是与负指数相关联的, 是数学运算的结果, 并无确切的物理含义。

此外, 复指数函数 e^s 还具有另外一个重要性质, 即实际中遇到的任何时间函数, 总可以表示成为复指数函数的离散和与连续和, 即 e^s 作为正交函数出现于傅立叶级数与傅立叶变换之中。

2 数学变换

信号包含着信息,这种信息通常反映一个物理系统的状态和特征。一般实测的信号是一个时间历程波形,或者说是以时间为独立变量的时间函数。在每个科学技术领域里,为了提取信息,都必须对时域信号进行变换,使之从一种形式变换成更易于分析识别的形式。在某种意义上这种新的信号形式比原始信号更合乎提取信息的要求。

上述变换的理论根据是数学上的变换原理,为此,本章作为信号处理的数学基础介绍几种常用的数学变换。

2.1 傅立叶变换

2.1.1 傅立叶级数

2.1.1.1 周期函数与三角函数

对于函数 $f(t)$,若存在着不为零的常数 T ,对于时间 t 的任何值都有

$$f(t+T) = f(t) \quad (2-1)$$

则将 $f(t)$ 称为周期函数,而满足上式的最小整数 T 称为 $f(t)$ 的周期。

正弦函数是一种常见的描述简谐振动的周期函数。如

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

是一个以 $2\pi/\omega$ 为周期的正弦函数,其中 y 表示动点的位置, t 表示时间, A 为振幅, φ 为相位角, ω 为角频率,即 $\omega = 2\pi f$ 。

除正弦周期函数之外,还有非正弦周期函数,它反映复杂的周期运动。非正弦周期函数可分解成若干三角函数之和。也就是说,一个比较复杂的周期运动可以看成许多不同频率的简谐运动的叠加。

2.1.1.2 周期函数的傅立叶级数展开

任何一个周期为 T 的周期函数 $f(t)$,如果在 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上满足狄利克莱(Dirichlet)条件,则可展开为如下的傅立叶级数,即

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \end{aligned} \quad (2-2)$$

其中

$$\omega = 2\pi/T$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt, (n = 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt, (n = 1, 2, \dots)$$

以上展开式叫做周期函数 $f(t)$ 的傅立叶级数, 其中 a_0, a_n, b_n 为傅立叶系数。在信号处理中, 这种展开又叫做频率分析, 其中常数 $a_0/2$ 表示信号的静态部分, 称为直流分量, 而 $a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t, a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t, \dots \dots a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$, 依次叫做一次谐波、二次谐波、 $\dots n$ 次谐波等。

2.1.1.3 傅立叶级数的复数形式

根据欧拉公式, 即

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{j\theta} + e^{-j\theta})$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2j} (e^{j\theta} - e^{-j\theta})$$

$$= -\frac{j}{2} (e^{j\theta} - e^{-j\theta})$$

可将(2-2)式写成

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2} (e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}) - \frac{jb_n}{2} (e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega t} \right) \end{aligned} \quad (2-3)$$

若令

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{jn\omega t} dt$$

则有

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega t} + c_{-n} e^{-jn\omega t}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2-4)$$

把 c_0, c_n 和 c_{-n} 用统一的 c_n 来表示, 即

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2-5)$$

得到

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-jn\omega \tau} d\tau \right] e^{jn\omega t} \end{aligned} \quad (2-6)$$

这就是傅立叶级数的复指数形式。

傅立叶级数的以上两种形式在本质上是相同的, 但是在应用上复数形式比较方便。系数