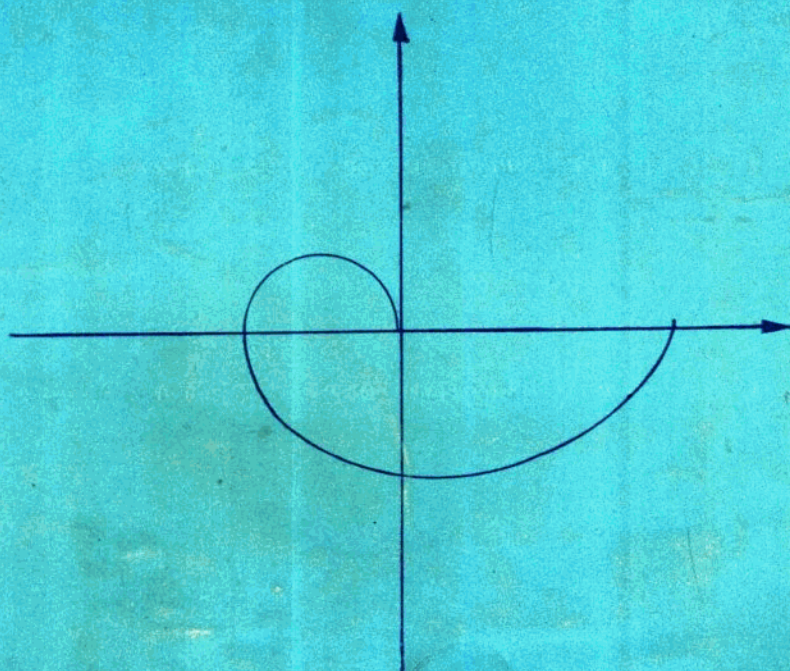


自动控制系统

(美)B C·KUO 著

靳敏译

(下)



武汉市自动化研究所情报室

一九八〇年

目 录

6. 控制系统的时域分析

6.1 引言	(1)
6.2 控制系统时间响应的典型测试信号	(1)
6.3 控制系统的时域性能—稳态响应	(3)
6.4 控制系统的时域性能—瞬态响应	(12)
6.5 二阶系统的瞬态响应	(13)
6.6 位置控制系统的时间响应	(22)
6.7 微分控制对反馈控制系统时间响应的影响	(31)
6.8 积分控制对反馈控制系统时间响应的影响	(36)
6.9 速度反馈或转速反馈控制	(38)
6.10 状态变量反馈控制	(39)

7. 控制系统的稳定性

7.1 引言	(42)
7.2 稳定性、特征方程和状态转移矩阵	(42)
7.3 具有输入的线性非时变系统的稳定性	(44)
7.4 线性控制系统稳定性的判定方法	(46)
7.5 劳斯—古尔维茨判据	(46)
7.6 奈奎斯特判据	(53)
7.7 奈奎斯特判据的应用	(64)
7.8 $G(s)H(s)$ 的附加极点和零点对奈奎斯特轨迹形状的影响	(71)
7.9 多回路系统的稳定性	(74)
7.10 延迟线性控制系统的稳定性	(78)
7.11 非线性系统的稳定性—波波夫判据	(80)

8. 根轨迹技巧

8.1 引言	(85)
8.2 根轨迹的基本条件	(85)
8.3 完整根轨迹的作图	(89)
8.4 利用根轨迹技术求多项式的根	(114)
8.5 根轨迹作图的某些重要特点	(119)
8.6 根轮廓线—多个参量的变化	(125)
8.7 纯延迟系统的根轨迹	(131)
8.8 根轨迹与极坐标图的关系	(138)

8.9 离散数据控制的根轨迹	(141)
9. 控制系统的频率域分析	
9.1 引言	(145)
9.2 频率域特性	(147)
9.3 二阶系统的 M_p 、 ω 与带宽	(148)
9.4 增加开环传递函数零点的效果	(151)
9.5 增加开环传递函数极点的效果	(155)
9.6 相对稳定性——增益裕量, 相角裕量与 M	(156)
9.7 与伯德图中幅值曲线斜率有关的相对稳定性	(161)
9.8 常数 M 在 $G(j\omega)$ 平面上的轨迹	(164)
9.9 $G(j\omega)$ 平面上的恒定的相角轨迹	(167)
9.10 幅值—相角平面上的常数 M 和 N 的轨迹——尼科尔图	(169)
9.11 反馈传递函数不为1的反馈系统闭环频率响应分析	(175)
9.12 频率域的灵敏度分析	(175)
10. 控制系统设计导引	
10.1 引言	(178)
10.2 控制系统的经典设计方法	(182)
10.3 相角超前补偿	(186)
10.4 相角滞后补偿	(202)
10.5 滞后—超前补偿	(215)
10.6 桥式—T型网络的补偿	(219)
11. 最佳控制导论	
11.1 引言	(227)
11.2 分析设计	(228)
11.3 参量最佳化	(236)
11.4 设计有指定特征值的系统——可控的应用	(238)
11.5 状态观察器的设计	(240)
11.6 最佳线性调节器的设计	(250)
11.7 部分状态反馈的设计	(265)

第六章 控制系统的时域分析

6.1 引言

大多数系统是把时间当成独立的变量,所以往往对系统的时间响应感兴趣。针对所分析的课题,将一个参考输入信号加入系统,然后研究时域的响应以评价系统的性能。例如,如控制系统的目的是使输出变量尽可能紧密地跟随输入信号的话,就必须把输入和输出作为时间的函数加以比较。

控制系统的时间响应通常分为两部分:即瞬态响应和稳态响应。如时间响应用 $C(t)$ 表示, $C(t)$ 一般可写为:

$$C(t) = C_t(t) + C_{ss}(t) \quad (6-1)$$

其中 $C_t(t)$ = 瞬态响应

$C_{ss}(t)$ = 稳态响应

有关稳态的定义还没有完全统一。在电路分析中,有时把稳态变量定义为不随时间而变的常数,这是很有用处的。但是在控制系统应用中,响应进入稳态后仍旧随时间而变化。控制系统的稳态响应仅仅是时间趋于无穷大时的固定响应。因而,正弦波可以看成为一个稳态响应,当时间接近无穷大时,任何时刻的正弦波状态都是固定的。同样,如用 $C(t) = t$ 来描述响应,则此响应可以定义成稳态响应。

瞬态响应是响应的一部分,随时间变大,瞬态响应趋于零。因此, $C_t(t)$ 有下述性质:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_t(t) = 0 \quad (6-2)$$

可以证明:稳态响应是瞬态响应消失后仍旧保留的响应部分。

所有的控制系统在达到稳态之前均表现出某种程度的瞬态现象。因为物理系统不可避免地具有惯量,质量和感应等。所以当加入输入时,响应不可能随输入而突然变化,因而可观察到瞬态。

控制系统的瞬态响应是很重要的,因为它属于系统的动态性能。在进入稳态之前,必须密切地观察响应和输入,或响应和预定响应之间的误差。稳态响应与输入进行比较便可说明系统最终的精确度。如果输出的稳态响应不完全符合输入的稳态,系统就存在稳态误差。

6.2 控制系统时间响应的典型测试信号

同许多电气电路和通讯系统不同,很多实际控制系统的输入激励是事先不知道的。在许多情况下,控制系统的实际输入可以随时间呈随机变化。例如,雷达跟踪系统中,被追踪目标的位置与速度以一种无法预测的方式变化着,所以不能用一定的数学公式来描述它们。这

就对设计师出了一个难题，因为设计的控制系统很难满足于任何输入信号。为便于分析和设计，必须提出几种基本的输入函数类型，再根据这几种测试信号来评价系统的性能。恰当地选择好这些基本测试信号，不仅使数学处理方法能系统化，而且由这些输入的响应可以预测出系统对更复杂输入的性能。在设计中，可以根据这些测试信号来规定性能指标，以便设计出的系统满足指标。

在频率域内分析线性非时变系统的响应时，采用频率可变的正弦输入。当输入的频率由零变至系统有效性能范围之外时，用输入和输出的幅度比与相位作图，所得曲线是频率的函数。由系统的频率域特性可以预测出系统的时域行为。

常用于时域分析的测试信号有下列几种：

阶跃输入函数

阶跃输入函数表示参考输入变量的瞬时变化。例如输入是机械转轴的角位移，则阶跃输入表示转轴突然的转动。阶跃函数的数学公式如下：

$$r(t) = \begin{cases} Rt & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (6-3)$$

其中：R是常数，或

$$r(t) = R u_1(t) \quad (6-4)$$

其中， $u_1(t)$ 是单位阶跃函数。 $t=0$ 时，没有规定阶跃函数。图6-1(a)表示阶跃函数是时间的函数。

斜坡输入函数

在斜坡函数的情况下，信号的数值随时间有恒定的变化。斜坡函数的数学表达式如下：

$$r(t) = \begin{cases} Rt & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (6-5)$$

或简单地设：

$$r(t) = R t u_1(t) \quad (6-6)$$

斜坡函数见图6-1(b)，如果输入变量是转轴的角位移，则斜坡输入代表转轴的恒速转动。

抛物线输入函数

抛物线输入函数的数学公式如下：

$$r(t) = \begin{cases} Rt^2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (6-7)$$

或简化成

$$r(t) = R t^2 u_1(t) \quad (6-8)$$

抛物线函数的图形见图6-1(c)。

这些测试信号的共同特点是：它们的数学描述很简单；同时，从阶跃函数到抛物线函数，对时间的响应是逐步加快的。阶跃函数是很有用的测试信号，其幅度的起始瞬态阶跃可以说明系统反应的快慢。另外，由于是连续阶跃，原则上，阶跃函数在频谱上的频带很宽，所

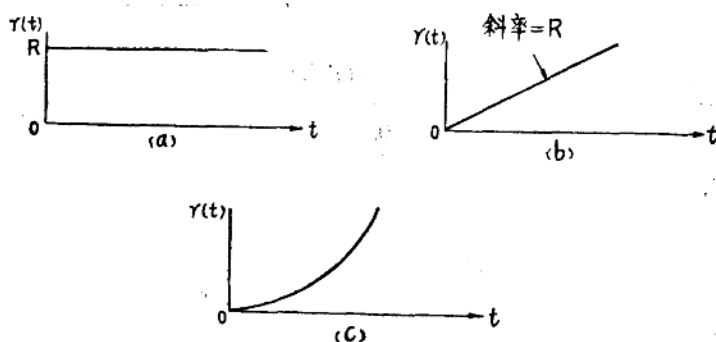


图 6-1 控制系统的基本时域测试信号

(a) 阶跃函数输入, $r(t) = Ru_s(t)$

(b) 斜坡函数输入, $r(t) = Rt u_s(t)$

(c) 抛物线函数输入 $r(t) = Rt^2 u_s(t)$

以, 阶跃函数作为测试信号与频率范围很广的各种正弦信号是不相上下的。

斜坡函数可以测定出系统对随时间呈线性变化的信号有无响应。抛物线函数比斜坡函数的反应要快一个数量级。实际上, 我们很少有必要使用比抛物线函数还要快的测试信号。这是因为如要跟踪或随动高阶输入, 系统也必须是高阶的, 这时就会产生稳定性问题, 详见下文。

6.3 控制系统的时域性能—稳态响应

在这一节, 我们要讨论测定控制系统时域性能的典型判据。控制系统的时间响应可以表示为瞬态响应、稳态响应、或者定性描述时间响应的性能指标。下面将讨论这些判据。

稳态误差

如上所述, 稳态误差是控制系统加入一种特定输入时系统精确度的量度。物理系统中, 由于存在摩擦, 特定系统的性质又有所不同, 输出响应的稳态值很少完全与参考输入符合。因此, 控制系统的稳态误差差不多是不可避免的。设计的目的之一就是使误差减为最小值, 或低于一定的允许值之下。例如位置控制系统中, 输出的最终位置最好完全符合参考位置。在速度控制系统中, 控制目标是使输出速度尽可能接近参考值。

如果参考输入 $r(t)$ 的量纲与被控输出 $c(t)$ 相同, 如电压控制电压, 位置控制位置, 而且数值的量级和阶数又相同, 则误差信号可以简化为:

$$e(t) = r(t) - c(t) \quad (6-9)$$

但是, 有时参考输入的量级或者甚至于量纲不可能与受控变量相同, 或不容易作到这点。例如, 高压电源的输出必须用低压源来控制; 速度控制系统用电压源来控制是很实用的, 或者用位置输入来控制输出转轴的速度。在这些情况下, 误差信号不能简单地看成参考输入与受控输出之差, 方程 (6-9) 就没有什么意义了。输入和输出必须是同一量纲和同一量级, 才能相减。因此, 往往在反馈回路中加入一个反馈传递函数不为 1 的元件, 如图 6-2

可见。这个反馈传递函数不为 1 的控制系统误差可定义为：

$$\epsilon(t) = r(t) - b(t) \quad (6-16)$$

或 $\epsilon(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s)C(s) \quad (6-11)$

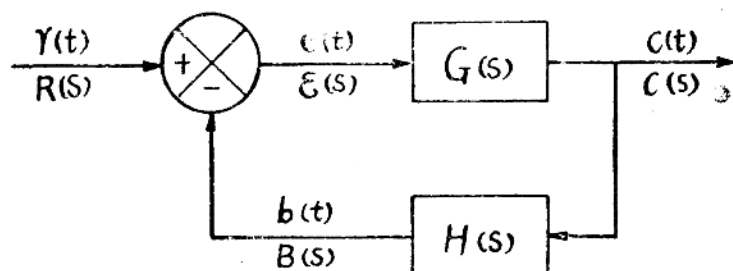


图 6-2 反馈传递函数不为 1 的反馈控制系统

例如，用 10V 参考来调节 100V 电压源，则 H 是常数并等于 0.1。当输出电压正好为 100V 时，误差信号为：

$$\epsilon(t) = 10 - 0.1 \times 100 = 0 \quad (6-12)$$

我们再考虑另一个例子，即图 6-2 的速度控制系统。其中输入 $r(t)$ 作为参考以控制系统的输出速度。设 $c(t)$ 表示输出位移。在反馈回路上，我们需加一个转速表，故 $H(s) = k_v s$ 所以速度的误差定义为：

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= r(t) - b(t) \\ &= r(t) - K_v \frac{dc(t)}{dt} \end{aligned} \quad (6-13)$$

当输出速度 $\frac{dc(t)}{dt}$ 等于 $r(t)/K_v$ 时，误差为零。

反馈控制系统的稳态误差是时间趋于无穷大时的误差。即为：

$$\text{稳态误差} = e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) \quad (6-14)$$

参看图 6-2，误差函数的拉普拉斯变换为：

$$\epsilon(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (6-15)$$

利用终值定理，系统的稳态误差为：

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \epsilon(s) \quad (6-16)$$

其中 $s \epsilon(s)$ 在虚轴和 S 平面的右半部没有极点。

把方程 (6-15) 代入 (6-16) 得：

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s R(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (6-17)$$

此式说明稳态误差取决于参考输入 $R(s)$ 与回路传递函数 $G(s)H(s)$ 。

我们首先根据 $G(s)H(s)$ 的形式确定控制系统的类型。一般 $G(s)H(s)$ 可写成：

$$G(s)H(s) = \frac{K(1+T_1s)(1+T_2s)\cdots(1+T_ms)}{s^j(1+T_as)(1+T_bs)\cdots(1+T_ns)} \quad (6-18)$$

其中K和所有的Ts是常数。反馈控制系统的类型就取决于G(s)H(s)在s=0的极点阶数。因此,由方程(6-18)G(s)H(s)所描述的系统类型有j种。其中j=0,1,2,...,m,n, Ts的数值对于系统的类型无关紧要,并不影响稳态误差的数值。例如,下面的反馈控制系统有:

$$G(s)H(s) = \frac{K(1+0.5s)}{s(1+s)(1+2s)} \quad (6-19)$$

它为1型,因为j=1。

现在我们分析输入类型对稳态误差的影响,我们只考虑阶跃,斜坡和抛物线函数。

阶跃输入的稳态误差:

如果图6-2控制系统的参考输入是阶跃输入,幅值为R,则输入的拉普拉斯变换为R/s,方程(6-17)变成:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{1+G(s)H(s)} = \frac{R}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)} \quad (6-20)$$

为方便起见,我们定义为:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) \quad (6-21)$$

其中K_p是位置误差常数,方程(6-20)写成:

$$e_{ss} = \frac{R}{1+K_p} \quad (6-22)$$

我们可看出,当输入是阶跃函数时,为使e_{ss}趋于零,K_p必须为无穷大。如G(s)H(s)用方程(6-18)描述,要使K_p无穷大,j必须至少等于1,这就是说,G(s)H(s)必须至少有一个纯积分。因此,我们可总结阶跃输入的稳态误差如下:

$$\begin{array}{ll} 0 \text{ 型系统} & e_{ss} = \frac{R}{1+K_p} = \text{常数} \\ 1 \text{ 型系统} & e_{ss} = 0 \\ \text{(或更高型)} & \end{array}$$

斜坡输入的稳态误差:

如果图6-2控制系统的输入是:

$$r(t) = Rtu_r(t) \quad (6-23)$$

其中R是常数, r(t)的拉普拉斯变换为

$$R(s) = \frac{1}{s^2} \quad (6-24)$$

把方程(6-24)代入(6-17)可得到:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s + sG(s)H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{sG(s)H(s)} \quad (6-25)$$

如定义K_v = $\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$ = 速度误差常数(6-26), 方程(6-25)可读为:

$$e_{ss} = \frac{R}{K_v} \quad (6-27)$$

这是斜坡输入函数的稳态误差。图6-3是斜坡输入引起的典型的 e_{ss} 。

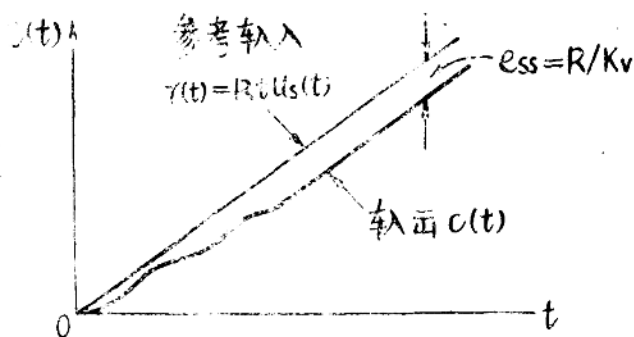


图6-3斜坡输入的典型稳态误差

方程(6-27)说明,当输入是斜坡函数时,为使 e_{ss} 等于零, K_v 必须为无穷大。利用方程(6-18)和(6-26)

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^j - 1} \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (6-28)$$

因此,为使 K_v 无穷大, j 必须至少等于2,或系统必须是2型或更高型。因此,输入为斜坡函数的系统的稳态误差方面,可有下列结论:

0型系统	$e_{ss} = \infty$
1型系统	$e_{ss} = \frac{R}{K_v} = \text{常数}$
2型(或更高)系统	$e_{ss} = 0$

抛物线函数引起的稳态误差:

如果输入用下述公式描述:

$$r(t) = \frac{Rt^2}{2} u_s(t) \quad (6-29)$$

$r(t)$ 的拉普拉斯变换为:

$$R(s) = \frac{R}{s^3} \quad (6-30)$$

图6-2系统的稳态误差是:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s^2 G(s)H(s)} \quad (6-31)$$

加速度误差常数定义为:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s) \quad (6-32)$$

稳态误差为:

$$e_{ss} = \frac{R}{K_a} \quad (6-33)$$

有抛物线输入的系统，其稳态误差有下述结论：

0 型系统	$e_{ss} = \infty$
1 型系统	$e_{ss} = \infty$
2 型系统	$e_{ss} = \frac{R}{K_a} = \text{常数}$
3 型（或更高）系统	$e_{ss} = 0$

为总结误差分析，现将误差常数，系统的类型与输入的关系列于表6-1。方程（6-18）的传递函数仅供参考。

表6-1阶跃、斜坡和抛物线输入的稳态误差总结

系统的 类 型 j	K_p	K_v	K_a	阶 跃 输 入 $e_{ss} = \frac{R}{1 + K_p}$	斜 坡 输 入 $e_{ss} = \frac{R}{K_v}$	抛 物 线 输 入 $e_{ss} = \frac{R}{K_a}$
0	K	0	0	$e_{ss} = \frac{R}{1 + K}$	$e_{ss} = \infty$	$e_{ss} = \infty$
1	∞	K	0	0	$e_{ss} = \frac{R}{K}$	$e_{ss} = \infty$
2	∞	∞	K	0	0	$e_{ss} = \frac{R}{K}$
3	∞	∞	∞	0	0	$e_{ss} = 0$

值得注意的是：仅仅当输入信号分别是阶跃函数，斜坡函数和抛物线函数时，位置，速度和加速度误差常数在误差分析中才是有意义的。

还要注意的，本节的稳态误差分析是把终值定理用到误差函数中，而误差函数定义为实际输出与预定输出信号之差。在一定的条件下，不论反馈元件的传递函数是否为1，误差信号可定义为输出和参考输入之差。例如图6-2系统的误差信号可定义为：

$$e(t) = r(t) - c(t) \quad (6-34)$$

因而：

$$E(s) = \frac{1 + G(s) [H(s) - 1]}{1 + G(s)H(s)} R(s) \quad (6-35)$$

和

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1 + G(s) [H(s) - 1]}{1 + G(s)H(s)} R(s) \quad (6-36)$$

因为这里讨论的稳态误差分析运用了终值定理，因此，必须记住首先检查一下， $sE(s)$ 有否极点在 $j\omega$ 轴上或 s 平面的右半部。

误差常数方法当然也有缺点，其中之一就是当输入超出上述三种基本类型的范围后，就无法算出稳态误差。还有一个困难，当稳态误差是时间的函数时，误差常数仅仅推导为无穷大，无法反映误差是如何随时间而变化。下面我们要介绍误差级数，从而更广泛地表示稳态误差。

误差级数

本节推广了误差常数的概念，以包括任何时间函数形式的输入。我们从误差函数的拉普拉斯变换着手介绍，即方程（6—15）：

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (6-37)$$

或者可用方程（6—35）。

利用3.3节讨论的迭积积分原理，误差信号 $e(t)$ 可写成：

$$e(t) = \int_{-\infty}^t W_e(\tau) r(t-\tau) d\tau \quad (6-38)$$

其中 $W_e(\tau)$ 是下式的拉普拉斯逆变换：

$$W_e(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \quad (6-39)$$

这称为误差传递函数。

如果对于任何 t 值， $r(t)$ 的 n 阶导数都成立，则函数 $r(t-\tau)$ 可以展成泰勒级数，即：

$$r(t-\tau) = r(t) - \tau \dot{r}(t) + \frac{\tau^2}{2!} \ddot{r}(t) - \frac{\tau^3}{3!} \dddot{r}(t) + \dots \quad (6-40)$$

其中 $\dot{r}(t)$ 表示 $r(t)$ 对时间的一阶导数。

因为当时间为负值时， $r(t)$ 为零，方程（6—38）的迭积积分的极限从零取至 t 。将方程（6—40）代入方程（6—38），得：

$$\begin{aligned} e(t) &= \int_0^t W_e(\tau) \left[r(t) - \tau \dot{r}(t) + \frac{\tau^2}{2!} \ddot{r}(t) - \frac{\tau^3}{3!} \dddot{r}(t) + \dots \right] d\tau \\ &= r(t) \int_0^t W_e(\tau) d\tau - \dot{r}(t) \int_0^t \tau W_e(\tau) d\tau + \ddot{r}(t) \int_0^t \frac{\tau^2}{2!} W_e(\tau) d\tau - \dots \end{aligned} \quad (6-41)$$

如前所述，稳态误差是取当 $t \rightarrow \infty$ $e(t)$ 的极限，于是：

$$e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_s(t) \quad (6-42)$$

其中 $e_s(t)$ 表示 $e(t)$ 的稳态部分，可表示为：

$$\begin{aligned} e_s(t) &= r_s(t) \int_0^\infty W_e(\tau) d\tau - \dot{r}_s(t) \int_0^\infty \tau W_e(\tau) d\tau + \ddot{r}_s(t) \int_0^\infty \frac{\tau^2}{2!} W_e(\tau) d\tau \\ &\quad - \dddot{r}_s(t) \int_0^\infty \frac{\tau^3}{3!} W_e(\tau) d\tau + \dots \end{aligned} \quad (6-43)$$

而 $r_s(t)$ 表示 $r(t)$ 的稳态部分。

我们设：

$$\begin{aligned} C_0 &= \int_0^\infty W_e(\tau) d\tau \\ C_1 &= - \int_0^\infty \tau W_e(\tau) d\tau \\ C_2 &= \int_0^\infty \tau^2 W_e(\tau) d\tau \\ C_n &= (-1)^n \int_0^\infty \tau^n W_e(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (6-44)$$

方程 (6-42) 可写成:

$$e_s(t) = C_0 r_s(t) + C_1 \dot{r}_s(t) + \frac{C_2}{2!} \ddot{r}_s(t) + \dots + \frac{C_n}{n!} r_s^{(n)}(t) + \dots \quad (6-45)$$

这就称为误差级数, 而系数 $C_0, C_1, C_2 \dots C_n$ 称为广义的误差系数或简单称为误差系数。

由误差传递函数 $W_e(s)$ 很容易直接算出误差系数。因为 $W_e(s)$ 和 $W_e(\tau)$ 的关系是建立在拉普拉斯变换的基础上, 我们有:

$$W_e(s) = \int_0^{\infty} W_e(\tau) e^{-\tau s} d\tau \quad (6-46)$$

令 s 趋于零, 在方程 (6-46) 两边取极限, 我们得:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} W_e(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} W_e(\tau) e^{-\tau s} d\tau \\ &= C_0 \end{aligned} \quad (6-47)$$

方程 (6-46) 中, $W_e(s)$ 对 s 的导数为:

$$\begin{aligned} \frac{dW_e(s)}{ds} &= - \int_0^{\infty} \tau W_e(\tau) e^{-\tau s} d\tau \\ &= C_1 e^{-\tau s} \end{aligned} \quad (6-48)$$

由此可得:

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{dW_e(s)}{ds} \quad (6-49)$$

诸如之类, 求方程 (6-46) 对 s 的逐次微分, 便可得:

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^2 W_e(s)}{ds^2} \quad (6-50)$$

$$C_3 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^3 W_e(s)}{ds^3} \quad (6-51)$$

$$C_n = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^n W_e(s)}{ds^n} \quad (6-52)$$

下面举例说明误差级数的一般用法以及比误差常数更好的优点:

例6-1

在此例中, 要求用误差级数和误差系数计算反馈控制系统的稳态误差。已知有一个反馈传递函数为1的反馈控制系统, 其闭环传递函数为:

$$G(s) = \frac{K}{s+1} \quad (6-53)$$

因为系统是0型, 误差常数是: $K_P = K, K_V = 0$ 、和 $K_A = 0$ 。所以三种基本输入类型的系统稳态误差为:

$$\text{单位阶跃输入、} u_s(t): \quad e_{ss} = \frac{1}{1+K}$$

$$\text{单位斜坡输入、} tu_s(t): \quad e_{ss} = \infty$$

$$\text{单位抛物线输入 } t^2 u_s(t): \quad e_{ss} = \infty$$

注意, 当输入是斜坡或抛物线函数时, 稳态误差无穷大, 它的数值随时间而增加。显然, 误差常数无法反映出稳态函数随时间而增加的准确方式。因此, 欲了解系统对斜坡或抛物线

输入的稳态响应的话，必须求解系统的微分方程。我们现在知道系统的稳态响应可由误差级数求出。

由方程 (6-39)，可对此系统求出：

$$W_e(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{s+1}{s+K+1} \quad (6-54)$$

误差系数算出为：

$$C_0 = \lim_{s \rightarrow 0} W_e(s) = \frac{1}{K+1} \quad (6-55)$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{dW_e(s)}{ds} = \frac{K}{(1+K)^2} \quad (6-56)$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^2W_e(s)}{ds^2} = \frac{-2K}{(1+K)^3} \quad (6-57)$$

虽然还可求出更高阶的系数，但它们的值越来越小，故没有什么意义了。误差级数可写成：

$$e(t) = \frac{1}{1+K} r(t) + \frac{K}{(1+K)^2} \dot{r}(t) + \frac{-K}{(1+K)^3} \ddot{r}(t) + \dots \quad (6-58)$$

现在我们考虑下面三种基本输入：

1. 当输入信号是单位阶跃函数时， $r(t) = u(t)$ ， $r(t)$ 的所有导数为零，误差级数为：

$$e(t) = \frac{1}{1+K} \quad (6-59)$$

这符合误差常数法的结果。

2. 当输入信号是单位斜坡函数， $r(t) = tu(t)$ ， $\dot{r}(t) = u(t)$ ， $\dot{r}(t)$ 的所有更高阶导数均为零，因此误差级数为：

$$e(t) = \left[\frac{1}{1+K} t + \frac{K}{(1+K)^2} \right] u(t) \quad (6-60)$$

这说明稳态误差随时间而线性地增加。误差一常数法只能说明稳态误差无穷大、无法说明与时间有关的细节。

3. 抛物线输入， $r(t) = (t^2/2) u(t)$ ， $\dot{r}(t) = tu(t)$ ， $\ddot{r}(t) = u(t)$ ，而所有更高阶导数为零。误差级数变为：

$$e(t) = \left[\frac{1}{1+K} \frac{t^2}{2} + \frac{K}{(1+K)^2} t - \frac{K}{(1+K)^3} \right] u(t) \quad (6-61)$$

在这种情况下，误差随 t 的二次幂而增加。

4. 考虑输入信号用 t 和指数项的多项式表示：

$$r(t) = \left[a_0 + a_1 t + \frac{a_2 t^2}{2} + e^{-a_3 t} \right] u(t) \quad (6-62)$$

其中： a_0 ， a_1 ， a_2 和 a_3 是常数，则

$$r(t) = \left[a_0 + a_1 t + \frac{a_2 t^2}{2} \right] u(t) \quad (6-63)$$

$$\dot{r}(t) = (a_1 + a_2 t) u(t) \quad (6-64)$$

$$\ddot{r}(t) = a_2 u_1(t) \quad (6-65)$$

在这种情况下，误差级数变为：

$$e_1(t) = \frac{1}{1+K} r_1(t) + \frac{K}{(1+K)^2} \dot{r}_1(t) - \frac{K}{(1+K)^3} \ddot{r}_1(t) \quad (6-66)$$

例 6—2

此例中，我们将考虑误差常数完全不适合用于推导稳态误差的情况。设例 6—1 系统的输入是正弦波

$$r(t) = \sin \omega_0 t \quad (6-67)$$

其中 $\omega_0 = 2$ 。则

$$r_1(t) = \sin \omega_0 t$$

$$\dot{r}_1(t) = \omega_0 \cos \omega_0 t$$

$$\ddot{r}_1(t) = -\omega_0^2 \sin \omega_0 t$$

$$\dddot{r}_1(t) = -\omega_0^3 \cos \omega_0 t \quad (6-68)$$

⋮
⋮
⋮

误差级数可写成：

$$e_1(t) = [C_0 - \frac{C_2}{2!} \omega_0^2 + \frac{C_4}{4!} \omega_0^4 - \dots] \sin \omega_0 t + [C_1 \omega_0 - \frac{C_3}{3!} \omega_0^3 + \dots] \cos \omega_0 t \quad (6-69)$$

因为输入是个正弦波，误差级数现在是无穷级数。为了求出稳态误差，这个级数能否收敛是个重要问题。而误差级数的收敛显然取决于 ω_0 与 K 值。设 K 为 100，则

$$C_0 = \frac{1}{1+K} = 0.0099$$

$$C_1 = \frac{K}{(1+K)^2} = 0.0098$$

$$C_2 = \frac{-2K}{(1+K)^3} = -0.000194$$

$$C_3 = \frac{6K}{(1+K)^4} = 5.65 \times 10^{-5}$$

于是，利用前四个误差级数，方程 (6—69) 变为：

$$e_1(t) \approx [0.0099 + \frac{0.000194}{2}] \sin 2t + 0.0196 \cos 2t \\ = 0.01029 \sin 2t + 0.0196 \cos 2t \quad (6-70)$$

$$e_1(t) \approx 0.02215 \sin(2t + 62.3^\circ) \quad (6-71)$$

因此，此例的稳态误差也是个正弦波，如方程 (6—71) 所示。

6.4 控制系统的时域性能——瞬态响应

时间响应长的瞬态部分在时间变大时趋于零。当然,所谓瞬态响应是指稳定系统而言,在不稳定系统中响应不会减小,而且是无法控制的。

控制系统的瞬态性能一般用单位阶跃输入表示。单位阶跃输入的瞬态响应可用下面几种性能指标说明:超调量,延迟时间,上升时间和稳定时间。图6—4说明一个线性控制系统的典型阶跃响应。上述性能指标在阶跃响应中的定义如下:

1.最大超调量:最大超调量是输出在瞬态期间对阶跃输入的最大偏差。最大超调量的数值也可用来衡量系统的相对稳定性。最大超调量常常表示为阶跃响应的终值百分率,即:

$$\text{最大超调量百分率} = \frac{\text{最大超调量}}{\text{终值}} \times 100\%$$

2.延迟时间:延迟时间 T_d 是阶跃响应到达终值50%时所需要的时间。

3.上升时间:上升时间 T_r 是阶跃响应从终值的10%到达终值的90%时所需要的时间。有时,还可利用阶跃响应到达终值的50%时其斜率的倒数表示上升时间。

4.稳定时间:稳定时间是阶跃响应减弱并达到终值某一特定百分值时所要求的时间。一般常用5%这个数值。

这四个数值直接反映了阶跃响应的瞬态特征。画出阶跃响应后,就很容易算出这些数。但是,从分析的角度出发,很难测定这些数,少数简单的情况除外。

性能指标

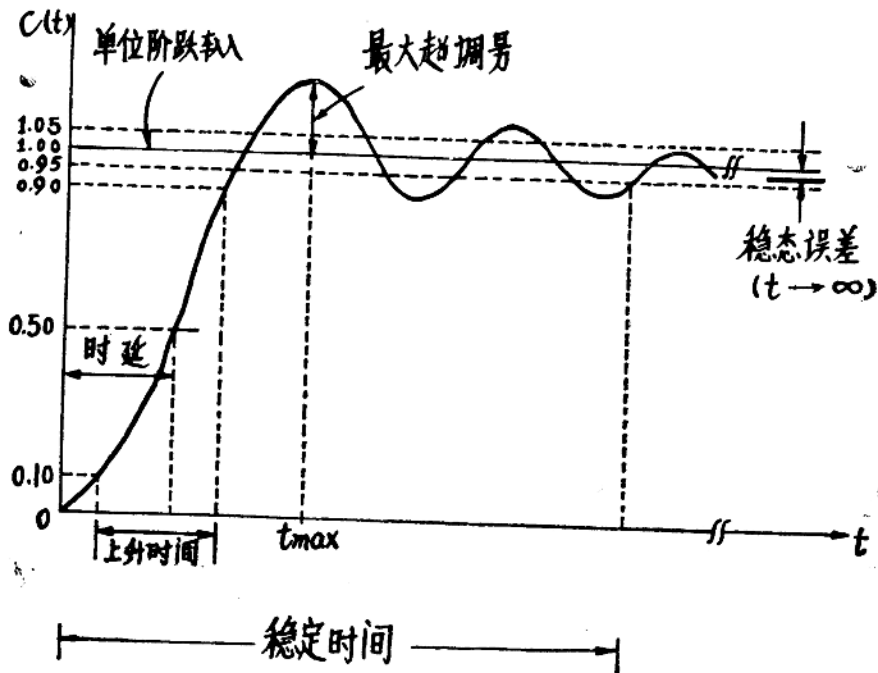


图6—4 控制系统的典型单位阶跃响应

因为控制系统的一般设计目标是超调量小，上升时间快，时延短，稳定时间短以及稳态误差小。所以最好用一个性能指标概括了响应的全部品质。我们规定系统的输入信号是 $r(t)$ ，输出是 $C(t)$ ，输入与输出之差是误差信号，如方程 (6—9)。有时用 $r(t)$ 作预定输出。

为了减小误差信号，可以把误差信号函数的时间积分作为性能指标。例如，最简单的误差函数积分是：

$$I = \int_0^{\infty} e(t) dt \quad (6-73)$$

其中， I 表示性能指标。显而易见，方程 (6—73) 不是个实用的性能指标，因为把它化为最小值就等于把 $e(t)$ 所占面积减为最小值，而一个振荡信号的面为零， I 也就等于零。实用的性能指标有：

$$\int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad \int_0^{\infty} te(t) dt \quad \int_0^{\infty} e^2(t) dt$$

以及其它形式。第11章将讨论用性能指标设计控制系统。

6.5 二阶系统的瞬态响应

虽然实际生活中很少有真正的二阶控制系统，但是对二阶系统的分析却有助于掌握设计和分析的技巧。

考虑图 6—5 所表示的二阶反馈控制系统。

状态方程可写成：

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r(t) \quad (6-74)$$

其中 ζ 和 ω_n 是常数。

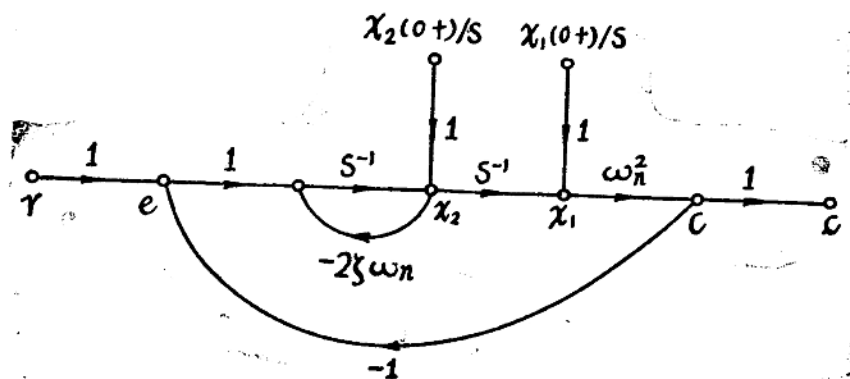


图 6—5 二阶反馈控制系统状态图

输出方程是：

$$c(t) = \omega_n^2 x_1(t) \quad (6-75)$$

对图 6-5 的状态图运用增益公式, 可求出状态转移方程为:

$$\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} S + 2\zeta\omega_n & 1 \\ -\omega_n^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0+) \\ x_2(0+) \end{pmatrix} + \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 \\ S \end{pmatrix} R(s) \quad (6-76)$$

其中: $\Delta = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ (6-77)

借助于拉氏变换表, 对方程 (6-76) 进行拉普拉斯逆变换。对单位阶跃函数输入, 可得到:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \begin{pmatrix} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \psi & \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t \\ -\omega_n \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t & \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0+) \\ x_2(0+) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_n^2} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin [\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi] \right\} \\ \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t \end{pmatrix} t \geq 0 \quad (6-78)$$

其中 $\psi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ (6-79)

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta} \quad (6-80)$$

虽然方程 (6-78) 给出了用起始状态和单位阶跃输入表达的状态变量之解, 但这种表示方法比较烦琐, 特别是系统还只是二阶系统。控制系统的分析并不完全依赖于整个状态和输出响应的计算。由于线性控制理论的发展, 传递函数和特征方程均可用来研究控制系统的性能。现在我们将介绍如何通过特征方程的根分布分析来了解系统的行为。

由图 6-5 可求出系统的闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6-81)$$

将方程 (6-77) 等于零, 可求出系统的特征方程

即: $\Delta = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ (6-82)

对于单位阶跃函数的输入, $R(s) = 1/s$, 将下式实行拉普拉斯逆变换, 便可求出系统的输出响应

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (6-83)$$

或、设起始条件为零, 利用方程 (6-75) 和 (6-78) 也可求出 $C(t)$ 。

$$c(t) = 1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left[\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta} \right] t \geq 0 \quad (6-84)$$

特征方程的根与阶跃响应 $C(t)$ 的行为之间有什么关系是值得分析的。方程 (6-82) 的两个根为:

$$\begin{aligned} s_1, s_2 &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \\ &= -\alpha \pm j\omega \end{aligned} \quad (6-85)$$