中　國
工程師手册

機　械　類

上

第四篇
工　程　力　學
目　　錄

頁

〔I〕 靜力學

第一章　基本原理

第二章　力系之合力

第三章 力系之平衡

第四章 平面力系之圖解法

第五章 摩 擦

第六章　重心與慣性矩

第七章　虛功原理

〔II〕 動力學

第八章 基本原理

第九章 運動學

第十章 力與加速度

第十一章　功與能

第十二章　衝量與動量

第十三章　機械振動

第十四章 均 衡

第四篇
工 程 力 學
謝 承 裕
〔I〕 靜 力 學
第一章　基本原理

1·1　力　學

力學為研究力與運動之科學，而視靜止為運動之一種特狀態。其內容，為討論方便，通常可分為下列二部分：

靜力學　研究受力物體之平衡條件。物體平衡時，或為靜止，或為等速度運動。

動力學　研究物體之運動及影響運動的因素間之關係。動力學中專論物體運動，即空間與時間之關係，而不計及影響因素部分，稱為運動學。

1·2　剛　體

一個物體，倘體內各點間之距離始終保持不變者，稱為剛體。剛體為理想化的物體，因宇宙間任何物體，受力後必然發生形狀大小的改變，只是變形有程度不同而已。實際的物體，倘其變形與其本身大小相比。為十分微小，而可略去不計時，則可視為剛體。

1·3　力

力為改變物體之靜止或運動狀態之作用。

力之要素　力對物體之效應，須視下列三項而定：(1)力之大小，(2)力之方向，(3)着力點，此三者名為力之要素。

力之單位　要表示力的大小，須選取一標準力作為單位。工程中通常以作用於某一標準物體在地面上某一固定位置時之重力，作為力之單位常用者有公斤、公克等。所謂一公斤，即是存放在巴黎國際度量衡局的一塊鉑一鈦合金（稱為標

準仟克）所受之重力。作用於一物體之重力隨其所在位置（高度與緯度）而稍有改變，但在大多工程計算中，重力之細微改變，可以略去不計。

力之向量表示法　力爲有大小與方向之量，故爲一向量。表示一力，可用一附有箭頭之直線線段爲代表。線段之長度，按適當比例，代表力之大小；線段之方向與力之作用線平行；線段所附箭頭，代表力之指向。

1·4　力　系

作用於物體上之若干個力，合爲一力系。一力系中各力之作用線如均相交於同一點，名爲共點力系，否則爲非共點力系。如各力之作用線均在同一平面上，則名爲共面力系，否則爲非共面力系。如各力之作用線均互相平行，則名爲平行力系，否則爲非平行力系。如各力之作用線均在同一直線上者，則名爲共線力系。

等效力系　兩個力系分別作用於同一物體而生相同效應者，名爲等效力系。一力系之最簡等效力系，名爲力系之合力。使一力系轉變爲較簡單之等效力系，名爲力之合成；反之使力系擴變爲較繁複之等效力系，名爲力之分解。

平衡力系　一力系之合力爲零，對所作用之物體不生效應者，名爲平衡力系。受此種力系作用之物體，名爲平衡之物體。作用於靜止物體之力系，必爲一平衡力系。

1·5　可傳性原理

作用於剛體之力，其着力點可沿其作用線任意前後移動，而不改變其對剛體之效應，稱爲可傳性原理。但此項原理只適用於剛體如平衡或運動等問題上，不適用於彈性體或其他可變形物體上。

1·6　平行四邊形定律

求互相交力之合力，可用平行四邊形定律。此定律爲力之合成與分解所根據之基本原理，可述之如下：

經過一點，以同一比例畫出二向量，分別代表二共點力；以此二向量爲相鄰二邊，作平行四邊形，則經該點之對角線，即爲代表二力之合力。

設有二共點力 P 與 Q，今於一點 O 作向量 OA 與 OB，其長度與方向各代表 P，Q 二力之大小與方向，作平行四邊形 $OACB$，如圖 1.1 (a) 所示。則向量

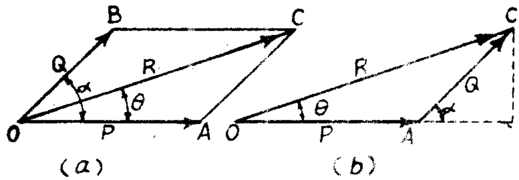

圖 1.1

OC 即代表合力 R 之大小與方向。

三角形定律　圖 1.1 (a)中之 AC 線，亦代表 Q 力之大小與方向。故如連續畫出代表 P 與 Q 二力之向量，首尾相銜，以此二向量爲三角形之二邊，則自第一向量之起點至第二向量之終點所畫出之第三邊，即代表 P 與 Q 二力合力 R 之大小與方向，示如圖 1.1 (b)，此所謂三角形定律。

合力之代數式　二共點力之合力 R 之大小與方向，由圖 1.1 (b)，可以方程式表示如下：

$$R=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha} \tag{1.1}$$

$$\tan\theta=\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha} \tag{1.2}$$

式中 α 爲 P，Q 二力作用線之夾角，θ 爲合力 R 與 P 力作用線所成之角。如 P 與 Q 之作用線互相垂直，$\alpha=90°$，如圖 1.2 所示，則可得

$$R=\sqrt{P+Q^2} \tag{1.3}$$

$$\tan\theta=\frac{Q}{P}\text{，}\quad\text{或}\qquad\cos\theta=\frac{P}{R} \tag{1.4}$$

如 P，Q 二力之作用線相重合：當二力方向相，則 $R=P+Q$；當二力方向相反，則 $R=P-Q$。可知二共線力之合力，爲二力之代數和。以上結論可推廣至一般共線力系，其合力爲各力之代數和。當 P，Q 二力方向相反，而又大小相等，則 $R=P-Q=0$。由此可得一結論：作用於物體上的二力，如大小相等，方向相反，且又共線，則二力之合力爲零，亦即二力互相平衡。

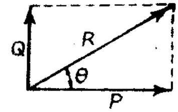

圖 1.2

1·7　力之分解

如將平行四邊定律或三角形定律之手續逆轉，可將一力分解爲二分力。例如

圖 1.3 (a)中，W代表M之重量，即作用物體M之重力。茲欲將W分解爲各沿 DE 與 DG 作用之二分力。可另作三角形如圖 1.3 (b)：引 AC 線與W平行，其長度以某一比例代表W之大小。經A引 AB 線平行於 DE，經C點引 CB 線，平行於 GD，二線相交於 B；則 AB 與 BC 二向量即代表W之二分力 P 與 Q 之大小與方向。至二分力之作用線，應在W之作用線上相交，如圖 1.3 (c)所示。

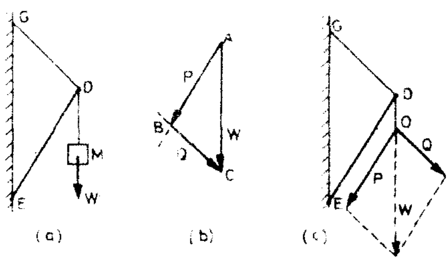

圖 1.3

分解一力爲二正交分力　力之分解最常見之情形，爲將一力分解爲二互相垂直之分力，圖 1.4 中，F 爲與 x 軸成 θ_x 角之力，則其沿 x 與 y 軸向作用之分力 F_x 與 F_y 各爲：

$$F_x = F\cos\theta_x \quad 與 \quad F = F\sin\theta_x \qquad (1.5)$$

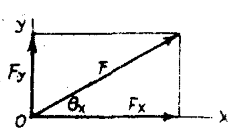

圖 1.4

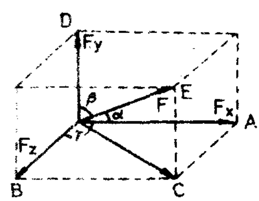

圖 1.5

分解一力爲三正交分力　將平行四邊形定律稍加引伸，即可將一個力分解爲互相垂直的三個分力。例如：圖 1.5 中，OE 所代表之力 F 可先分解爲二正負分力 OD 與 OC；OC 又可分爲二正交分力 OA 與 OB。在 x，y，z 三軸向的分力，其大小各爲

$$F_x = F\cos\theta_x \quad F_y = F\cos\theta_y \quad F_z = F\cos\theta_z \tag{1.6}$$

1·8　二平行力之合力

當二力平行時，不能直接以平行四邊形定律求其合力，但可如圖 1.6 所示方式以求合力。在圖中，同向平行之 P，Q 二力，分別作用於 A，B 二點。在此兩點，沿連線方向，作一對大小相等方向相反之力 S。此一對力之作用可互相抵銷，因此不影響原有 P，Q 二力之作用。然後利用平行四邊形定律，分別求 P 與 S 之合力 P_1，及 Q 與 S 之合力 Q_1。將 P_1 與 Q_1 之着力點同移至交點 D，再各分解爲 P 與 S 及 Q 與 S 二組分力，如圖 1.6 所示。消去在 D 點之一對 S，可得合力爲在經 D 點之共線力 P 與 Q。可知二同向平行力之合力，爲二力之和

$$R = P + Q \tag{1.7}$$

由圖 1.6 顯然可知，合力之方向與二力原方向相同。合力之作用線，通過 A，B 間連線上之 C 點，由幾和關係可得

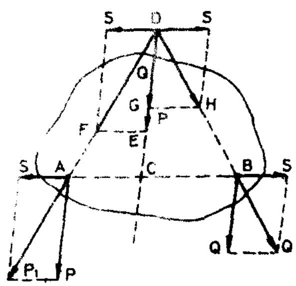

圖 1.6

$$AC : BC = Q : P \tag{1.8}$$

當 P 與 Q 之方向相反時，可用上述類似方式，求得合力爲 P 與 Q 之差，設 $P > Q$，則

$$R = P - Q \tag{1.9}$$

合力作用線通過 A，B 連線上之一點 C，而有如下關係

$$AC' : BC' = Q : P \tag{1.10}$$

但 C' 點不在 A，B 兩點之間，而在 P 點外側。

當 P 與 Q 方向相反，而大小相等（但不共線）時，則上述方式無法求出合力 R，並可證明如此二力已爲最簡之力系，不能以一個力代替其作用。

1·9　作用與反作用

物體平衡（或運動）時，常受到若干限制其運動之作用，稱為拘束。例如物體於水平地面上，即受地面之限制，而不得垂直向下運動，於是地面即構成一項拘束。受到拘束的物體，當外力作用時，一般均有壓力施於其支點。物體對於支點之任何壓力，必產生支點對物體大小相等之反壓力。作用與反作用，大小相等，方向相反。此即所謂牛頓第三運動定律。

1·10　力　矩

力矩係代表力使一物體繞一線或軸之旋轉趨勢。若軸與力之作用線垂直，則力矩為力之大小與力之作用線至軸線間垂直距離之乘積。故圖1.7中，F力對YY軸之力矩為Fd。由於YY與F力作用平面M之交點O，對F力作用線之距離亦等於d，故力矩Fd亦可視為F力對O點之力矩。O點名為力矩中心，距離d名為力臂。力對平面內某點之力矩，如其旋轉方向為反時針方向，慣例視為正力矩，反之為負。一力對一軸之力矩，如自軸之正端觀之，反時針方向旋轉者為正，順針方向者為負。因力矩為力與距離之乘積，故其因次式為（FL），常用之單位有公斤‧公尺（kg-m），公斤‧公分（kg-m）等。

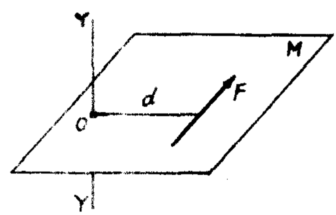

圖1.7

力之作用線如不與力矩軸垂直，可將此力分解為二分力，一與軸平行，另一與軸垂直。與軸平行之力，無使物體繞軸旋轉之趨勢，其力矩為零。故一力對一軸之力矩，即等於與軸垂直之分力之力矩。圖1.8中，F力對OX軸之力矩M_x為$-F_y\cdot d$，對OY軸之力矩M_y為$F_x\cdot d$，對OZ軸之力矩M_z則等於零。

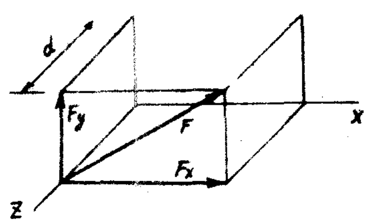

圖1.8

1·11　力矩原理

任何力系之合力對於任一點或任一軸之力矩，等於力系中各力對同點或同軸

之力矩之代數和。應用此一原理於二共點力系，即爲萬律農(Varignon)定理。圖1.9中，R爲二共點力P與Q之合力，O爲作用面上任一點，自O至R，P，Q 三力作用線之垂直距離各爲r，p，q，則可證明

$$R\cdot r=P\cdot p+Q\cdot q \qquad (1.11)$$

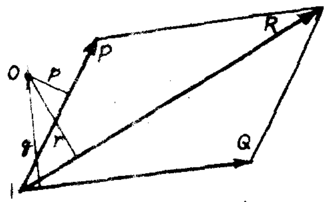

圖 1.9

1·12 力偶

大小相等，方向相反，而作用線不相同之二平行力，名爲力偶。一力偶不能化爲更簡單之力或力系。力偶之作用在使物體發生旋轉，或阻止其旋轉。力偶對於平面內任一點（或與平面垂直之任一軸）之力矩，爲二力對該點（或軸）之力矩之代數和。此爲一常數，與力矩中心（或軸）之位置無關，其值爲力偶之任一力與二力間之距離（即力臂）之乘積，亦即圖1.10中之$\bar{P}\cdot p$，名爲力偶之力矩。力偶之力矩如爲反時針方向者，慣例視爲正值，否則爲負。力偶之單位與力矩同，即公斤·公尺（kg-m），公斤·公分（kg-cm）等。

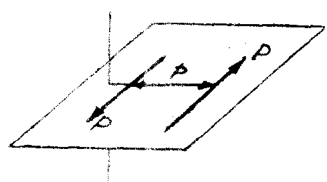

圖 1.10

一力偶對於剛體之效應，須視下列三項條件而定：(1)力偶力矩之大小，(2)力偶之旋轉方向，(3)力偶作用面之傾度。此三者名爲力偶之要素。

力偶可有多種變換而不改變其對剛體之效應，即(1)力偶可在其所作用之平面內任意移動或旋轉，(2)力偶可由一平面移至任一平行平面，(3)如維持力矩之值不變，則力偶之力與二力間之距離可任意更改。

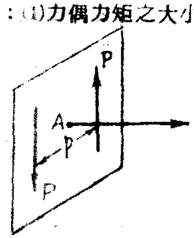

圖 1.11

1·13 力偶之向量表示法

力偶爲向量，可用一附有箭頭之直線線段表示之：線段之長度，依照比例，代表力矩之大小；線段之方向，與力偶之作用平面相垂直，可代表力偶之方向；箭頭之指向代表力偶之旋轉方向，慣例自箭端觀向箭尾，力偶轉向應爲反時針方向，即正向。如以一力偶作用於一右螺旋，則箭頭方向應與螺旋前進方向相同。圖 1.11 中，AB 與力偶 Pp 之作用平面垂直，而 AB 之長度以某一比例尺代表 Pp 之值，則向量 AB 即完全代表力偶 Pp 。

1·14　分解一力爲一力及一力偶

圖 1.12 (a) 中，P 爲作用於物體上 A 點之一力。如於任一點 O 加上與 P 力平行之二共線力 P_1 與 P_2，方向相反，大小均與 P 力相等，如圖 1.12 (b)，則由於此二共線力之效應互相抵消，對物體並無作用，故 P，P_1 及 P_2 三力與原有單獨之 P 力完全相等。但此三力可視爲經 O 點之 P_1 力（與原有 P 力大小相等，互相平行，並同一指向），及一力偶 $P\cdot p$（其力矩與原有 P 力對 O 點之力矩相同）。但組成力偶之 P 與 P_2 二力之大小與作用線，則可依照力偶變換方法，任意改變，示如圖 1.12 (c)。

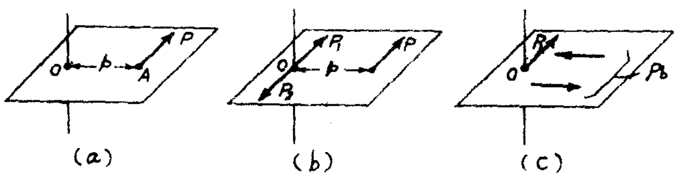

圖 1.12

一力可分解爲同平面中之一力偶與另一力，反之，作用於同平面之一力與一力偶，亦可合併爲一力。因力偶可以變換，使其二力之一適與原有力共線，並大小相等，方向相反，而互相抵消。故僅剩餘力偶之另一力，其大小方向均與原有之力相同。是知一力加上同平面一力偶之效果，是使此力之作用線移至另一平行位置，力之大小與指向均不改變。

1·15　分離體

在力學問題中，常有若干物體相互間有約束之作用存在。例如梁架在柱上，軸支於軸承上。如將其中一個物體與其餘的物體相隔離，而代之以其餘物體的作

用力，則將不影響此一物體原有之靜止或運動狀態。此一原則，稱爲分離體原則；此一單獨隔離之物體，稱爲分離體。

例如在圖 1.13(a)中，一均質圓柱，重 50 kg，半徑 10 cm，支以光滑平面 OA，與光滑斜桿 OB。桿 OB 下端用一光滑鉸鏈與垂直牆壁連於 O 點，上端用一軟繩 AB 連於牆之 A 點，OB 與 AB 之重量均可略去不計，茲分別以圓柱及以桿 OB 與繩 AB 之一部分爲分離體作分離體圖如下：

有力作用於圓柱之物體，共有三個，即地球，直壁，與斜桿；故分離體圖之力應有三個。因各接觸面均假定爲光滑，故直壁作用於圓柱之 P 力，應與直壁垂直，而成水平；同理，斜桿作用於圓柱之 Q 力，應與 OB 垂直，圖 1.13(b) 即爲圓柱之分離體圖。除圓柱外，其他物體均未畫出（所加虛線，僅作決定力作用線時之用），而代以作用於圓柱之各力。

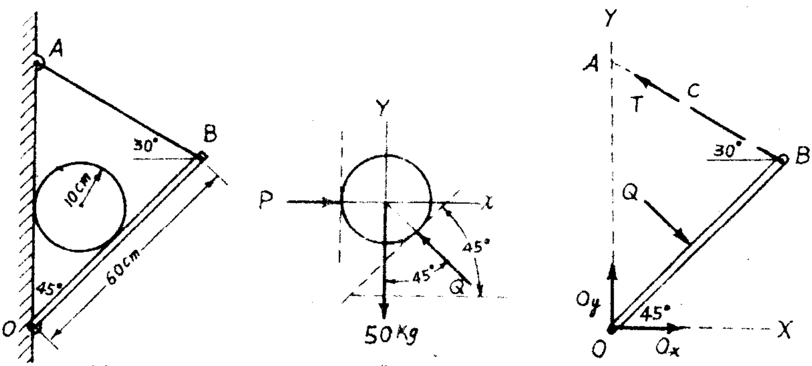

圖 1.13

斜桿 AB 與繩之一部分之分離體圖，示如圖 1.13(c)。假想用一平面將繩在 C 點切斷，除去繩之左上段，而代以左段繩作用於分離體 OBC 之力 T；因假定繩爲完全柔軟，故 T 力之作用線與 AB 繩相重合，而與水平成 30° 角。如此，則有力作用於分離體 OBC 之物體共有三個，即繩之左上段，圓柱，及 O 點之鉸鏈。故作用於此分離體之力亦有三個，即 T，Q（與 OB 垂直），及銷釘 O 之壓力；O 點壓力之大小與方向均爲未知，故用二正交分力 O_x 與 O_y 表示之。

第二章　力系之合力

2·1　力系之分類

由力系中各力作用線之構成情形加以區分，力系可分類如下：

- 力系
  - 共面力系
    - 共點力系
      - 平行力系（共線力系）　（力）
      - 非平行力系　（力）
    - 非共點力系
      - 平行力系　（力或力偶）
      - 非平行力系　（力或力偶）
  - 空間力系
    - 共點力系　非平行力系　（力）
    - 非共點力系
      - 平行力系　（力或力偶）
      - 非平行力系　（力或力偶或力與力偶）

頁右括弧中之“力”，“力偶” 等字，乃指各該力系合成之結果，將在以下各節中討論。

2·2　共線力系

設有共線力 P 與 Q，指向相同，則其合力為 P 與 Q 之和，其指向與 P，Q 同。設 P 與 Q 指向相反，而 P 力大於 Q，則其合力為二力之差，指向與較大之 P 力相同。此項結果，由日常經驗即可知其正確，同時亦可由平行四邊形定律推論得之。故任何二共線力之合力為一個力，其大小與指向均可以二力之代數表示之。二力之合力又可用同法與第三個力合併，以至第四個力合併，依次類推，至全力系合併為一個力為止。故共線力系之合力為一個力，其大小為各力之代數和。

$$R = \Sigma F$$

R 之指向則由 ΣF 之正負號決定之。

2·3　共面共點力系

設有一共面共點力系，例如圖 2.1 所示之 F_1，F_2，F_3 與 F_4。O 為各力之共同交點，稱為匯集點。經 O，作直角座標軸 Ox 與 Oy。將每一力分解為二正交