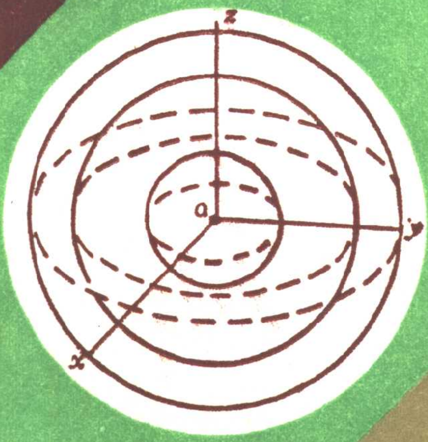
矢量与场论

赵民初 编著



江苏科学技术出版社

矢 量 与 场 论

赵 民 初　编著

江苏科学技术出版社

内 容 提 要

本书从矢量的基本概念出发，阐述了矢量的性质和运算、场论的基本概念及其性质、张量初步知识。内容包括矢量概念及运算，矢量与坐标，矢量的乘积，矢性函数的微积分，场及其梯度、散度和旋度，有势场、管形场和调和场，正交曲线坐标系。内容由浅入深，说理清晰，辅以习题并给出答案，便于读者自我检验学习效果。

本书适于大专院校在校学生以及自学社会青年学习参考。

矢 量 与 场 论

赵民初 编著

出版：江苏科学技术出版社

发行：江 苏 省 新 华 书 店

印刷：镇 江 前 进 印 刷 厂

开本787×1092毫米 1/32 印张 11.375 插页 2 字数 260.000

1987年12月第 1 版 1987年12月第 1 次印刷

印数 1－3,000册

ISBN 7－5345－0199－7

O·17 定价：2.65元

目　　录

第一章　矢量概念及两种基本运算……1

§1.1　矢量的概念……1

一、标量和矢量……1

二、矢量的种类……2

三、矢量的相等……3

四、零矢量、逆矢量及单位矢量……4

五、共线矢量和共面矢量……5

习题……7

§1.2　矢量加减法……8

一、两个矢量的和……8

二、矢量加法的性质……12

三、矢量的减法……15

习题……18

§1.3　数乘矢量……20

一、数与矢量的积……20

二、数乘矢量的性质……23

三、矢量等式及其变换……26

习题……28

§1.4　矢量的分解……30

一、概述……30

二、平面上矢量的分解……30

三、空间中矢量的分解……34

四、线性相关、矢量间的线性关系……36

习题……40

第二章　矢量与坐标……………………………………………42
§2.1　矢量的投影表示法 ……………………………………42
一、轴上矢量的代数量及两矢量间的夹角 ……………………42
二、矢量在轴上的投影 …………………………………………43
三、投影定理 ……………………………………………………44
习题 ………………………………………………………………48
§2.2　矢量的坐标 ……………………………………………49
一、直角坐标系 …………………………………………………49
二、矢量的坐标分解式 …………………………………………51
三、用坐标分解法进行矢量运算 ………………………………54
四、矢量的模和方向余弦 ………………………………………61
习题 ………………………………………………………………67
§2.3　坐标变换 ………………………………………………69
一、平移变换 ……………………………………………………70
二、旋转变换 ……………………………………………………72
三、运动变换 ……………………………………………………77
习题 ………………………………………………………………78
第三章　矢量的乘积……………………………………………80
§3.1　矢量的标积……………………………………………80
一、标积的概念 …………………………………………………80
二、标积的性质 …………………………………………………81
三、标积的坐标表示法 …………………………………………86
习题 ………………………………………………………………90
§3.2　矢量的矢积……………………………………………92
一、矢积的概念 …………………………………………………92
二、矢积的性质 …………………………………………………94
三、矢积的坐标表示法 …………………………………………100
习题 ………………………………………………………………106
§3.3　矢量的混合积与二重矢积……………………………107
一、三个矢量的乘积 ……………………………………………107
二、矢量混合积的几何意义 ……………………………………108

三、混合积的代数性质 …… 110
四、混合积的坐标表示法 …… 114
五、二重矢积 …… 117
习题 …… 122
§3.4 张量概念简介 …… 123
一、从物理上引入二阶张量 …… 123
二、张量及其运算 …… 125
第四章 矢性函数的微分和积分 …… 130
§4.1 矢性函数的概念 …… 130
一、 矢性函数的定义 …… 131
二、 曲线的参数方程 …… 132
§4.2 矢性函数的极限和连续性 …… 134
一、矢性函数的极限的定义 …… 134
二、极限的运算法则 …… 134
三、矢性函数的连续性 …… 139
§4.3 矢性函数的微分法 …… 139
一、矢性函数的导数 …… 140
二、导矢的几何意义 …… 142
三、 位矢函数$\mathbf{r}(t)$的导矢$\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$的物理意义 …… 143
四、矢性函数的微分 …… 144
五、矢性函数的导数公式 …… 145
§4.4 对导矢的进一步讨论 …… 150
一、导矢在两个方向的分解 …… 150
二、导矢在力学上的简单应用 …… 153
三、$\mathbf{r}'(S)$的几何意义 …… 155
§4.5 几种具有特殊性质的矢性函数 …… 158
一、模为定值的矢性函数 …… 158
二、具有固定方向的矢性函数 …… 159
三、平行于定平面的矢性函数 …… 159
§4.6 矢性函数的积分 …… 161

一、矢性函数的不定积分 …… 161
二、矢性函数的定积分 …… 162
§ 4.7 多元矢性函数的微分和积分 …… 168
一、多元矢性函数的偏导数 …… 168
二、多元矢性函数的全微分 …… 171
三、多元矢性函数的积分 …… 172
习题 …… 175
第五章 场、梯度、散度及旋度 …… 179
§ 5.1 场 …… 179
一、场的概念 …… 179
二、数量场的等值面 …… 181
三、矢量场的矢量线 …… 183
习题 …… 190
§ 5.2 数量场的梯度 …… 191
一、方向导数 …… 191
二、梯度 …… 198
习题 …… 212
§ 5.3 矢量场的散度 …… 215
一、通量 …… 216
二、散度 …… 226
习题 …… 236
§ 5.4 矢量场的旋度 …… 238
一、环量 …… 238
二、旋度 …… 245
习题 …… 263
第六章 有势场、管形场和调和场 …… 266
§ 6.1 有势场 …… 266
一、有势场与势函数的概念 …… 266
二、矢量场是有势场的充要条件 …… 268
三、计算举例 …… 274
§ 6.2 管形场 …… 281

一、管形场与矢量势的概念 …………………………………… 281
二、矢量场是管形场的充要条件 …………………………… 283
三、连续性方程 ………………………………………………… 284
四、热传导方程 ………………………………………………… 288
五、计算举例 …………………………………………………… 290
§6.3 调和场 ………………………………………………… 293
一、调和场与调和函数的概念 ……………………………… 293
二、矢量场是调和场的充要条件 …………………………… 295
三、平面调和场 ………………………………………………… 296
四、格林第一、第二公式 …………………………………… 299
五、计算举例 …………………………………………………… 300
§6.4 场的分类与场的确定性 ……………………………… 305
一、场的分类 …………………………………………………… 305
二、场的确定性问题 …………………………………………… 308
习题 ……………………………………………………………… 310
第七章 正交曲线坐标系 ………………………………… 313
§7.1 正交曲线坐标系 ……………………………………… 313
一、正交曲线坐标的概念 …………………………………… 313
二、柱面坐标系 ………………………………………………… 316
三、球面坐标系 ………………………………………………… 317
四、曲线元素、曲面元素和体积元素在正交曲线坐标系中的表示式 ……………………………………………………… 318
§7.2 梯度、散度、旋度及调和量在正交曲线坐标系中的表示式 ………………………………………………… 322
一、梯度的表示式 ……………………………………………… 322
二、散度的表示式 ……………………………………………… 323
三、旋度的表示式 ……………………………………………… 325
四、调和量的表示式 …………………………………………… 327
五、计算举例 …………………………………………………… 328
习题 ……………………………………………………………… 333
附录 ∇算子 ……………………………………………… 336

一、∇算子的运算性质 ……………………………………………………… 336
二、∇算子的基本公式 ……………………………………………………… 339
三、计算举例 ……………………………………………………………… 340
习题答案……………………………………………………………… 345

第一章　矢量概念及两种基本运算

本章介绍矢量的概念以及矢量的加减法和数乘矢量两种基本运算。通过讨论可以看到，矢量既具有明显的物理意义和几何意义，其运算又具有典型的代数性质。

§1.1　矢量的概念

一、标量和矢量

我们在物理学、力学中所遇到的量，一般可分为两类。其中的一类，例如长度、质量、密度、能量、时间及温度等等，它们只有大小，在取定单位之后，都可以用一个实数来表示。这种只有大小的量叫做标量，或者叫做数量。

标量可以按普通的代数法则进行数学运算。

另一类，例如力、位移、速度、加速度、电场强度及磁场强度等等，仅用一个实数已不能完全表示出它们的特征。我们知道，速度这个量，一般说来，不仅有大小之分，而且有方向之别。又如，作用于物体上同一点的两个力，如果它们的大小相等，但是方向不同，那么作用的效果也就不同。因此，以上这些量在取定单位之后，除了用实数来表示其大小外，还需用一定的方向才能表示其性质。这种既有大小，又有方向，并且遵守一定运算法则的量，叫做矢量，又称向量。实际上，矢量概

念正是由于研究物理学的需要而产生出来的。

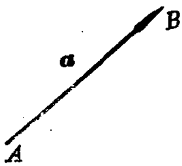


图1-1

矢量有两种表示方法：几何表示法和坐标表示法。

矢量的几何表示法借助于带有箭头的有向线段。线段的长度按选定的比例尺画出，表示矢量的大小，箭头的指向表示矢量的方向(图1-1)。

数量通常用小写的英文字母来记，如a、b、c等。矢量的标记分为两种情况，在书籍或文献中，一般用黑斜体字母表示矢量，如$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$等；平常在书写时，多在字母上面加一个箭头号，如$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$等；有时也可在代表矢量起点和终点的两个字母上面加一个箭头号表示，如$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{AC}$等等。在图1-1中，以A为起点、B为终点的矢量可以记作$\boldsymbol{a}$，也可以记作$\overrightarrow{AB}$。

矢量的大小叫做矢量的模。在图形中它就是有向线段的长度，通常用在代表矢量的字母两旁加两竖杠来表示，例如图1-1中矢量$\boldsymbol{a}$的模记作$|\boldsymbol{a}|$，或$|\overrightarrow{AB}|$。

矢量的模是标量。

二、矢量的种类

在物理学和力学中，矢量有三种类型：即自由矢量、滑移矢量和固定矢量。

1. 自由矢量

这种矢量的指向固定，起点任意，例如，作用于刚体上的力偶，其矩(称为力偶矩)为一自由矢量。只要保持此力偶矩不变(即保持表示方向的箭头和表示模的长度不变)，可以将力偶矩矢任意移动，而不会改变原力偶对刚体的作用。这是因

为，力偶不仅可以在其自身作用平面内任意移动，而且可以移到与原作用平面平行的任意平面上去。此外，作平移运动的刚体上的任一点，它在某一时间间隔内的位移、某一瞬时的速度和加速度，也可作为自由矢量。

2． 滑移矢量

这种矢量的指向固定，起点可以取定在方向线上的任意一点。作用在刚体上的力就是滑移矢量的一个明显的例子。又如刚体绕定轴转动时，其角速度也是滑移矢量。

3． 固定矢量

这种矢量不仅指向固定，起点也是固定的，不能随意移动。例如，当分析液体的运动时，作用在液体某一质点的力，它的作用点就取在该质点所在的点上，这样的力就是固定矢量。点电荷在非均匀电场中所受到的电场力也是固定矢量。

滑移矢量和固定矢量都只是自由矢量的特殊形式。

今后本书所提及的矢量，除特别说明外，都是指自由矢量，并简称为矢量。

由于矢量可以取空间任意一点作为它的起点，可以从空间的一个位置平行移动到另一个位置，而其运算性质不变。因此，对于矢量来说，位置不再有任何意义，矢量与起点无关。

三、矢量的相等

模相等、方向相同的矢量，叫做相等矢量。

在图1-2中，有

$$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$$

且 $$\boldsymbol{a} \nearrow\!\nearrow \boldsymbol{b}$$

（“$\nearrow\!\nearrow$”号表示两矢量平行，且指向相同）

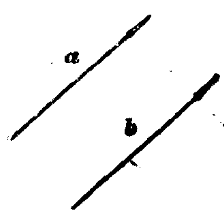


图1-2

则

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$$

据上述矢量相等的定义可知，任何一个矢量经过平行移动后，仍为一个与原矢量相等的矢量。事实上，平移一个矢量，它的大小、方向都没有改变。因此，两个矢量经过平行移动后，如果能够重合，那么它们就是相等的。

矢量之间的不等式关系是不成立的。也就是说，对于$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$两个矢量，不存在$\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$或$\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$的关系。但是，对于它们的模来说，有不等式

$$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}| \quad 或 \quad |\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$$

成立。这是因为，大小的概念只能应用于数量上，而矢量的模是数量，所以能适用不等式。

显然，若$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，，则必有$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$；反之，若$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，我们绝不能由此推出$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。由此可见，模相等只是矢量相等的必要条件，而不是充分条件。

四、零矢量、逆矢量及单位矢量

（1）模为零的矢量叫做零矢量。记作$\vec{0}$或用黑体的数$\boldsymbol{0}$表示，有$|\boldsymbol{0}|=0$。从几何上看，零矢量的起点与终点重合，即代表矢量的有向线段的长度等于零。零矢量的方向不定，或者说方向是任意的。并且规定，一切零矢量都相等。

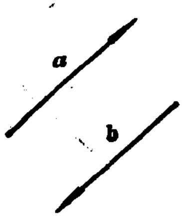


图1-3

（2）模相等、方向相反的两个矢量，叫做互为逆矢量。

在图1-3中，有

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$$

且 $\boldsymbol{a} \nearrow\swarrow \boldsymbol{b}$ （“$\nearrow\swarrow$”号表示两矢量平行，但指向相反）

则

$$\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b}$$

任一矢量$\boldsymbol{a}$的逆矢量记作$-\boldsymbol{a}$，矢量$\overrightarrow{AB}$的逆矢量就是$\overrightarrow{BA}$，即$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$。可见，只要将一矢量的起点和终点的位置对换，就可得到它的逆矢量。由牛顿第三运动定律所指出的两物体间的作用力与反作用力，就是一对互逆矢量。

（3） 任何模为1的矢量叫做单位矢量。与矢量$\boldsymbol{a}$具有同一方向的单位矢量叫做矢量$\boldsymbol{a}$的单位矢量，并记作$\boldsymbol{a}^0$。两个单位矢量仅在方向一致时才相等。由此可见，单位矢量的特征就是方向，一个单位矢量确定一个方向；反过来说，在任何一个方向上也确定一个单位矢量。因此，我们可以用不同的单位矢量来表示空间不同的方向。

五、共线矢量和共面矢量

（1） 平行于同一直线的矢量叫做共线矢量。它们的指向可以相同，也可以相反。

在图1-4中，两矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$平行于同一直线l，由于我们所讨论的是自由矢量，故可将$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的起点放在l上的同一位置，如O点，那么它们都落在同一直线l上，因而矢量$\boldsymbol{a}$和矢量$\boldsymbol{b}$共线。这样，我们总能用在直线l上的矢量，来分别表示这些已知的互相平行的矢量。所以，共线矢量也可以理解为在同一直线上的矢量。

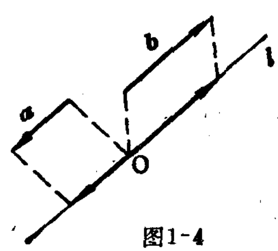


图1-4

（2） 平行于同一平面的矢量叫做共面矢量。

在图1-5中，一组矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$同时平行于同一平面N。我们

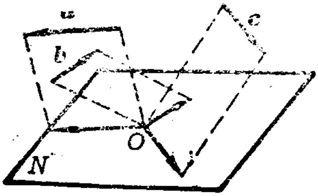


图1-5

可以将$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$的起点放在N上的同一点，如O点，于是它们都落在同一平面N上，因而$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$三个矢量共面。显然，我们总能用在N平面上的矢量，来分别表示一组已知的矢量。因此，共面矢量也可以理解为在同一平面内的矢量。

（3） 方向相同或相反的矢量叫做平行矢量。若$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为平行矢量，则记作$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$。

共线矢量既然平行于某一直线，因而也一定平行于某一平面，于是可以断定：共线的矢量必定共面。但反过来并不成立，这是因为，平行于同一平面的矢量，并不一定平行于某一直线。

对于两个不共线的矢量，例如$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，可将它们的起点置于同一点O，那么它们必定分别位于两条相交于O点的直线l和m上。已知两相交直线决定一个平面，所以$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$必定位于由l和m所确定的平面N上（图1-6）。由此可以断定：两个不共线的矢量必定共面。

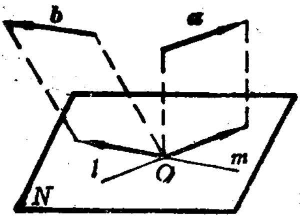


图1-6

由于零矢量的方向是任意的，因而总可以把它看成与任何矢量平行。也就是说，零矢量与任何矢量共线。

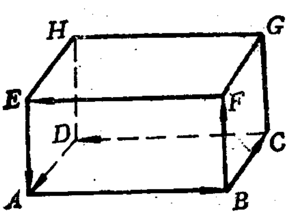


图1-7

例1.1 设$ABCD\text{-}EFGH$为一平行六面体（图1-7）。在

$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{BF}$、$\overrightarrow{FE}$及$\overrightarrow{EA}$等矢量中，试找出：(1)相等矢量；(2)互逆矢量；(3)共线矢量；(4)共面矢量。

解 (1)相等矢量：$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{FE}$。

(2)互逆矢量：$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$；$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{FE}$；$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{DA}$；$\overrightarrow{BF}$与$\overrightarrow{EA}$。

(3)共线矢量：$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{FE}$；$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{DA}$；$\overrightarrow{BF}$、$\overrightarrow{EA}$。

(4)共面矢量：$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{FE}$；$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BF}$、$\overrightarrow{FE}$、$\overrightarrow{EA}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{BC}$；$\overrightarrow{BF}$、$\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{EA}$。

习　　题

1. 指出下列各物理量中哪些是标量，哪些是矢量：(1)功，(2)质量，(3)动量，(4)电磁力，(5)距离，(6)动能，(7)重量，(8)速率，(9)位移，(10)磁感应强度。

2. 在一个平行四边形的边上，可以作哪些相等矢量？如果在一个正五边形或等边三角形上呢？

3. 下面这些式子，哪个是合理的？哪个是不合理的，为什么？

(1) $|\boldsymbol{a}|=|-\boldsymbol{a}|$，

(2) $\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{b}|=\boldsymbol{c}+|\boldsymbol{d}|$，

(3) $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{d}|$；则 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{c}|>|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{d}|$，

(4) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{c}|>|\boldsymbol{d}|$；则$\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{c}|>\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{d}|$。

4. 在一个空间平行六面体上，可以作出几组共线矢量？几组共面矢量？

5. 如果把空间的所有单位矢量的起点放在同一点，它们

的终点将构成什么图形？如果把一个平面上所有单位矢量的起点放在同一点，它们的终点又构成什么图形？

6．设有$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$三个矢量，已知$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$共线，$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$也共线，问$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{c}$是否共线？

7．已知矢量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线。问在什么条件下矢量$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BD}$也共线？

8．已知矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$共面，矢量$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$、$\boldsymbol{e}$也共面。问矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{e}$是否共面？

9．正六边形$ABCDEF$，设边长为5，又与$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$三矢量对应的单位矢量分别为$\boldsymbol{m}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{p}$，试以$\boldsymbol{m}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{p}$表示$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DE}$、$\overrightarrow{EF}$及$\overrightarrow{FA}$各矢量。

§1.2 矢量加减法

一、两个矢量的和

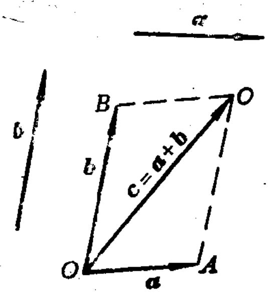


图1-8

设已知矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，以任意给定的一点O为起点，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$及$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$。再以$OA$、$OB$为邻边作平行四边形$OACB$，那么，对角线矢量$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，就叫做矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和（图1-8）。记作

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$$

由矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$求$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的运算叫做矢量加法，而这种求两矢量和的作图法，叫做平行四边形法则。

关于矢量求和问题，在上述平行四边形法则的基础上，还