科学与工程中的

基本突变理论

〔美〕R·吉尔莫雷 著
湛垦华 刘秉筠 译

西安交通大学出版社

科学与工程中的

基本突变理论

[美]R·吉尔莫雷 著
湛垦华 刘秉钧 译

西安交通大学出版社

内 容 简 介

突变理论是研究不连续与奇点的一门新的数学分支学科，是现代系统科学的重要组成部分。本书是美国著名学者吉尔莫雷1981年所著的突变理论经典名著 Catastrophe Theory for Scientists and Engineers 一书的第一卷Catastrophe Theory for Pedestrians 的中译本，它系统地阐明了基本突变理论的原理部分。

本书可供关注现代系统科学发展的所有自然科学工作者、社会科学工作者以及高等院校有关专业的师生用作教材或教学参考书。

R• Gilmore
Catastrophe Theory for
Scientists and Engineers
John Wiley & Sons 1981

科学与工程中的基本突变理论

〔美〕 R·吉尔莫雷 著

湛垦华 刘秉钧 译

*

西安交通大学出版社出版
（西安市咸宁路28号）
西安交通大学出版社印刷厂印装
陕西省新华书店发行 各地新华书店经售
开本 850×1168 1/32 印张6 字数144千字
1988年12月第1版 1989年2月第1次印刷
印数：1——3000册
ISBN7-5605-0043-9/O·13 定价：3.90元

译 者 前 言

突变理论是研究不连续和奇点的一门新的数学分支学科，它是比利时数学家托姆(R. Thom)在1972年用法文发表的《结构稳定性与形态发生学》(Stabilité Structurelle et Morphogénéss)中首先提出的。发表之初，曾受到某些学者的抨击非难，但托姆坚持自己的研究并扩展了已有的理论成果。经过英国科学家吉曼(E. C. Zeeman)和本书作者、美国科学家吉尔莫雷(R. Gilmore)等人的充实发展，特别是当把它从物理、化学等“硬”科学推广应用到生物、社会科学等“软”科学的广大领域，取得意想不到的成功之后，现在已基本上为全世界的科技工作者所接受，并得到极高的评价。有人认为：突变理论的出现是自牛顿、莱布尼兹创建古典分析数学微积分以来的又一次智力革命，是用精密的数学工具描述生物学与社会科学等各种复杂现象学科的一次突破性推进。1977年出版的《大英百科年鉴》赞扬突变理论的诞生意味着人类又多了一个新的战胜愚昧无知的珍奇武器，提供了又一种观察宇宙的深邃见解。我国社会科学界现时流行着所谓“旧三论”、“老三论”、“新三论”的说法，他们把19世纪建立马克思主义的自然科学三大基石，即细胞学说、能量转换与守恒定律、生物进化论，称为“旧三论”，把20世纪40年代由贝塔朗菲建立的一般系统论、由申农建立的信息论、由维纳建立的控制论并称为“老三论”，把70年代发展起来的普利高津的耗散结构理论、哈肯的协同学说和托姆的突变理论合称为“新三论”。我

们曾在其它文章中指出过“三论”这种提法是不太合适的。但他们把突变理论提到与那些曾给人类进步与科学思维发展带来巨大变革的学说并列的高度，这是看得很正确的。若把上述评论与赞扬中的夸张部分排除掉，而注意它们的实质和核心，即突变理论在数学科学发展中的地位，它对科学技术特别是在生物学与社会科学等“软”科学应用中的作用，以及带给人类科学思维的启迪，那么突变理论确实是值得我们刮目相看的，把它与进化论、耗散结构理论等并列是当之无愧的。

突变理论是在集合、拓扑、微分几何、群论与流形等现代分析数学基础上发展起来的。它本身有两种描述形式，一种是直接用现代分析数学的形式来描述，称为高等突变理论；另一种是建立在现代分析数学思想的基础上，但借用古典分析数学做工具来描述，称为基本突变理论。由于高等突变理论对于我国广大只学习过古典分析数学的科技工作者显得过于高深，而对于解决一般的应用问题，基本突变理论已经足够了，因此在进入突变理论学习与应用之初，掌握基本突变理论就可以了。近年来，国际上陆续出版了几种有关突变理论的专著和通俗性读物，吉尔莫雷于1981年出版的专著《科学与工程中的突变理论》(Catastrophe Theory for Scientists and Engineers)一书，由于它理论阐述系统，数学推证严谨，图文并茂，应用实例收集广泛，占有了一个突出的位置。近3年来，我们选它作为理论物理、生物物理和生物数学等专业的研究生和进修生的教材，顺便把它翻译了出来，并于1986年暑假印成打字油印本，作为在大连举办的系统科学暑期讨论班的教材。现在正式出版发行的是吉尔莫雷这本书的第一部分，即Catastrophe Theory for Pedestrians的中译本。它是可以独立成书的，因为它把基本突变理论作了系统的阐述，而正如上面指出的，掌握基本突变理论对于绝大多数科技工作者已经足够。为了把这部分单独出版的需要，我们把本书定名为《科学与工程

中的基本突变理论》。

1987年是牛顿发表其名著《自然哲学的数学原理》的300周年。牛顿建立的力学原理，他与莱布尼兹分别创建的古典分析数学微积分，以及他的哲学思想，曾光照科技界近300年。小至原子分子，大至银河宇宙，都可借助古典分析数学，建立起在一定范围内适用的、描述它们行为的定量方程。由它们的“现在”，可在一定精确程度上推知它们的“过去”与“将来”的“轨迹”。可以预见到，牛顿的学说今后还将给人类作出不可磨灭的贡献。但牛顿的力学原理也好，其数学表述工具古典分析数学也好，他的哲学思想也好，都是以连续的、光滑的渐变现象作为研究对象，都内含着由演化的始端可以推求出演化的终结，或者由终结可以推求出始端这样一种可逆性与单一“轨迹”的决定论思想。在人类发展，自然演化和社会现象中，这种连续、光滑、渐变的可逆情况确实是大量存在的。但是在这些现象中，还存在着另一类情况，即不连续(间断)的突变现象，如冰溶、水沸，细胞分裂，火山爆发，台风骤至，铁磁转变，波形破碎，生物两边界面组织的迥异，桥梁的突然倒塌，人与动物的休克以至死亡，股票市场行情的暴涨暴跌，战争与和平的场景由于偶发事件的介入而突然改观，一场大革命使一种落后的社会形态迅速转化为另一种先进的社会形态，如此等等，都属于突变现象。一切相变，不管是1级相变，2级相变，甚或n级相变，不管是平衡态相变，还是非平衡态相变，其实都是系统某些性质的突变。

300年来，人们在应用与发展牛顿的古典分析数学的同时，也曾注意过不连续与突变的研究，提出了一些描述不连续与突变的数学方法。比如将不连续函数展开成傅里叶级数，对激波类现象采用偏微分方程描述，提出了李雅普诺夫判别法等。但这些方法的基础仍然是古典分析数学，并未脱离牛顿哲学的决定论思想。而突变现象往往不是决定论性的，常带有偶发、随机与系统

论性的特征，这就迫使我们必须寻求非牛顿的方法。

托姆突变理论的数学方法有着许多不同于牛顿古典数学分析方法的特征。首先，它建立在集合、拓扑、群论与流形等现代分析数学的基础之上，本身就内含有随机与现代系统论性的基质，因而引人注目；其次，它着重研究连续性作用可导致系统不连续突变的现象，即研究其导因可以是连续性作用，而引导出的却是不连续性突变结果的一般机制，它直接处理不连续性突变而不用涉及任何特殊的内在机制，也就是说，它特别适用于研究那些内部结构尚属未知的系统；第三，它同时可以预测系统的许多定性特性，而不用事先知道描述此系统的这些状态要用一些什么样的微分方程，也不用事先知道怎样去解这些微分方程，它往往只要利用有限的、少数几个假设，就可以达到预测的目的，而且，这些假设还并不是限制性的。

80 年代以来，世界上科学研究的群体意识正发生着戏剧性的变化，人们正以对现实世界的“简单性”认识，转向对“复杂性”的探索。从牛顿到爱因斯坦，科学研究的一个突出特征是认为我们面对的世界是可逆的、稳定的、决定论性的世界，大千世界是由少数几个“简单的”规律所决定的。人们用“分析”的方法，把研究对象分解为各种“简单的”，如基本粒子、原子、分子、器件等元素来进行研究，通常认为只要把这些简单元素的性质弄明白了，掌握了它们之间的少数几个统一的规律，则现实世界就将为我们所洞察，这就是所谓的现实世界“简单性”的概念，或者称为单粒子科学研究方法。这样的分析方法对 300 年来的科学进步确实作出了巨大的贡献，但越来越多的事实和科学发现不断地冲击着现实世界“简单性”的概念。事实证明，我们面对的世界还有“复杂性”的一面，它也是一个充满着涨落、不可逆、非稳定、随机性的多元化世界，为此我们必须引入许多新概念、新方法和新的研究工具，才可能揭开这个“复杂性”世界的秘密，我们现

在常把这种全新的"综合"研究路线称为现代系统科学研究方法，它有着许多与300年来采用的单粒子科学研究方法不同的新特点。近10年来，在非平衡态自组织理论和现代动力理论两个方面，以普利高津学派等为代表的世界科学群体，在对"复杂性"的探索中，已取得一些重大进展，揭示出了不同领域内一大批复杂性现象的惊人相似性，找出了一些普适性规律，提供了一些崭新的研究方法和路径，同时也给我们的科学思维带来许多新的启迪。在对"复杂性"的探索中，关键点之一是事物演化中存在奇点与分歧，在某种程度上甚至可以说，正是由于它们的存在才引出了进化树与复杂性。而托姆的突变理论正是描述奇点与分歧的一把金钥匙，因此托姆的突变理论自然地成为探索"复杂性"的现代系统科学的一个不可分离的重要组成部分。原则上说，由托姆的突变理论可以给出任何维空间中系统演化的全部形式各异的众多奇点和分歧情况，给它们以精确的数学表述形式，使我们对奇点与不连续等"复杂性"的研究变得简单而标准化。特别在维数较少的情况下，他给出了标准化的基本突变表，指出只要系统外的控制参数的个数n不超过5($n\leqslant 5$)，则按等价性分类可以证明，系统此时最多只有11种突变类型；而当控制参数的个数n不超过4($n\leqslant 4$)，就只有7种基本突变类型，即所谓折叠型突变、尖顶型突变、燕尾型突变、蝴蝶型突变、双曲脐点型突变、椭圆脐点型突变、抛物脐点型突变。

突变理论还是一门发展中的学科，它正在与其它学科的结合与交叉中发展，在广泛的应用过程中发展。它的发展与应用的前景都是十分深广的。

本书第一、二、三、四、九章由湛垦华翻译，第五、六、七、八章由刘秉钧翻译。吴寿锽副教授细心地校阅了全部译稿，使译文增色不少，他还作为责任编辑承担了本书所有繁杂的编辑工作。是蒋大宗教授的鼓励，徐晓宙同志和西安交通大学出版社的同志

们的帮助，才使本书得以顺利出版。对他(她)们的鼓励和帮助，我们在这里谨致谢忱。

译　者

1988年3月

目　　录

第一章　突变理论的纲领

突变理论在很大程度上和费列克斯•克莱因(Felix Klein)的埃尔兰根纲领(Erlangen Program)一样，是一个数学纲领。埃尔兰根纲领舍去几何学不变量，用对变换群归类的方式企图将几何学进行分类。突变理论试图去研究方程的解是如何依赖于该方程中参数的定性性质的。

为了具体说明突变理论的纲领，我们来考察定义于空间 $\mathbf{R}^N$ 中，其坐标为 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 的 n 个方程的解 $\psi_1(t,x;c_\alpha)$，$\psi_2(t,x;c_\alpha)$，$\cdots$。此方程组为

$$F_i\left(\psi_j;c_\alpha;t,\frac{d\psi_j}{dt},\frac{d^2\psi_j}{dt},\cdots;x_l;\frac{\partial\psi_j}{\partial x_l},\frac{\partial^2\psi_j}{\partial x_l\partial x_m},\cdots;\int dx_l,\cdots\right)=0 \tag{1.1}$$

其中

$$1\leqslant i\leqslant n$$
$$1\leqslant l,m\leqslant N$$
$$1\leqslant \alpha\leqslant k$$

变量 x_l 和 t 可以简便地看成是空间和时间的坐标。由于解 ψ_j 描述的是某一系统的状态，因此称为**状态变量**。假设方程组 $F_i=0$ 依赖于 k 个参数 c_α（比如雷诺数、精细结构常数、磁场等)。因为参数 c_α 可以控制解 ψ_j 的定性性质，因此被称为**控制参数**。

要想确定方程组(1.1)的解，是个异常艰难的问题，更不用说去研究这些解是如何随控制参数 c_α 变化而变化的了。但我们通过采用一系列的简化假设，使这个问题变得较易处理还是可能的。

1. 方程(1.1)在普遍情况下可能是一个积分—微分方程(或更复杂些)，现在假设它实际上并不含积分。我们假设方程(1.1)事实上仅是一组(非线性)偏微分方程。要去求取这些方程的解，对于突变理论的纲领还是太困难了。

2. 我们进而作这样的简化假设，即方程组中不包含任何阶的空间导数：

$$F_i=F_i\left(\psi_j;c_\alpha;t,\frac{d\psi_j}{dt},\frac{d^2\psi_j}{dt^2},\cdots;x_l;-;-\right) \tag{1.2}$$

要对这个方程组进行任何解释仍然是太困难了。

3. 我们再进一步简化。假设这些方程组完全不依赖于空间坐标：

$$F_i=F_i\left(\psi_j;c_\alpha;t,\frac{d\psi_j}{dt},\frac{d^2\psi_j}{dt^2},\cdots;-;-;-\right) \tag{1.3}$$

然而，我们对这样的方程组的解一般来说仍然不能解决。

4. 再进而作这样的简化假设，即出现在(1.3)式中的时间导数不高于一阶，而且我们假设时间导数以简化函数的特殊形式(“正则”形式)出现：

$$F_i=\frac{d\psi_i}{dt}-f_i(\psi_j;c_\alpha;t) \tag{1.4}$$

这种类型的方程组($F_i=0$)称为**动态系统**。要去研究它们同样是很困难的。

5. 我们继续简化。假设(1.4)式中的函数 f_i 与时间无关。所得方程组

$$F_i=\frac{d\psi_i}{dt}-f_i(\psi_j;c_\alpha;-)=0 \tag{1.5}$$

称为**自控动态系统**。几个有用且有效的论述能运用于自控动态系统，它依赖于少数几个控制参数($k\leqslant4$)。

6. 在完成了这么一长串简化之后，可以看出函数 f_i 在很多

场合下看来类似于一个力的分量。当这个力能由一个势导出时，在经典力学中会给出令人惊奇的简化结果。当所有的力都能由某个势函数 $V(\psi_j; c_\alpha)$ 的负梯度(对 ψ_i 而言)导出时，则有

$$f_i = -\frac{\partial V(\psi_j;\ c_\alpha)}{\partial \psi_i}$$

$$F_i = \frac{d\psi_i}{dt} + \frac{\partial V(\psi_j;\ c_\alpha)}{\partial \psi_i} = 0 \tag{1.6}$$

此方程组称为一个**梯度系统**($\dot{\psi} = -\nabla_\psi V$)。对于这种系统，我们可给出大量的讨论结果。

7. 特别使人有兴趣的情况当然是动态和梯度系统的平衡情况 $\frac{d\psi_i}{dt} = 0$。一个梯度系统的平衡态 $\psi_j(c_\alpha)$ 由方程

$$\frac{\partial V(\psi_j;\ c_\alpha)}{\partial \psi_i} = 0 \tag{1.7}$$

所定义。此方程可能无解[$V(\psi) = \psi$]，有一个解[$V(\psi) = \psi^2$]，或有多个解[$V(\psi; c) = \psi^4 + c\psi^2$，当 $c > 0$ 时有一个解，当 $c < 0$ 时有三个解]。对于梯度系统的平衡及这些平衡如何依赖于控制参数 c_α，是可能给出大量有用且令人兴奋的讨论结果的。

基本突变理论就是研究 $V(\psi_j; c_\alpha)$ 的平衡态 $\psi_j(c_\alpha)$ 是如何随控制参数 c_α 的变化而变化的。

上述讨论的情况可概括为表 1.1。

表 1.1 基本突变理论系列

简化假设	方程 $F_i = 0$ 的结构形式	注
0	$F_i\left(\psi_j; c_\alpha; t, \frac{d\psi_j}{dt}, \frac{d^2\psi_j}{dt^2}, \cdots; x_l; \frac{\partial \psi_j}{\partial x_l}, \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x_l \partial x_m}, \cdots; \int dx_l, \cdots\right)$	
1	$F_i\left(\psi_j; c_\alpha; t, \frac{d\psi_j}{dt}, \frac{d^2\psi_j}{dt^2}, \cdots; x_l;\right.$	

	$\frac{\partial\psi_j}{\partial x_l},\frac{\partial^2\psi_j}{\partial x_l\partial x_m},\cdots;—)$	
2	$F_i\left(\psi_j;c_\alpha;t,\frac{d\psi_j}{dt},\frac{d^2\psi_j}{dt^2},\cdots;x_l;—;—\right)$	
3	$F_i\left(\psi_j;c_\alpha;t,\frac{d\psi_j}{dt},\frac{d^2\psi_j}{dt^2},\cdots;—;—;—\right)$	
4	$F_i=\frac{d\psi_i}{dt}-f_i(\psi_j;c_\alpha;t)$	动态系统
5	$F_i=\frac{d\psi_i}{dt}-f_i(\psi_j;c_\alpha;—)$	自控动态系统
6	$F_i=\frac{d\psi_i}{dt}+\frac{\partial V(\psi_j;c_\alpha)}{\partial\psi_i}$	梯度系统
7	$0=0+\frac{\partial V(\psi_j;c_\alpha)}{\partial\psi_i}$	梯度系统的平衡态

表 2.1 函数分析的三个重要结果

	条 件	$V \doteq$	方程	定理/引理	文献发表日期
1.	$\nabla V \neq 0$	y_1	(2.1)	隐函数定理	
2.	$\nabla V = 0$,但$\det V_{ij} \neq 0$	$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$	(2.2a)	莫尔斯引理	1931,2.
		$M_i^n(\tilde{y})$	(2.2b)		
3.	$\nabla V = 0$和$\det V_{ij} = 0$,	$f_{NM}(y_1, \cdots, y_i) + M_i^{n-1}$	(2.3a)	分裂引理	1969,3.
	V“一般”	$CG(l) + M_i^{n-1}$	(2.3b)	托姆定理	早于1960,4.
	$k \leqslant 5$	$\mathrm{Cat}(l, K) + M_i^{n-1}$	(2.4)	托姆定理	早于1960,4.