

新世纪大学数学金版辅导丛书

微积分

金版辅导

JIN BAN FU DAO

经济类

学苑出版社

新世纪大学数学课金版辅导丛书

微积分金版辅导

(经济类)

主编 陆璇 (清华大学数学系教授)

本册编者 郭瑞平 石 践 张宝学

學苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分金版辅导(经济类)/陆璇主编. - 北京:学苑出版社,2001.5

(新世纪大学数学课金版辅导丛书)

ISBN 7-5077-1844-1

I. 微… II. 陆… III. 高等数学-微积分-教学参考资料-2001
IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 11830 号

学苑出版社出版发行

北京市万寿路西街 11 号 100036

河北省香河县新华印刷有限公司 印刷

880×1230 32 开本 43.75 印张 1079 千字

2001 年 4 月北京第 1 版 2002 年 9 月北京第 2 次印刷

总定价:49.00 元(共三册) 本册定价:17.00 元

(版权所有 翻印必究 印装有误 负责调换)

前 言

为帮助经济类和财经类在校学生、自学者学好微积分,给他们备考研究生提供一份实用的复习资料,我们编写了《微积分金版辅导》一书。

本书按知识结构精心安排章节内容,具有如下特点:

1. 在每一节的开头,以图表、叙述的方式论述本节的知识要点。

2. 在能力培养与解题技巧中,将例题按知识要点分类,并且例题前有提示分析,后有知识要点,尽量做到一题多解以开阔思路,对每一类例题都有解题小结。

3. 在“本节解题技巧”中,总结了一节的知识要点及解题技巧。

本书在每一章最后还安排了以下三部分内容:(1) 1990~2001年考研试题归类精选解析:选取了1990~2001年数学三、数学四和数学五(1997年以前)的考研试题进行分析和讲解,以期能对报考研究生的读者给予帮助。我们对所列举的每道试题都进行了统一编号,其编号规则如下:编号的前两位表示年代;第三位表示数学大类;第四、五位表示第几大题;第六、七位表示第几小题。例如:1991年数学三第四大题第3小题可表示为9130403;(2) 同步测试及参考答案;(3) 本章知识内容小结,给出了本章的知识结构网络图,总结了基础知识、基本题型和解题方法。

本书的最后提供了三套综合模拟试题,部分习题答案后给出了提示,以方便读者。

本书可供全日制大专院校、电大、职大、函大、夜大等广大学生学习《微积分》时阅读和参考;对于自学者和有志攻读硕士研究生的青年,本书更是良师益友;对于从事微积分教学的教师也有一定的参考价值。

限于作者水平,时间又仓促,书中不当之处在所难免,希望广大读者不吝批评指正。

编 者

目 录

第一章 函数	(1)
§1.1 集合	(1)
§1.2 函数	(4)
1990~2001年考研试题归类精选解析	(17)
同步测试及参考答案	(19)
本章知识内容小结	(21)
第二章 极限与连续	(22)
§2.1 极限的概念	(22)
§2.2 极限的性质和运算法则	(25)
§2.3 两个重要的极限	(34)
§2.4 函数的连续性	(41)
1990~2001年考研试题归类精选解析	(46)
同步测试及参考答案	(54)
本章知识内容小结	(59)
第三章 导数与微分	(61)
§3.1 导数的概念	(61)
§3.2 导数的基本公式与运算法则	(65)
§3.3 微分	(78)
1990~2001年考研试题归类精选解析	(82)
同步测试及参考答案	(90)
本章知识内容小结	(95)
第四章 中值定理及导数的应用	(97)
§4.1 中值定理与罗彼塔法则	(97)
§4.2 应用导数研究函数的性质	(105)

§4.3 导数在经济学中的应用	(116)
1990 ~ 2001 年考研试题归类精选解析	(120)
同步测试及参考答案	(133)
本章知识内容小结	(139)
第五章 不定积分	(141)
§5.1 不定积分的概念、性质与基本积分公式	(141)
§5.2 换元积分法	(153)
§5.3 分部积分法	(172)
§5.4 有理函数的积分	(181)
1990 ~ 2001 年考研试题归类精选解析	(187)
同步测试及参考答案	(191)
本章知识内容小结	(197)
第六章 定积分	(199)
§6.1 定积分的概念及基本性质	(199)
§6.2 定积分与不定积分的关系	(210)
§6.3 定积分的换元积分法和分部积分法	(222)
§6.4 定积分的应用	(235)
§6.5 定积分的近似计算	(248)
§6.6 广义积分与 Γ 函数	(251)
1990 ~ 2001 年考研试题归类精选解析	(256)
同步测试及参考答案	(267)
本章知识内容小结	(274)
第七章 无穷级数	(276)
§7.1 无穷级数的概念与性质	(276)
§7.2 常数项级数及其审敛法	(282)
§7.3 幂级数	(294)
§7.4 泰勒公式与泰勒级数 某些初等函数的幂级数 展开式及其应用	(301)
1990 ~ 2001 年考研试题归类精选解析	(314)
同步测试及参考答案	(318)
本章知识内容小结	(323)

第八章 多元函数	(325)
§8.1 空间解析几何简介	(325)
§8.2 多元函数的概念	(330)
§8.3 偏导数与全微分	(338)
§8.4 复合函数和隐函数的微分法	(347)
§8.5 二元函数的极值	(356)
§8.6 二重积分	(368)
1990~2001 年考研试题归类精选解析	(383)
同步测试及参考答案	(391)
本章知识内容小结	(398)
第九章 微分方程与差分方程简介	(402)
§9.1 微分方程的一般概念与一阶微分方程	(402)
§9.2 几种二阶微分方程及二阶常系数线性微分方程	(431)
§9.3 差分方程的一般概念 一阶和二阶常 系数线性差分方程	(446)
1990~2001 年考研试题归类精选解析	(453)
同步测试及参考答案	(457)
本章知识内容小结	(461)
综合模拟试题及参考答案	(463)

第一章 函 数

§ 1.1 集合

知识要点

一、集合的概念和性质

一般说来,集合是具有某种属性的事物的总体,或是一些确定对象的汇总;构成集合的事物或对象,称为集合的元素。

通常,我们用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合,用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合的元素。集合的性质如表 1-1-1 所示。

表 1-1-1 集合的性质

分类	名 称	简要说明
集合的表示法	列举法	$A = \{a, b, c\}$
	描述法	$B = \{x x^2 - 6x + 8 = 0\}$
相互关系	元素与集合之间	$a \in A, b \notin A$
	全集与空集	u, Φ
	集合与集合之间(子集)	$A \subset B, B \supset A$
集合的运算	并	$A \cup B = \{x x \in A \text{ 或 } x \in B\}$
	交	$A \cap B = \{x x \in A \text{ 且 } x \in B\}$
	差	$A - B = \{x x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$
	补	$A' = \{x x \in u \text{ 且 } x \notin A\}$

续表

分类	名称	简要说明
集合运算律	交换律	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
	结合律	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
	分配律	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
	摩根律	$(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$
集合的笛卡尔乘积	集合的笛卡尔乘积	$A \times B = \{(x, y) x \in A, y \in B\}$

二、实数集

1. 数轴

数轴的图形见图 1-1-1。

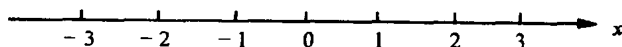


图 1-1-1 数轴

元素都是数的集合,我们称之为数集。常用的数集有:

- ①全体自然数的集合 N
- ②全体整数的集合 Z
- ③全体有理数的集合 Q
- ④全体实数的集合 R

2. 三个概念

与实数集有关的三个概念如表 1-1-2 所示。

表 1-1-2 绝对值、区间和邻域

名称	简要说明	性质
绝对值	$ x = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ 表示在数轴上点 x 于原点之间的距离	$ x \geq 0$
		$ -x = x $
		$ x+y \leq x + y $
		$ x-y \geq x - y $
		$ x \cdot y = x \cdot y $
		$\left \frac{x}{y} \right = \frac{ x }{ y }, y \neq 0$

续表

名称	简要说明	性 质
区 间	开区间	$(a, b) = \{x a < x < b\}$
	闭区间	$[a, b] = \{x a \leq x \leq b\}$
	半开区间	$(a, b] = \{x a < x \leq b\}$ $[a, b) = \{x a \leq x < b\}$
	无限区间	$(a, +\infty) = \{x a < x\}$ $(-\infty, b) = \{x x < b\}$ $(-\infty, +\infty) = \{x -\infty < x < \infty\}$
邻 域	点 x_0 的 δ 邻域	$\{x x - x_0 < \delta, \delta > 0\}$ 即 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
	点 x_0 的 δ 去心邻域	$\{x 0 < x - x_0 < \delta, \delta > 0\}$ 即 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$

§ 1.2 函数

函数是微积分学的研究对象,是贯穿全书的一个非常重要的基本概念,我们必须深刻理解、认真掌握。

知识要点

一、函数的概念

1. 函数定义

若 D 是一个非空实数集合,设有一个对应规则 f ,使每一个 $x \in D$,都有一个确定的实数 y 与之对应,则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系,或称变量 y 是变量 x 的函数,记作

$$y = f(x), x \in D$$

其要点如表 1-2-1 所示。

表 1-2-1 函数定义的要点

函数 $y = f(x), x \in D$	
自变量	x
对应规则	f
因变量	y
定义域	自变量的取值范围 D , 记作 $D(f)$
函数值	$x_0 \in D(f)$ 所对应的 y 值, 记作 y_0 或 $f(x_0)$ 或 $y _{x=x_0}$
值域	全体函数值的集合 $\{y y = f(x), x \in D(f)\}$, 记作 $Z(f)$

因此,定义域和对应规则是函数的两个要素,只有当定义域与对应规则都相同时,两个函数才表示同一个函数。

2. 函数的图形

平面 xOy 上的全集 $\{(x, y) | y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x) (x \in D)$ 的图形。

3. 反函数

设 $y = f(x)$ 是定义在 $D(f)$ 上的一个函数,值域为 $Z(f)$,如果对每一个 $y \in Z(f)$ 有一个确定的且满足 $y = f(x)$ 的 $x \in D(f)$ 与之对应,其对应规则记为 f^{-1} ,那么这个

定义在 $Z(f)$ 上的函数 $x = f^{-1}$ 就称为 $y = f(x)$ 的反函数。

反函数 $x = f^{-1}(y)$ 习惯上常记作 $y = f^{-1}(x)$ ($x \in Z(f)$), 因此 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y = x$ 对称的。

4. 复合函数

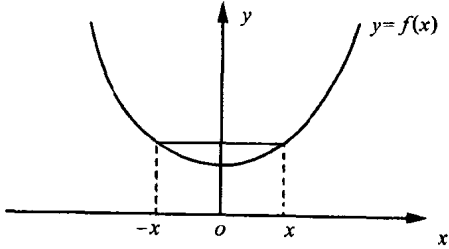
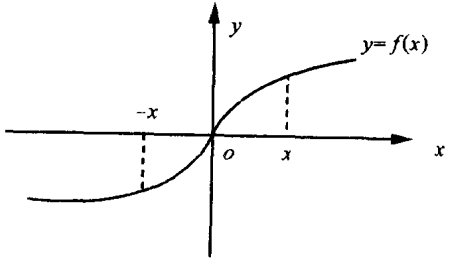
设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 $D(f)$, 若函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 $Z(\varphi)$, $Z(\varphi) \cap D(f)$ 非空, 则称 $y = f[\varphi(x)]$ 为复合函数。

x 为自变量, y 为因变量, u 称为中间变量。

二、函数的性质

函数的性质主要有奇偶性、单调性、周期性、有界性, 如表 1-2-2 所示。

表 1-2-2 函数的性质

性质	定 义	示意图
奇偶性	偶函数 给定函数 $y = f(x)$, 如果对于所有的 $x \in D(f)$, 有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数。	 关于 y 轴对称
	奇函数 给定函数 $y = f(x)$, 如果对于所有的 $x \in D(f)$, 有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数。	 关于原点对称

续表

性质	定义	示意图
周期性	对于函数 $y=f(x)$, 如果存在正的常数 a , 使得 $f(x+a)=f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数. 满足该等式的最小正数 a , 称为函数的周期.	
单调性	单调递增 如果函数 $y=f(x)$ 对区间 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调递增的.	
	单调递减 如果函数 $y=f(x)$ 对区间 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调递减的.	
有界性	设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义. 如果存在一个正数 M , 对于所有的 $x \in (a, b)$, 恒有 $ f(x) \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是有界的.	

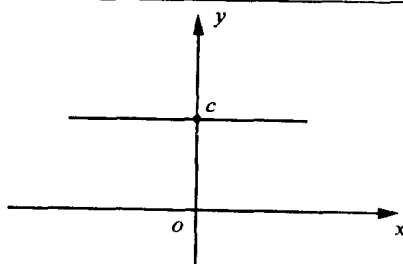
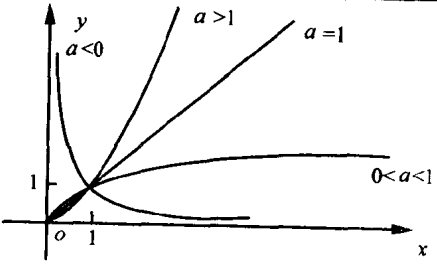
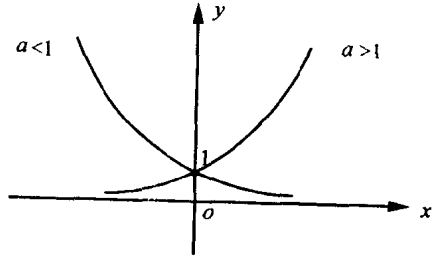
三、初等函数

1. 基本初等函数

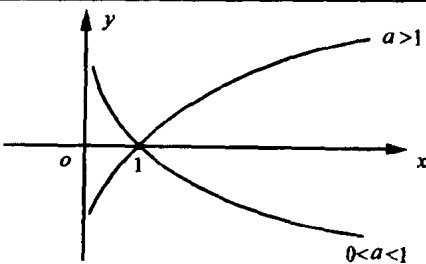
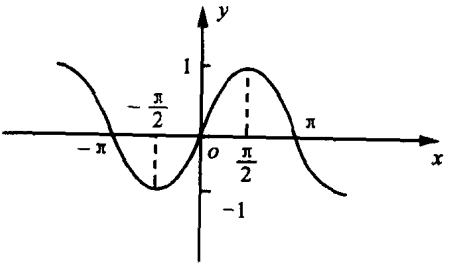
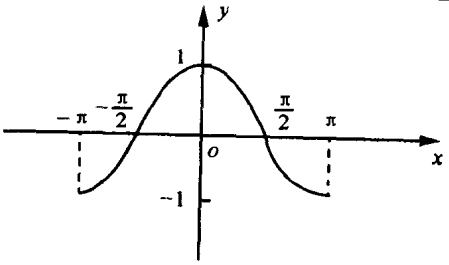
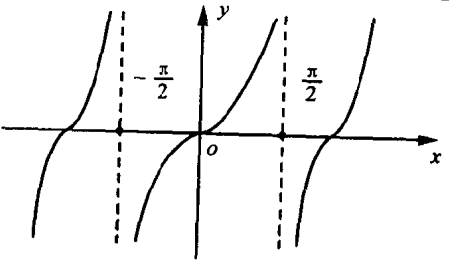
①常数函数 $y = c$; ②幂函数 $y = x^a$; ③指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$; ④对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$; ⑤三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$; ⑥反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x, y = \operatorname{arcsec} x, y = \operatorname{arccsc} x$.

2. 基本初等函数的性质(见表 1-2-3)

表 1-2-3 基本初等函数的性质

名称	定 义	性 质	图 形
常数函数	$y = c$ $x \in (-\infty, +\infty)$	偶函数 周期函数 有界	
幂函数	$y = x^a (a \neq 0)$	在 $(0, +\infty)$ 区间上, 当 $a > 0$ 时, 函数单调递增; 当 $a < 0$ 时, 函数单调递减	
指数函数	$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ $x \in (-\infty, +\infty)$	当 $a > 1$ 时, 函数单调递增; 当 $a < 1$ 时, 函数单调递减	

续表

名称	定义	性质	图形
对数函数	$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ $x \in (0, +\infty)$	当 $a > 1$ 时, 函数单调递增; 当 $0 < a < 1$ 时, 函数单调递减	
三角函数	$y = \sin x$ $x \in (-\infty, +\infty)$	奇函数 周期函数, $T = 2\pi$ 有界, $ \sin x \leq 1$	
	$y = \cos x$ $x \in (-\infty, +\infty)$	偶函数 周期函数, $T = 2\pi$ 有界, $ \cos x \leq 1$	
	$y = \tan x$ $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$	奇函数 周期函数, $T = \pi$	

续表

名称	定 义	性 质	图 形
三角函数	$y = \cot x$ $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$	奇函数 周期函数, $T = \pi$	
反三角函数	$y = \arcsin x$ $x \in [-1, 1]$ $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	奇函数 有界, $ \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$ 单调递增	
	$y = \arccos x$ $x \in [-1, 1]$ $y \in [0, \pi]$	有界, $ \arccos x \leq \pi$ 单调递减	
	$y = \arctan x$ $x \in (-\infty, \infty)$ $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	奇函数 有界, $ \arctan x < \frac{\pi}{2}$ 单调递增	

续表

名称	定义	性质	图形
反三角函数	$y = \arccot x$ $x \in [-\infty, \infty]$ $y \in (0, \pi)$	有界, $ \arccot x < \pi$ 单调递减	

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合所构成的一切函数,统称为初等函数。

四、函数图形的组合与变换

1. 叠加

已知: $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图形。

求: $y = f(x) + g(x)$ 的图形。

方法: 在同一横坐标处将两图的纵坐标叠加起来。

2. 翻转

已知: $y = f(x)$ 的图形。

求: $y = -f(x)$ 的图形。

方法: 在同一横坐标处将 $f(x)$ 的图形的纵坐标改变正负号, 即作与 $f(x)$ 的图形关于 x 轴对儿的图形。

3. 放缩

已知: $y = f(x)$ 的图形。

求: $y = kf(x)$ 的图形 (k 为不等于 0 的常数)

方法: 当 $k > 1$ 时, 在同一横坐标处将 $f(x)$ 的图形的纵坐标放大 k 倍;

当 $0 < k < 1$ 时, 在同一横坐标处将 $f(x)$ 的图形的纵坐标缩小 $\frac{1}{k}$ 倍;

当 $k < 0$ 时, 先进行 $|k|$ 的放缩, 再进行翻转。

4. 平移

已知: $y = f(x)$ 的图形。

求: $y = f(x) + c$ 的图形 (c 为常数)。