

动态系统的计算机控制

吴沛容 编

哈尔滨工业大学出版社

动态系统的计算机控制

吴沛容 编

哈尔滨工业大学出版社

内 容 提 要

本书主要讲述以微计算机作为控制器的动态系统的分析和设计方法。其内容包括：离散系统的数学基础；离散系统的特性分析；以微机作为数字控制器的控制系统的各种模拟化和离散化设计方法以及数字控制器实现中的一些理论问题。书中主要研究对象是单输入、单输出的线性动态系统，但对多输入、多输出系统的状态空间设计方法也做了必要的介绍。本书内容深入浅出，书中附有适量的例题和习题，为便于学习和应用所述的设计方法，附录中还编入了离散系统计算机辅助设计软件包的基本程序。

本书可作为流体传动及控制专业及机械类有关专业研究生的教材或教学参考书，也可供从事流体控制或机电控制的工程技术人员参考。

动 态 系 统 的 计 算 机 控 制

吴沛容 编

*

哈尔滨工业大学出版社出版

新华书店首都发行所发行

东北农学院印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/16 印张 12.5 字数 284 000

1991年6月第1版 1991年6月第1次印刷

印数 1-2 000 册

ISBN-7-5603-0322-6/TP·26 定价 3.60 元

出 版 说 明

根据国务院国发〔1978〕23号文件批转试行的“关于高等学校教材编审出版若干问题的暂行规定”，中国船舶工业总公司承担了全国高等学校船舶类专业教材的编审、出版的组织工作。自1973年以来，完成了两轮教材的编审、出版任务，共出版船舶类专业教材116种，对解决教学急需，稳定教学秩序，提高教学质量起到了积极作用。

为了进一步做好这一工作，中国船舶工业总公司成立了“船舶工程”、“船舶动力”两个教材委员会和“船电自动化”、“惯性导航及仪器”、“水声电子工程”、“液压”四个教材小组。船舶类教材委员会（小组）是有关船舶类专业教材建设的研究、指导、规划和评审方面的业务指导机构，其任务是为做好高校船舶类教材的编审工作，并为提高教材质量而努力。

中国船舶工业总公司在总结前两轮教材编审出版工作的基础上，于1986年制订了《1986年～1990年全国高等学校船舶类专业教材选题规划》。列入规划的教材、教学参考书等共166种。本规划在教材的种类和数量上有了很大增长，以适应多层次多规格办学形式的需要。在教材内容方面力求做到两个相适应：一是与教学改革相适应；二是与现代科学技术发展相适应。为此，教材编审除贯彻“打好基础，精选内容，逐步更新，利于教学”的原则以外，还注意了加强实践性教学环节，拓宽知识面，注重能力的培养，以适应社会主义现代化建设的需要。

这批教材由各有关院校推荐，同行专家评阅，教材委员会（小组）评议，完稿后又经主审人审阅，教材委员会（小组）复审。本规划所属教材分别由国防工业出版社、人民交通出版社以及各有关高等学校的出版社出版。

限于水平和经验，这批教材的编审出版工作还会有许多缺点和不足，希望使用教材的单位和广大师生积极提出宝贵意见，以便改进工作。

中国船舶工业总公司教材编审室

1988年3月

前 言

本书是按中国船舶工业总公司 1986~1990 年教材编审规划的要求, 为流体传动及控制专业硕士研究生选学《动态系统的计算机控制》课程 (40 学时) 编写的教材。它为具有一定连续系统自动控制理论基础的学生掌握用数字计算机实时控制动态系统 (如伺服系统、工业过程或宇宙空间运载工具等) 提供必要的理论基础。本书也可作为机械类其他专业研究生或机械工程师等学习与设计计算机控制系统时参考。

本书以信息变换与处理为基础, 讨论以微计算机作为动态系统的控制器, 在整个系统同时存在时间上、幅值上均为离散的信号和时间上、幅值上均为连续的信号时, 系统的各种综合与设计方法以及数字控制器实现中的一些理论问题。由于上述设计中的计算和绘图工作十分繁琐, 故在附录中介绍了包括各种设计方法的离散系统计算机辅助设计软件包的基本程序, 使书中介绍的主要设计方法变得方便而实用。

本书的主要研究对象是单输入、单输出的线性动态系统, 但对多输入、多输出系统的状态空间设计方法也做了必要的介绍。

上海交通大学的黄明慎教授担任本书的主审工作, 作者对他的辛勤工作和提出的宝贵意见表示深切的谢意。在编写过程中, 哈尔滨工业大学流体传动及控制教研室很多老师给予了极大的支持与帮助, 特别是丁宏老师为本书编制了《离散系统计算机辅助设计软件包》及使用说明, 并编写了本书的附录部分内容, 在此一并表示感谢。

编 者

1990 年 1 月

目 录

第一章 绪论	(1)
§ 1-1 计算机控制系统的工作原理	(1)
§ 1-2 计算机控制系统的发展概况	(3)
第二章 计算机控制系统的理论基础	(5)
§ 2-1 信息变换原理	(5)
§ 2-2 线性离散系统的数学描述	(15)
§ 2-3 z 变换	(17)
§ 2-4 离散系统的脉冲传递函数	(32)
§ 2-5 扩展 z 变换	(39)
第三章 离散系统的特性分析	(44)
§ 3-1 离散系统的稳态误差	(44)
§ 3-2 s 域到 z 域的映射	(46)
§ 3-3 离散系统的稳定性	(48)
§ 3-4 z 平面上极点分布与系统脉冲响应之间的关系	(50)
§ 3-5 T 、 K 对离散系统稳定性的影响	(52)
§ 3-6 z 平面上零、极点分布对时域阶跃响应的影响	(53)
§ 3-7 控制系统的 z 平面技术指标	(54)
第四章 计算机控制系统的综合与设计(一)	(58)
§ 4-1 模拟化设计与离散化设计方法概述	(58)
§ 4-2 PID 调节律的数字化——动态校正的计算机实现方法之一	(60)
§ 4-3 等效数字控制器设计法——动态校正的计算机实现方法之二	(65)
§ 4-4 设计举例	(73)
§ 4-5 混合仿真实验概述	(75)
§ 4-6 各种离散化方法的比较	(79)
第五章 计算机控制系统的综合与设计(二)	(81)
§ 5-1 z 平面上的根轨迹法	(81)
§ 5-2 w 平面设计法	(88)
§ 5-3 解析法设计离散系统	(94)
§ 5-4 最少拍系统设计	(97)
§ 5-5 快速无波纹数字控制系统设计	(102)
§ 5-6 最小均方误差系统的设计	(106)

第六章 数字控制器的实现	(109)
§ 6-1 控制算法的实现	(109)
§ 6-2 量化误差	(114)
§ 6-3 量化噪声及其传播	(116)
§ 6-4 系数误差及其对控制器动态特性的影响	(122)
§ 6-5 字长的确定	(123)
§ 6-6 极限环振荡	(126)
§ 6-7 采样频率的选择	(129)
第七章 状态空间设计法	(134)
§ 7-1 动态系统的离散状态变量表达式	(134)
§ 7-2 离散状态方程的解	(139)
§ 7-3 从状态变量表达式求传递函数(矩阵)	(141)
§ 7-4 可控性	(142)
§ 7-5 可观测性	(144)
§ 7-6 状态变量反馈与系统设计	(146)
§ 7-7 不完全状态反馈控制	(148)
§ 7-8 有限调整时间调节器的算法	(153)
§ 7-9 基于二次型的最优控制	(155)
§ 7-10 自校正控制器的设计	(158)
习 题	(163)
附 录	(172)

第一章 绪 论

§ 1-1 计算机控制系统的工作原理

动态系统的计算机控制就是用数字计算机代替自动控制系统中的常规控制装置，并对动态系统进行调节和控制。在许多方面，这种控制系统显示出巨大的优越性和良好的发展前景。

图 1-1 是计算机控制系统的原理框图。与模拟控制系统相比，它用数字计算机代替了常规的模拟控制器。由于计算机只能接受和处理时间与幅值上都离散的数字信息，故由传感器从控制对象（动态系统）中测得的位置、速度、压力、温度等物理量（通常是时间和幅值上均连续的模拟量）必须先由模数(A/D)转换器变成数字量后进入计算机，后者根据这些信息，按照人们预先设定的控制规律进行计算，求出控制作用的数字信息，再由数模(D/A)转换器变成模拟信号，通过执行元件作用到控制对象上，使之达到预期的控制目的。

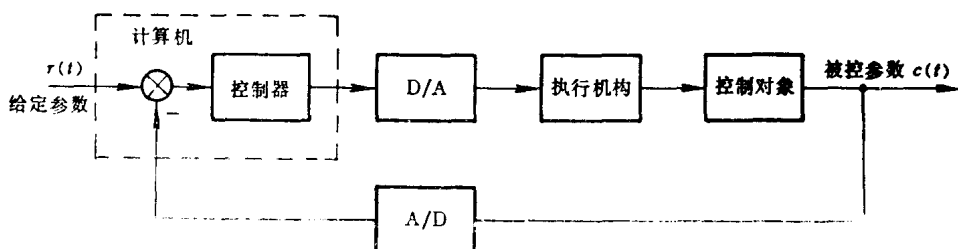


图 1-1

与模拟控制系统比较，计算机控制系统具有如下优点：

1. 具有很大的通用性和灵活性。同样一台计算机可以适用于不同场合和完成不同的控制算法，在系统中，它能方便地改变系统的结构和控制算法。
2. 容易实现复杂的控制算法和先进的控制算法，如时变控制、非线性控制、最优控制、自适应控制及多变量控制等。
3. 由于数字计算机具有极强的计算和记忆功能，故一台计算机可以同时控制多个控制回路和多个控制对象。因此，一个操作台可以代替许多模拟仪表。
4. 数字部件如数字组件、变送器、编码器等通常比模拟部件更可靠，数字信息的传输可靠性也比模拟信息的高。
5. 计算机直接数字控制(DDC)系统与计算机监督控制(SCC)和管理系统相结合组成的计算机分级控制系统，可使整个生产过程实现优化的全自动化管理和控制。

图 1-2~图 1-4 是计算机控制系统的实例。图 1-2 是卫星姿态的计算机控制系统，

利用分时原理，一台计算机可以对卫星绕三个轴的运动进行姿态控制。图 1-3 为单通道

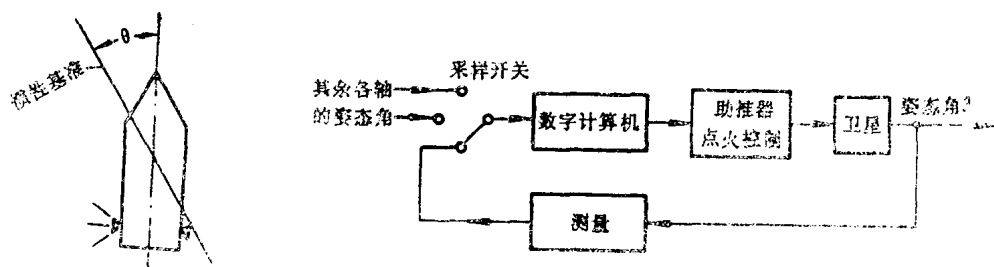


图 1-2 卫星姿态控制系统

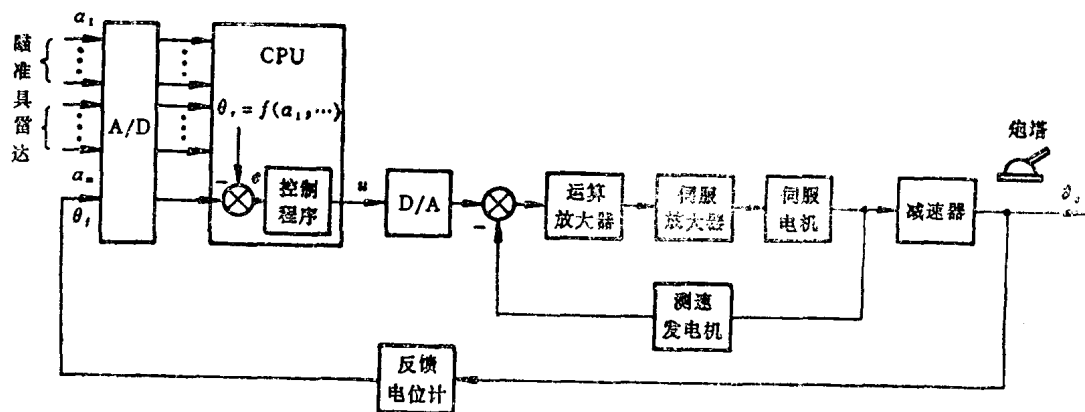


图 1-3 火炮的计算机控制系统

火炮控制系统。计算机根据雷达、瞄准具等测量装置所给出的信号 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ ，计算出命中目标所需的转角 θ_r ，并采用适当的控制算法对火炮驱动系统进行控制。图 1-4 是透平和发电机组的计算机控制系统。计算机不仅控制发电机组的转速和电压，而且不断收集和纪录发电机的转速、端电压、转子角度、磁场与电枢电流以及有功与无功功率等参数。这些参数有的是由数字变送器测量并经数字多路开关送入计算机的；有的则是由模拟变送器测量的。这些信息经多路开关后，还须经采样保持及 A/D 转换才能送入计算机（图 1-5）。图 1-6 是冷轧机五机架计算机控制系统。在控制过程中，不断测量各机架间的钢板厚度及钢板张力等参数，并将其输入计算机，计算机将根据最优化原理（例如用

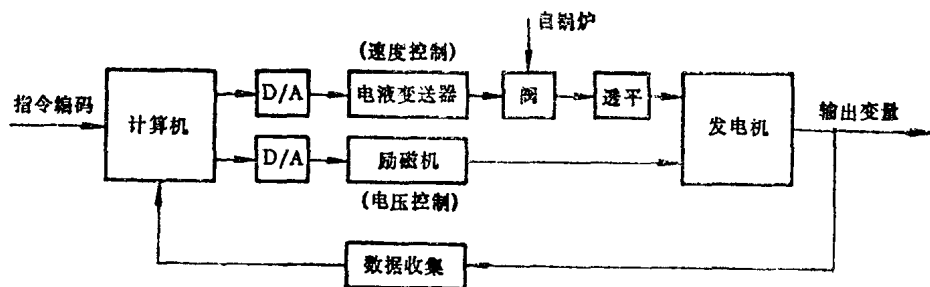


图 1-4 发电机组的计算机控制系统

最小控制量保持参数变化最小) 进行运算, 并对各轧辊发出控制信号 $\vec{s}(s_2, s_3, s_4, s_5)$ 和 $\vec{n}(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$, 去控制各轧辊的辊缝宽度 s 和工作转速 n 。这种最优控制系统有时也采用多级控制, 即用末级 (DDC) 计算机控制钢板的厚度和轧制速度, 而由监控级 (SCC) 计算机根据最优化原理计算轧辊辊缝和转速的最优给定值。

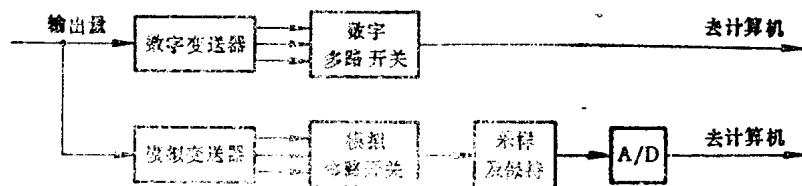


图 1-5 计算机的数据收集系统

尽管多级计算机控制系统在大型、复杂和高要求的控制系统中具有很大的优越性, 但本书只介绍直接控制级的计算机控制系统。因为它是掌握计算机控制理论的基础。

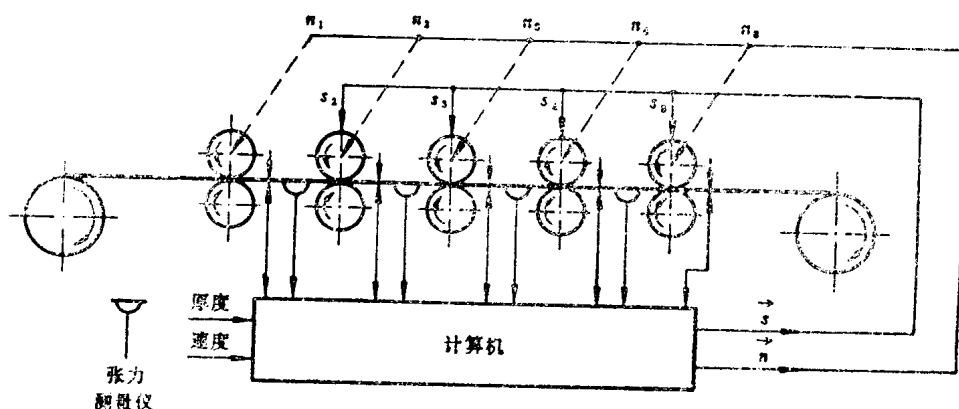


图 1-6 五机架连轧机的计算机控制系统

§ 1-2 计算机控制系统的发展概况

将数字计算机作为控制系统的部件的思想起萌于 1950 年左右。最初研究了计算机在导弹和飞机控制方面的应用, 但由于当时的通用计算机体积太大, 能耗太多, 可靠性又差, 故除研究出一些专用计算机——数字微分分析器 (DDA) 以外, 无甚发展。

50 年代中期, 计算机开始被用于过程控制。1959 年在线运行的美国 Port Arthur 炼油厂采用 RW-300 计算机的聚合装置控制系统, 共控制 26 个流量、72 个温度、3 个压力和 3 个成分。其基本功能是使反应器的压力最小; 确定对 5 个反应器供料的最佳分配、热水流量以及最佳循环。计算机在系统中主要用于寻找最佳运行条件, 完成调度和生产计划, 报告产量和原材料消耗, 这个系统使工业界看到了一种提高自动化程度的潜在手段。在 1960 年, 类似的系统已发展成 37 套, 次年增至 159 套, 应用领域涉及钢铁、化工和电力工业。但是, 当时计算机系统速度慢, 价格贵, 也不可靠, 1958 年前后, 计算机加法的典型运行时间是 1 毫秒, 乘法 20 毫秒, CPU 的平均无故障时间是

50~100 小时。在进行计算和控制时，操作者要接收计算机打印出来的指令，或修改模拟调节器的设定值，这种监督操作方式称操作者指导式或设定值控制。

直接参预动态过程控制的计算机控制系统的首例是：1962 年英国帝国化学工业公司(ICI)用一台名为费伦蒂·阿格斯(Ferrenti Argus)计算机直接测量 224 个控制量和控制 129 个阀门，代替了系统中全部模拟仪表装置而保持了原有的控制功能。这种控制系统称直接数字控制(DDC)系统。DDC 系统中的计算机已用来保证系统的基本控制功能，而不是前述的监督功能，这种控制系统是本书的主要研究对象。DDC 系统的优越性使它在 1963~1965 年间得到了显著的进展。一个模拟控制系统的价格是随着控制回路数目的增加成线性增长的，而对数字计算机控制系统来说，最初投资虽然很大，但增加控制回路所需费用却很少，所以对于大型控制系统，采用数字控制也许是经济的。1962 年典型过程控制机的加法运算时间为 100 微秒，乘法为 1 毫秒，CPU 平均无故障时间约 1000 小时。

在 60 年代中，随着集成电路技术进展而发展起来的小型计算机体积变小，运算速度加快，可靠性提高，而价格则有所降低。CDC 1700 是当时的典型计算机，其加法运算时间为 2 微秒，乘法 7 微秒，CPU 平均无故障时间达 20000 小时。它使数字计算机在系统中成为更小的“单元”，使较小规模的过程控制项目也可考虑采用数字控制。过程计算机 1970 年约有 500 台，1975 年已增长到 50000 台左右。

1972 年以后，由于微型计算机的出现与发展，使计算机的价格大幅度下降，DDC 系统甚至在单回路控制系统中也正在取代模拟控制装置。已经设计出以微型计算机为基础的专用调节器。计算机控制不仅在过程控制中的应用日趋成熟，而且在机电控制、航天技术和各种军事装备中也得到广泛应用。例如通讯卫星的姿态控制、卫星跟踪天线的控制、飞行自动驾驶仪、计算机数控机床、电气传动装置的计算机控制、工业机器人的姿态、力、力矩伺服等等。在某些领域，如工业机器人等，计算机控制已经成为不可缺少的因素；在另外一些领域，如射电望远镜的天线控制系统中，采用计算机控制，引入了自适应控制等先进控制算法，使控制精度大大提高。

80 年代以来，微电子学因出现了超大规模集成技术而获得急剧发展，可以预测，计算机控制系统的应用定会有更大地发展。今后，随着对控制对象动态过程知识的更深入了解，测量技术和计算机技术的进步以及控制理论方面的进一步发展，计算机控制技术也会发展得更加迅速。

第二章 计算机控制系统的理论基础

数字计算机只能接受和处理离散时间上的二进制代码。但实际系统的被控量大都是时间上和幅值上均连续的模拟量,故在计算机控制系统中,经常既包含有连续信号,又包含有离散信号,这种系统通常称为采样系统。只包含离散信号的系统称为离散系统。在分析和设计计算机控制系统时,经常将采样系统变换为离散系统来处理。本章将主要介绍离散控制系统经典理论的基本概念和基本方法,它包括信息变换原理和分析离散系统的数学工具等。这些都是分析和设计计算机控制系统的理论基础。

§ 2-1 信息变换原理

由于数字计算机的离散时间性质,故采样是计算机控制系统的基本特征。如图 2-1 所示,计算机获取信息的过程是:一个原来在时间上是连续的、幅值上是模拟量的信号,经过按一定采样周期闭合的采样器,把连续信号变成离散信号,再经过 A/D 转换(量化和编码)就变成数字计算机可以接受的时间上是离散的、幅值上是数字式的信号了。计算机对该输入信息进行处理,输出离散数字信号,经过 D/A 转换和保持器,又变成控制对象能够接受的时间上连续、幅值上是模拟量的控制信息。

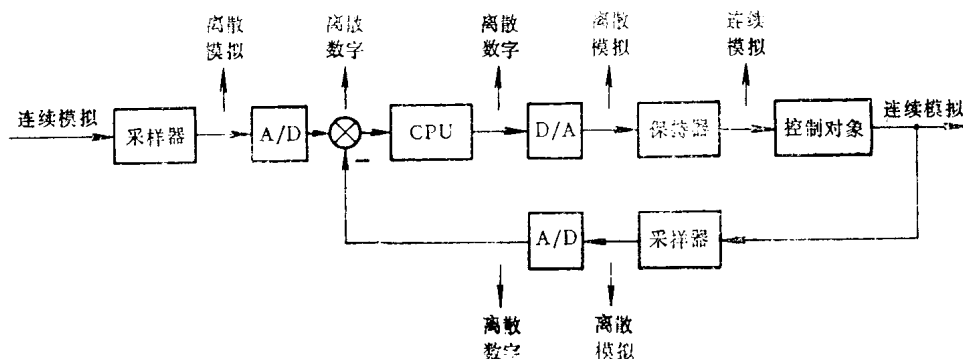


图 2-1 计算机控制系统中的信息转换关系

采样器和 A/D 转换器的功能在计算机控制系统中是由输入通道来完成的, D/A 转换器和保持器的功能是由输出通道的模拟输出部件来完成的。在图 2-1 所示的各个环节中,采样器、保持器和作为控制器的计算机,其结构形式和控制规律决定着控制系统的稳态特性和动态特性,是我们研究的主要对象。A/D 和 D/A 转换器实际上只起信号的测量和转换作用,虽然它们的位数在很大程度上决定着系统的稳态精度,但对系统的动态特性影响不大。在研究数字控制系统时,常常先假定 A/D 和 D/A 转换器都有足够的精

度,把图 2-1 所示的系统简化成图 2-2 形式,对系统进行分析 and 综合。信号测量和转换引起的误差对系统特性的影响将在第六章中作专门讨论。

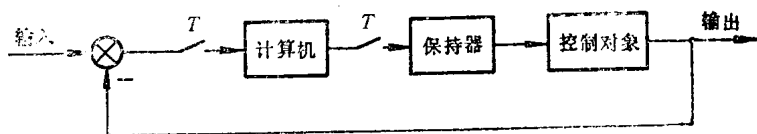


图 2-2 计算机控制系统简化方框图

本节将讨论对连续信号进行采样的机理;用连续信号的周期采样值准确表示该信号的条件;根据连续时间信号的采样值进行信号重构方法以及由于采样引起的混频现象和避免方法等。

2-1-1 采样过程及其数学描述

把时间上连续的信号转变成时间上离散的脉冲或数字序列的过程称为采样过程。它通常由采样开关(或称采样器)来完成。如果采样开关是等时间间隔开闭,则称周期采样;一般系统中有多多个采样开关,若所有采样开关等周期同步开闭,则称为同步采样;等周期但不同时开闭,称非同步采样;若多个采样开关以不同的周期采样,则称多速采样;若采样周期是随机的,则称为随机采样。除了专门说明外,本书中所用的采样开关均属同步周期采样。

实际采样器把输入的连续信号 $f(t)$ 变换成数值序列 $f(kT)$ 。采样器的方框图如图 2-3(a)所示;采样器的输入和输出信号之间的关系如图 2-3(b)所示,图中 Δ 为采样开关闭合时间,它应远远小于采样周期 T ,也远远小于采样开关后被控系统的时间常数。实际采样过程不易用数学描述,但为了简化采样系统的分析,可引入脉冲采样器的概念。如图 2-4 所示,脉冲采样器是这样工作的:若给脉冲采样器输入一个时间函数 $f(t)$,则其输出将是一个脉冲序列 $f^*(t)$,用数学形式表示为

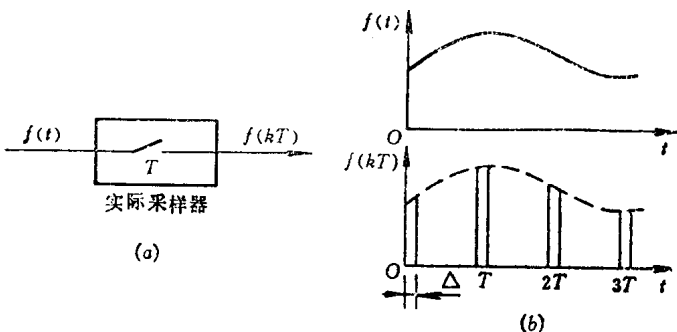


图 2-3 实际采样器的采样过程

远小于采样开关后被控系统的时间常数。实际采样过程不易用数学描述,但为了简化采样系统的分析,可引入脉冲采样器的概念。如图 2-4 所示,脉冲采样器是这样工作的:若给脉冲采样器输入一个时间函数 $f(t)$,则其输出将是一个脉冲序列 $f^*(t)$,用数学形式表示为

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) \quad (2-1)$$

式中 $f^*(t)$ ——输出脉冲序列;

$f(kT)$ ——数值序列;

$\delta(t - kT)$ ——发生在 $t = kT$ 上的单位脉冲函数。

单位脉冲函数的定义为:

$$\delta(t - kT) = \begin{cases} \infty & (t = kT) \\ 0 & (t \neq kT) \end{cases} \quad (2-2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) dt = 1$$

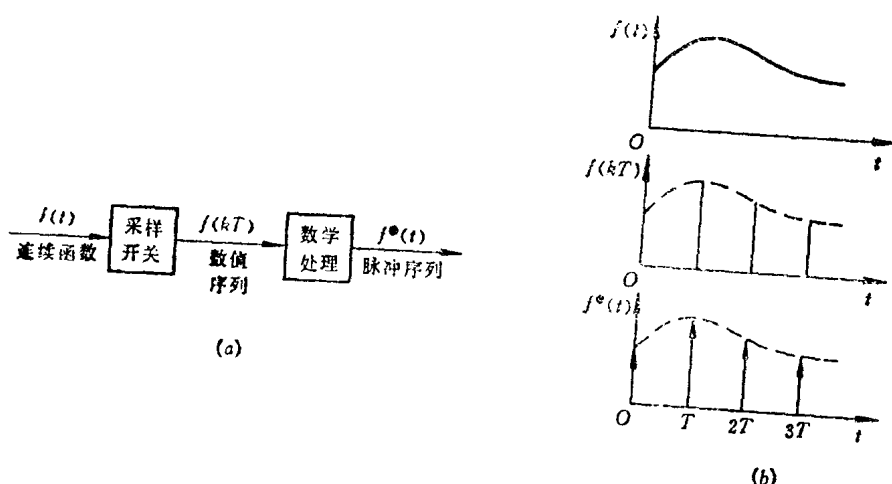


图 2-4 脉冲采样器的采样过程

需要指出, 具有无穷大幅值和持续时间为零的理想单位脉冲是数学上的假设, 在实际的物理系统中并不存在, 因此, 在实际应用中, 只有讲它的面积或强度才有意义。引入理想单位脉冲后, 脉冲序列 $f^*(t)$ 的物理意义可理解为: 在每个采样时刻, 脉冲采样器输出一个脉冲, 这个脉冲的幅值为无限大, 但它的强度为该时刻的输入函数值 $f(kT)$ 。这样, 脉冲采样器可以想象成由两部分组成: 先由硬件电路构成的采样开关把连续函数 $f(t)$ 转变成数值序列 $f(kT)$, 再把数值序列 $f(kT)$ 转换成脉冲序列 $f^*(t)$ 。根据理想单位脉冲的定义, 式(2-1)也可写成如下形式

$$f^*(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (2-3)$$

上式说明, 数字控制系统中的采样过程也可以理解为脉冲调制过程。在这里, 采样开关起着理想脉冲发生器的作用, 通过它将连续信号 $f(t)$ 调制成脉冲序列 $f^*(t)$ 。

应该指出, 用理想单位脉冲描述实际采样过程对数字控制系统的动态特性进行分析是有足够的理论根据的, 这可用频谱分析加以说明。设图 2-5 中的矩形脉冲等效于图 2-3 中任一宽度为 Δ , 幅值为 $f(kT)$ 的采样开关输出。两者的强度均为 $I = 2\tau h = \Delta \cdot f(kT)$ 。对矩形脉冲 $f^*(t)$ 进行傅氏变换, 可得

$$\begin{aligned} f^*(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} f^*(t) \cos \omega t \cdot dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^{\tau} h \cos \omega t \cdot dt \\
 &= I \frac{\sin \omega \tau}{\omega \tau}
 \end{aligned} \tag{2-4}$$

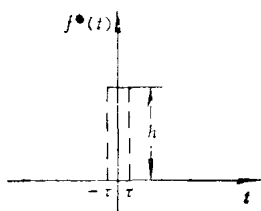


图 2-5 等效矩形脉冲

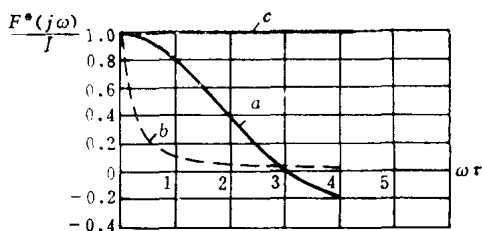


图 2-6 脉冲和系统的幅频特性

式中 I 是脉冲强度或称脉冲的冲量，上式关系可画成图 2-6 中曲线 a 。在 $\omega\tau \ll 1$ 的低频段，实际脉冲的幅值接近于脉冲的冲量 I ，随着频率的增加，脉冲的幅值将减小。而理想脉冲 $\delta(\tau)$ 的傅氏变换 $F[\delta(t)] = 1$ ，其频谱如图中曲线 c 所示。骤看起来， a 、 c 两曲线的频谱相差甚大，但在实际系统中，由于和采样对象的时间常数相比，脉冲的频谱通常很宽，而采样对象的频带则很窄，图 2-6 中虚线 b 是一个时间常数 $T = 10\tau$ ($\tau = \Delta/2$) 的惯性环节的幅频特性曲线，把它与曲线 a 、 c 相比较可以看出，在采样对象的通频带内，实际脉冲与 δ 脉冲的频谱几乎相同，即均近似等于脉冲冲量 I 。至于在高频段，虽然不同形状脉冲的频谱各不相同，但采样对象的幅频特性已迅速减小到几乎为零，因此输入到连续系统中的高频信号成分反映在输出量中的差别是不明显的。这说明，不论是低频段还是高频段，连续系统输出的频谱与输入脉冲信号的形状基本无关，对象的输出只取决于对象本身的动态特性和脉冲信号的冲量。因此，用 δ 脉冲来描述实际采样过程是合理的，这给采样系统的数学分析带来了极大方便。

2-1-2 采样定理

对一个连续时间信号进行采样时，如果相邻采样时刻足够接近，即采样周期 T 足够小，则经采样后原来连续信号的特征可以完整地保留下来（见图 2-7(b)）。如果采样点间隔相距太大，那么原信号的许多信息就可能丧失（见图 2-7(a)）。采样定理给出了采样后的离散信号能保持原连续信号全部特征所需要的最低采样频率。采样定理的内容是：

对一个具有有限频谱（ $\omega \leq \omega_{\max}$ ）的连续信号 $f(t)$ 进行持续采样，若采样频率满足 $\omega_s \geq 2\omega_{\max}$ ，则采样函数 $f^*(t)$ 能无失真地复现原来的连续信号 $f(t)$ 。其中

$\omega_{\max}$ ——连续信号 $f(t)$ 有效频谱中的最高频率，

$\omega_s = 2\pi/T$ ——采样频率。

采样定理可以由单位脉冲序列展开为复数形式的傅氏级数后代入式 (2-3) 中推得。

$$f^*(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) \tag{2-5}$$

将式中单位脉冲序列展开成傅氏级数, 其复数形式为

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_s t} \quad (2-6)$$

式中

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jk\omega_s t} \cdot dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_s t} \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} e^{-jk\omega_s t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T} \end{aligned} \quad (2-7)$$

将所得 C_k 代入式(2-6), 可得

$$\delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t} \quad (2-8)$$

将上式代入式(2-5), 进行拉氏变换, 并应用位移定理, 则得

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s - jk\omega_s)$$

由于上式求和是对称的, 因此, 上式亦可写成

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s + jk\omega_s) \quad (2-9)$$

通常 $F(s)$ 的全部极点均在 s 平面的左半部, 故可用 $j\omega$ 代替上式中的 s , 直接求得采样函数的傅氏变换, 即

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(j\omega + jk\omega_s) \quad (2-10)$$

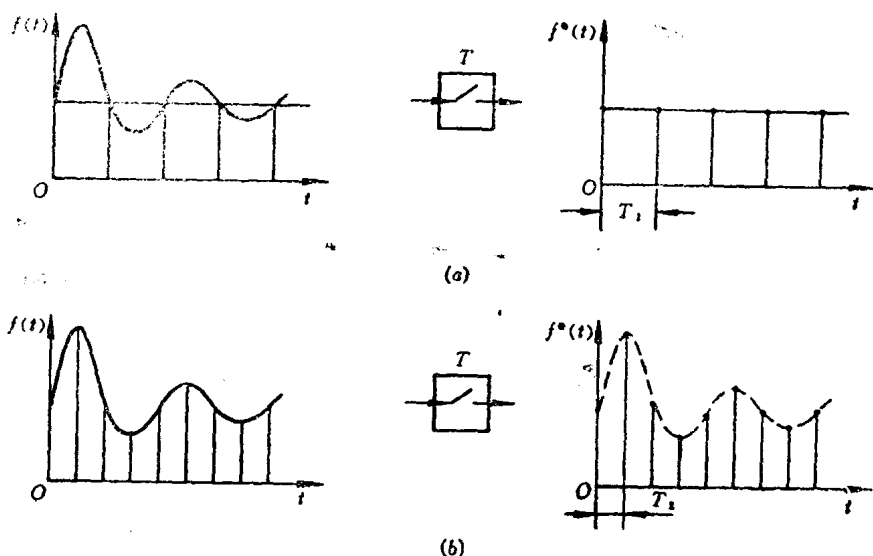


图 2-7 采样周期 T 对采样信号的影响

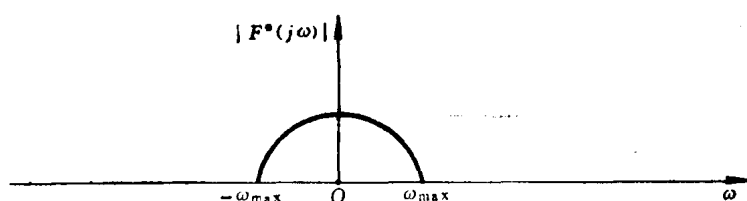
所得公式反映了采样函数 $f^*(t)$ 频谱 $F^*(j\omega)$ 与原连续函数 $f(t)$ 频谱 $F(j\omega)$ 间的关系。一般说来, 连续函数 $f(t)$ 的有效频谱带宽是有限的, 是一个孤立频谱, 其最高有效频率为 $\omega_{\max}$ (见图 2-8 a)。而采样函数频谱则是周期频谱, 其周期对应于采样频率

ω_s 。采样函数频谱在 ω 处的值是连续信号的傅立叶变换在频率 $\omega + k\omega_s$ 处所有值之和，因此，经过采样就区分不开对应于不同 k 处频谱值的大小，这种现象称为频谱混叠现象。此时频率 ω 可认为是频率 $\omega + k\omega_s$ 的假频，由于习惯上 ω 只取正值，故频率 ω 是频率 $\omega_s - \omega$, $\omega_s + \omega$, $2\omega_s - \omega$, $2\omega_s + \omega \cdots$ (其中 $0 \leq \omega < \omega_s/2$) 的假频。可见，经过采样后，已不可能把任一频率与假频区别开来。如在图 2-8 c 中，频谱中对应于频率 ω_1 处的幅频值由两项组成，其中幅值较大的一项是主频谱 ($k=0$) 产生的 $F(j\omega_1)$ ，另一项则由中心在 $\omega_s = 2\pi/T$ 处的辅频谱 ($k \neq 0$) 产生的 $F(j\omega_0)$ ，其假频频率 $\omega_0 = \omega_s - \omega_1$ 。由图 2-8 不难看出，对于同一个连续函数 $f(t)$ ，当用不同采样频率 ω_s 进行采样时，所得的离散频谱各不相同，只有当 ω_s 取得足够高时，才能使离散频谱中的主频谱与辅频谱互相分离。主、辅频谱互不混叠的条件是

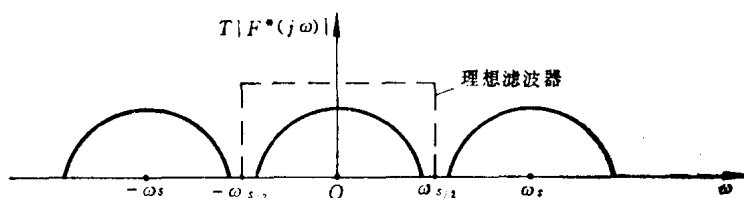
$$\omega_s \geq 2\omega_{\max} \quad (2-11)$$

或

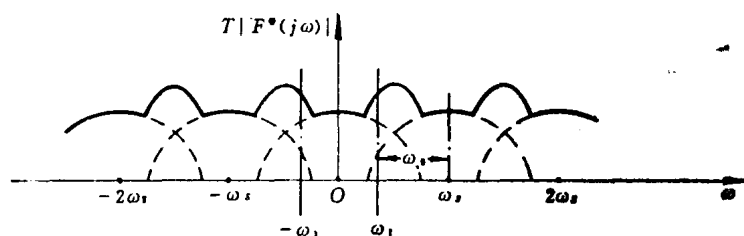
$$\omega_{\max} \leq \omega_N = \frac{\omega_s}{2}$$



(a)



(b)



(c)

(a) 连续频谱; (b) $\omega_s > 2\omega_{\max}$; (c) $\omega_s < 2\omega_{\max}$
图 2-8 连续函数频谱 $F(j\omega)$ 和采样函数频谱 $F^*(j\omega)$

这就是采样定理要满足的条件。 ω_N 称为奈奎斯特频率。采样定理说明，如果连续信号中不含有高于 ω_N 的频率成分，采样后的主频谱与辅频谱彼此分离。这样，若把采样后的离散信号 $f^*(t)$ 加至具有理想滤波特性的低通滤波器(图 2-8 (b)) 的输入端，则在滤