

21 世纪固体力学丛书

非线性空间结构力学

贾乃文 著

科学出版社

2002

内 容 简 介

本书对悬索与索网、网架与网壳、圆板与折板、旋转壳与扁壳屋盖等空间结构,在介绍其线弹性力学计算基础上,主要阐述它们的非线性力学计算理论和工程塑性设计方法。本书反映了空间结构力学方面的最新成果,开拓了空间结构和特殊结构的非线性设计。书中有较多的算例供学习者参考,并有附录讲述与本书有关的数学分析方法。

本书可作为高等院校力学、土建等专业研究生和本科生的教学参考书,也可供从事结构设计的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

非线性空间结构力学/贾乃文著. —北京:科学出版社,2002
(21世纪固体力学丛书)
ISBN 7-03-010102-2

I. 非… II. 贾… III. 空间结构-结构力学 N. TU399

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 004196 号

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年6月第一版 开本:720×1000 B5

2002年6月第一次印刷 印张:19 3/4

印数:1—3 500 字数:381 000

定价:32.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈兰各〉)

《21 世纪固体力学丛书》编委会

主 编 黄培彦

副主编 韩 强

编 委 (以姓氏笔画为序)

汤立群 陈国华 罗 毅

贺玲凤 贾乃文 曾庆敦

总 序

自从产业革命以来,在工业技术的发展中,力学曾大显身手。特别是 20 世纪中叶以来,近代力学基础性、探索性的超前研究曾对当代产业例如航空、航天工业的发展起到过主导的作用。从中固体力学取得了令人瞩目的成就。

随着知识经济和信息时代的到来,21 世纪我国经济建设将会加速发展。一大批高新技术产业和跨世纪骨干产业的形成,将会带来许多新的复杂的工程实际问题,这不仅为固体力学提供了大量的新课题,而且亦成为固体力学学科发展的新动力。固体力学既要适应生产实际的发展,面向工程实际,解决生产难题,同时亦应从工程实际中提炼出具有普遍性的问题进行系统的研究,促进各分支学科的成长,从而推动整个固体力学学科的发展。

中青年学者尤其青年学者是 21 世纪我国固体力学研究领域的主力军。目前,一大批优秀的青年学者已经成长为新一代的学科带头人,活跃在固体力学的诸多前沿研究领域。由他们联合撰写的固体力学系列专著,从各自不同的研究角度出发,反映了最新的研究成果及其发展趋势,对该学科的发展具有重要的影响和参考价值。毫无疑问,《21 世纪固体力学丛书》在这方面做了一个很好的尝试。

《21 世纪固体力学丛书》围绕固体力学的若干前沿研究领域,基于近代固体力学理论的最新研究成果,在结构的疲劳设计、概率断裂力学、复合材料强度理论、非线性力学以及新的实验测试技术等方面进行了系统的总结。该丛书不仅阐述了基本概念、基本理论、基本方法,而且有许多内容是作者们多年来卓有成效的研究成果,具有理论与应用并重的特色。丛书有助于初次涉足这一领域的学生和研究人员在较短的时间内从较高的起点上开展固体力学的研究工作。

我相信,《21 世纪固体力学丛书》的出版将会对固体力学的理论研究和工程应用发挥积极的促进作用。

高镇同

2001 年 12 月

前 言

结构的大跨度和材料的高强度是 21 世纪结构设计的方向之一。基于材料物理非线性的结构塑性设计研究,尤其是大跨度空间结构的塑性设计的研究具有划时代意义。本书仅是在这方面的一种探索。

本书共有八章及一个附录,主要包括悬索、索网、网架、圆板、折板、旋转壳、扁壳、网壳等结构,并简单介绍了上述结构在线弹性范围内力学分析的经典理论,着重阐述了它们的非线性力学计算理论,例如考虑材料的塑性强化效应的结构设计,与结构极限破坏状态相吻合的塑性极限分析,考虑几何非线性与各向异性的结构力学计算等。本书的主要内容是在作者多年从事非线性空间结构力学研究的成果基础上,经过加工、提炼而系统集成的。本书在写作时,注重由浅入深、循序渐进,书中还配有大量的设计计算例题供读者参考。本书可作为高等学校力学、土建等专业研究生、本科生的教学参考书,也可供结构设计人员参考。

在本书出版之时,作者要特别感谢董石麟院士的关心和支持,同时感谢为本书出版作出贡献的同仁与家人。

限于作者的能力与水平,书中错漏在所难免,欢迎读者批评指正。

目 录

总序

前言

第一章 非线性悬索结构	1
1.1 单索的一般方程	1
1.2 辐射式悬索结构	8
1.3 非线性悬索结构的方程.....	13
1.4 辐射式双层悬索结构的塑性计算.....	16
1.5 非线性悬索的变分原理.....	19
1.6 悬索的塑性强迫振动.....	24
第二章 非线性索网结构	28
2.1 正交索网的基本方程.....	28
2.2 鞍形索网的弹性计算.....	33
2.3 非线性材料索网的差分计算.....	38
2.4 鞍形索网的塑性计算.....	41
2.5 非线性索网结构的变分解法.....	45
2.6 索网结构的塑性强迫振动.....	49
第三章 非线性平板网架结构	54
3.1 平板网架的差分计算.....	54
3.2 平板网架的拟板计算.....	64
3.3 网架结构的非线性分析.....	70
3.4 三向网架的塑性计算.....	74
3.5 网架非线性分析的变分方法.....	78
3.6 三向网架的塑性变分解法.....	81
3.7 网架结构的塑性极限分析.....	84
3.8 正交异性圆形网架塑性设计.....	88
第四章 非线性圆形板结构	94
4.1 柱坐标下圆形板的一般解.....	94
4.2 弹性地基柱坐标下圆形板的解	101
4.3 非线性大变形圆形板的精确解	108
4.4 圆形板的塑性极限分析	112
4.5 组合受力圆形板的塑性极限分析	116

4.6	环形板的塑性弯曲	119
4.7	非线性硬化环形板塑性弯曲	124
4.8	正交异性非线性变厚环形板	128
4.9	正交异性环形板塑性极限分析	132
4.10	曲线形板塑性极限分析	136
第五章	非线性折板结构	140
5.1	矩形板的经典解法	140
5.2	矩形板封闭折板结构	143
5.3	变厚度矩形板封闭折板结构	148
5.4	拱与拱型折板结构	154
5.5	拱型折板结构的刚架解法	160
5.6	变厚度拱型折板结构	164
5.7	拱型折板结构的塑性极限分析	171
5.8	各向异性拱型折板结构	176
第六章	非线性旋转壳结构	183
6.1	旋转壳的基本方程	183
6.2	圆柱壳水箱结构的内力分析	188
6.3	圆柱壳水箱结构的精确方法	194
6.4	球壳结构的有矩计算	200
6.5	非线性变厚度球壳结构	204
6.6	变厚度圆锥壳结构	208
6.7	旋转壳结构的优化设计	215
6.8	旋转壳结构的塑性极限分析	220
第七章	非线性扁壳及屋盖结构	225
7.1	矩形底扁壳结构	225
7.2	圆形底扁球壳结构	235
7.3	非线性球形扁壳的精确解法	241
7.4	非线性变壁厚圆柱壳屋盖	249
7.5	扁壳结构塑性极限分析	253
7.6	双曲抛物壳的塑性极限分析	257
7.7	膜结构及其塑性失稳	263
第八章	空间网壳结构	270
8.1	一般柱壳结构的力学分析	270
8.2	网壳结构的比拟方法	274
附录	非线性空间结构分析的数学方法	280
	一、偏微分方程的差分法	280

二、傅里叶级数及展开式	285
三、Euler 方程的特征值解	290
四、非线性微分方程的线性化	294
参考文献	302

第一章 非线性悬索结构

1.1 单索的一般方程

设有如图 1.1 所示的单索微段,微段水平长 dx ,受荷载 $q(x)$ 作用。由静力平衡条件可以列出悬索的平衡方程:

由 $\sum x = 0$, 有

$$\frac{d}{dx}(N \cos \theta) = 0 \quad (1.1)$$

由 $\sum y = 0$, 有

$$\frac{d}{dx}(N \sin \theta) dx + q(x) dx = 0 \quad (1.2)$$

引入悬索的水平张力 H , 它与悬索的张力 N 之间有 $N \cos \theta = H$ 。由式(1.1)可知

$$N \cos \theta = H = \text{const}(\text{常数})$$

将 $N = H / \cos \theta$ 代入式(1.2)中可得

$$H \frac{d}{dx}(\tan \theta) = -q(x) \quad (1.3)$$

如果设索的竖向位移为 w , 则 $\tan \theta = \frac{dw}{dx}$, 代入式(1.3)中, 可得

$$H \frac{d^2 w}{dx^2} = -q(x) \quad (1.4)$$

式(1.4)即为悬索的基本平衡方程式。

在式(1.4)中, 悬索张力 N 的水平分量 H 尽管是常数, 但目前是未知的; 悬索竖向挠度 w 也是未知的, 因此式(1.4)属超静定方程。当 H 可以确定时, 式(1.4)就成为关于 w 的二阶常微分方程, 结合边界条件可以确定出 w 的形式, 并进而获得悬索的新的变形位置。因此有必要再研究悬索的变形及其协调方程。

悬索变形协调方程的物理意义是: 在初始状态时, 外荷载为 $q_0(x)$, 索中张力的水平分量为 H_0 , 对应的索张力为 N_0 , 由垂直挠度 $w_0(x)$ 产生的索长为 S_0 ; 而在荷载为 $q(x)$ 的某一瞬时, 以上各量变成 H, N, S , 则索的增长为

$$\Delta S = S - S_0 \quad (1.5)$$

各 x 点处的索张力增加为

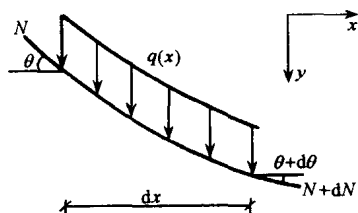


图 1.1 单索微段

$$\Delta N = N(x) - N_0(x) \quad (1.6)$$

从物理意义来看,索长度的增长 ΔS 是由于荷载增加导致索中各点张力 ΔN 增加,因而可以导出其间的关系式。设索在弹性变形阶段的弹性模量为 E ,横截面为 A ,则 $\Delta N(x)$ 产生的伸长为

$$d\Delta S = \frac{dS_0}{EA} \Delta N(x) = \frac{1}{EA} [N(x) - N_0(x)] dS_0 \quad (1.7)$$

则索的伸长与张力之间有关系式

$$\Delta S = \int d\Delta S = \frac{1}{EA} \int [N(x) - N_0(x)] dS_0 \quad (1.8)$$

式(1.8)即为索变形的协调方程。

与索的变形有关的是索的几何方程。索的挠度用 $w(x)$ 表示时,索长度 S 与 w 之间的关系式为

1) 悬索的两支点在相同高度上时,

$$dS = \sqrt{dx^2 + dw^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} dx \quad (1.9)$$

2) 悬索的两支点相差高度为 C 时,

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{C}{l}\right)^2} dx \quad (1.10)$$

式中, l 为悬索两端点之间的水平距离。

以上两式还有另外的表达方法,即将悬索看作两端铰支的简支梁,引入相应的梁的弯矩 M 及剪力 V ,则由图 1.2 可知, x 段左隔离体在 $C=0$ 时,

$$M = R_A x + \left[- \int_0^x (x - \xi) q(\xi) d\xi \right] = H w(x) \quad (1.11)$$

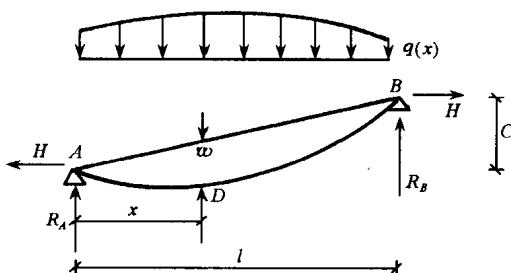


图 1.2 支点不同高的单索

式中, R_A 为 A 点支反力;类似地, B 点支反力为 R_B 。由式(1.11)可以得

$$w(x) = \frac{M(x)}{H} \quad (1.12)$$

即将悬索 AB 视为简支梁时弯矩 $M(x)$ 与挠度 $w(x)$ 成比例。

当 $C \neq 0$ 时,依据 $\sum M_A = 0$,有

$$\int_0^l xq(x)dx + HC - R_B l = 0$$

求得

$$R_B = \frac{1}{l} \int_0^l xq(x)dx + \frac{HC}{l} \quad (1.13)$$

将悬索 AB 看作简支梁时, 荷载 $q(x)$ 在支点产生的支反力用 R'_A, R'_B 表示, 即有悬索支反力

$$\left. \begin{aligned} R_A &= R'_A - \frac{HC}{l} \\ R_B &= R'_B + \frac{HC}{l} \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} R'_A &= \frac{1}{l} \int_0^l q(x)(l-x)dx \\ R'_B &= \frac{1}{l} \int_0^l xq(x)dx \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

图 1.2 中, 在 $C \neq 0$ 时依然截取 x 段左隔离体, 取 $\sum M_D = 0$, 则有

$$R_A x - \int_0^x q(\xi)(x-\xi)d\xi + H \left[\frac{HC}{l} - w(x) \right] = 0 \quad (1.16)$$

通过运算, 简化为

$$Hw(x) = R'_A x - \int_0^x q(\xi)(x-\xi)d\xi \quad (1.17)$$

如此求得 D 点的挠度为

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{M(x)}{H} \\ M(x) &= R'_A x - \int_0^x q(\xi)(x-\xi)d\xi \end{aligned} \quad (1.18)$$

按梁理论中剪力 $V(x)$ 与弯矩 $M(x)$ 之间关系

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx}$$

可引入悬索变形协调方程的另一表达式, 即将梁理论中的剪力 V 代入式(1.9)和式(1.10)中, 分别得出索长公式:

1) 在悬索两支点有相同高度时,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2} dx \\ &= \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2} dx \end{aligned} \quad (1.19)$$

2) 在悬索两支点相差高度 C 时,

$$S = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{V}{H} + \frac{C}{l} \right)^2} dx \quad (1.20)$$

对于小挠度索,即悬索近于水平状,由于 $H = N \cos \theta$, 在 $\cos \theta \approx 1$ 时,则 N 与 H 近似,可认为 N 亦为常数。这时由于

$$\frac{dw}{dx} = \frac{V}{H} = 0$$

将式(1.19)被积函数展开,略去高阶导数项,得索长近似公式为

$$S \approx l + \frac{1}{2H^2} \int_0^l V^2 dx \quad (1.21)$$

类似地,式(1.20)改为

$$S \approx \left(1 + \frac{C^2}{2l^2} \right) l + \frac{1}{2H^2} \int_0^l V^2 dx \quad (1.22)$$

现考察竖向荷载 $q(x)$ 为常数时悬索的变形情况。在索两端高差为 C 时,将 w 改为 z ,由式(1.4)有

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{q}{H}$$

积分两次后,得

$$z = -\frac{q}{2H}x^2 + C_1x + C_2$$

显然这是抛物线表达式。积分常数由边界条件确定,即

$$\begin{aligned} x=0 & \quad z=0 \\ x=l & \quad z=C \end{aligned}$$

从而解出

$$z = \frac{q}{2H}x(l-x) + \frac{C}{l}x$$

在此抛物线方程中,索张力的水平分量 H 是未知的,所以此方程代表一族抛物线。因为通过 A, B 两点可以有不同长度的索,它们在均布荷载作用下形成一族不同垂度的抛物线,具有不同 H 值。由补充条件确定出 H 值后,抛物线形状可以惟一确定。例如曲线在跨中垂度为 f ,那么索内张力为

$$H = \frac{ql^2}{8f}$$

相应的挠度 z 为

$$z = \frac{4fx(l-x)}{l^2} + \frac{C}{l}x$$

按索长公式可以求出 S 为

$$S = l \left(1 + \frac{C^2}{2l^2} + \frac{8f^2}{3l^2} \right)$$

在两端支座等高时, S 为

$$S = l \left(1 + \frac{8f^2}{3l^2} \right)$$

在分析和求解悬索问题时,应将变形协调方程具体化,表达成悬索几何尺寸及内力的相关形式。由于悬索材料的延伸率不大,所以初始荷载下各变量下标加零表示,其中 S_0 及加载下的 S 亦相差不大,可表达成

$$N_0(x) = H_0 \sec \theta = H_0 \frac{dS_0}{dx}$$

$$N(x) = H \frac{dS}{dx} \approx H \frac{dS_0}{dx}$$

那么

$$\begin{aligned} \int_0^l [N(x) - N_0(x)] dS_0 &\approx \int_0^l (H - H_0) \frac{dS_0}{dx} dS_0 \\ &= \int_0^l (H - H_0) \left(\frac{dS_0}{dx} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (1.23)$$

根据 $\frac{dS_0}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{V_0}{H_0} + \frac{C_0}{l_0} \right)^2}$, 式(1.8)可以改写为

$$S - S_0 = \frac{1}{EA} \int_0^l (H - H_0) \left[1 + \left(\frac{V_0}{H_0} + \frac{C_0}{l_0} \right)^2 \right] dx \quad (1.24)$$

小挠度情况下,可以进一步简化式(1.24)。因在小挠度时, $w(x) = \frac{M(x)}{H}$,

$\frac{dw}{dx} = \frac{V}{H}$ 值都很小,实用中一般 $\frac{C}{l}$ 也很小,而且有近似式

$$\begin{aligned} N_0(x) &\approx H_0 & N(x) &\approx H \\ l_0 &\approx l & l_0 &\approx S_0 \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \frac{1}{EA} \int [N(x) - N_0(x)] dS_0 &\approx \frac{1}{EA} (H - H_0) S_0 \\ &= \frac{H - H_0}{EA} l_0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

将关系式

$$\begin{aligned} S &\approx \left(1 + \frac{C^2}{2l^2} \right) l + \frac{1}{2H^2} \int_0^l V^2 dx \\ S_0 &\approx \left(1 + \frac{C_0^2}{2l_0^2} \right) l_0 + \frac{1}{2H_0^2} \int_0^{l_0} V_0^2 dx \end{aligned}$$

与式(1.25)结合,可以得出变形协调式为

$$\frac{C^2 - C_0^2}{2l_0} + \frac{1}{2H^2} \int_0^l V^2 dx - \frac{1}{2H_0^2} \int_0^{l_0} V_0^2 dx = \frac{H - H_0}{EA} l_0 \quad (1.26)$$

式(1.26)在积分之后,化为 H 的三次代数方程,一般用迭代法等数值方法求解 H 值。

悬索问题可归结为求式(1.4)的平衡方程与式(1.26)的变形协调方程。由于式(1.26)通常用数值方法求解,故悬索问题一般用迭代法等求解。这里以承受均布荷载的抛物线悬索为例,说明它的解法。

设在初始状态荷载 q_0 作用下,索中有水平张力 H_0 ,抛物线索跨中垂度 f_0 已确定,即有

$$f_0 = \frac{q_0 l^2}{8H_0}$$

在某一瞬时 q 荷载作用下,抛物线方程为

$$z = \frac{4fx(l-x)}{l^2} + \frac{C}{l}x$$

由剪力公式求出

$$V_0 = \frac{q_0}{2}(l-2x)$$

$$V = \frac{q}{2}(l-2x)$$

将以上两式代入式(1.26),可求出 C 值不变时的 H 为

$$H = H_0 + \frac{EAl^2}{24} \left(\frac{q^2}{H^2} - \frac{q_0^2}{H_0^2} \right)$$

用直接推导 H 的方法,也能获得上式。即在均布荷载下,初始状态和终态下索曲线长度分别为

$$S_0 = l \left(1 + \frac{C_0^2}{2l^2} + \frac{8f_0^2}{3l^2} \right)$$

$$S = l \left(1 + \frac{C^2}{2l^2} + \frac{8f^2}{3l^2} \right)$$

索之伸长量在 C 值不变时为

$$\Delta S = S - S_0 = \frac{8}{3} \times \frac{f^2 - f_0^2}{l^2}$$

于是索的变形协调方程为

$$\frac{H - H_0}{EA} l = \frac{8}{3} \times \frac{f^2 - f_0^2}{l}$$

而由梁的理论及平衡方程可得出

$$f = \frac{ql^2}{8H}$$

最后整理出

$$H - H_0 = \frac{EAl^2}{24} \left(\frac{q^2}{H^2} - \frac{q_0^2}{H_0^2} \right)$$

算例 1.1 两端等高承受均布荷载的抛物线索,截面积 $A = 67.4 \text{ mm}^2$, $E = 180 \text{ kN/mm}^2$, $l = l_0 = 8 \text{ m}$, $H_0 = 10 \text{ kN}$, $q_0 = 0.2 \text{ kN/m}$, $q = 0.5 \text{ kN/m}$ 。求初始状态时

最大垂度 f_0 , 以及最后状态时水平张力 H 、最大垂度 f 。

解 根据荷载情况可知, 初始状态时,

$$M_0(x) = \frac{q_0 x}{2}(l - x) = 0.1x(8 - x)$$

$$f_0 = \frac{M\left(\frac{l}{2}\right)}{H_0} = 0.16\text{m}$$

由 $M_0(x)$ 微分得

$$V_0(x) = 0.8 - 0.2x$$

$$\int_0^l V_0^2 dx = 1.707\text{kN}^2 \cdot \text{m}$$

在最后状态,

$$M(x) = \frac{qx}{2}(l - x) = 0.25x(l - x)$$

$$V(x) = 2 - 0.5x$$

$$\int_0^l V^2 dx = 10.667\text{kN}^2 \cdot \text{m}$$

将以上结果代入关于 H 的协调方程, 得出 H 的三次代数方程为

$$H^3 + 2.94H^2 - 8088 = 0$$

可用迭代法解出索的水平张力 H 为

$$H = 19.14\text{kN}$$

而 f 为

$$f = \frac{M\left(\frac{l}{2}\right)}{H} = 0.209\text{m}$$

式(1.26)是求索中张力经常遇到的式子, 除了以上提到的迭代法外, 还可以用其他比较准确的数值方法求解。这里给出另一种近似解法。如果借用 D 和 D_0 , 分别表示为

$$D_0 = \int_0^{l_0} V_0^2 dx$$

$$D = \int_0^l V^2 dx$$

式(1.26)可改写为

$$\frac{C^2 - C_0^2}{2l_0} + \frac{D}{2H^2} - \frac{D_0}{2H_0^2} = \frac{H - H_0}{EA} l_0 \quad (1.27)$$

如果令 $H - H_0 = \Delta H$, 那么式(1.27)可进一步写为

$$\Delta H = \frac{EA(C^2 - C_0^2)}{2l_0^2} - \frac{D_0 EA}{2H_0^2 l_0} + \frac{DEA}{2(H_0 + \Delta H)^2 l_0}$$

在一般情况下, ΔH 与 H_0 相比是很小的, 因此上式右方可以略去 ΔH , 而求出 ΔH

的一级近似式

$$\Delta H_1 = \frac{EA(C^2 - C_0^2)}{2l_0^2} - \frac{D_0 EA}{2H_0^2 l_0} + \frac{DEA}{2H_0^2 l_0}$$

将这一级近似值代替式(1.27)中右方 $H - H_0$, 可以得出 ΔH 的二级近似值为

$$\Delta H_2 = \frac{EA(C^2 - C_0^2)}{2l_0^2} - \frac{D_0 EA}{2H_0^2 l_0} + \frac{DEA}{2(H_0 + \Delta H_1)^2 l_0}$$

依次类推, 可以求得 ΔH 至精确值。这种方法称为渐近法或逼近法。由精确值 ΔH 可以求出精确值 H 。

1.2 辐射式悬索结构

辐射式悬索结构是悬索结构中常用的形式, 一般由外环、内环及辐射索系组成, 如图 1.3 所示。本节讨论它在弹性范围内的内力及位移。

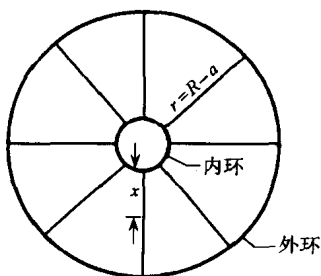


图 1.3 辐射式悬索结构

辐射式结构设计和计算中, 每根悬索的两个支承点都是一个在外环上, 一个在内环上。外环的支座是不能产生变位的, 内环的支座则可能产生位移。一般情况下, 加载后内环移到某一固定位置时, 即可决定各索在内环的位置, 从而可以决定所有索的内力。辐射式悬索结构的求解核心是内环的位移。

如果考虑内环重心 3 个线位移, 即垂直位移 $\Delta(z)$ 、水平位移 $h(x)$ 和 $v(y)$, 同时有 3 个角位移, 分别用 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ 表示, 则辐射式悬索的内环共有 6 个独立的位移。如果以上 6 个位移已知, 则每索张力可以求得。当每索张力为已知时, 即可求得各索对内环在 x, y 和 z 轴的分力以及对内环 3 个轴的力矩。

这时可以列出求解 6 个位移的静力平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \sum X_i &= 0 & \sum M_{xi} &= 0 \\ \sum Y_i &= 0 & \sum M_{yi} &= 0 \\ \sum Z_i &= 0 & \sum M_{zi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

式中, $X_i, Y_i, Z_i, M_{xi}, M_{yi}, M_{zi}$ 都可表为 $\Delta, h, v, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ 的函数。

一般地, α_z 是高阶小量, 对索中张力影响可以略去, 位移能减少到 5 个。

当结构具有一个对称轴, 例如 y 轴时, 内环仅有 3 个位移 Δ, h, α_y 。式(1.28)改为

$$\left. \begin{aligned} \sum X_i &= 0 \\ \sum Z_i &= 0 \\ \sum M_{yi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

在辐射式悬索结构中,最常见的是结构与荷载都关于 z 轴为轴对称的情形,即关于垂直位移的几何中心轴为轴对称的情形,下面着重对此进行分析。

设内环圆半径为 a ,外环圆半径为 R ,每索平面长度为 r ,并有 $r=R-a$ 。考虑到轴对称情况,每根索的应力和变形都是相同的,故计算时只须考虑一根索就可以了。如果内外环高差在加载前为 C ,加载后外环固定,内环下移为 Δ ,则新的内外环高差为 $C_1=\Delta+C$ 。

设每根索的截面积为 A ,分配于每索内环重度为 g ,索上承受 $q_0(x,\theta)$ 的面荷载,如果共有 n 根索作为承力构件,那么每根索单位长度承受的面荷载 $q(x)$ 为

$$q(x) = \frac{2\pi(x+a)}{n} q_0(x, \theta) \quad (1.30)$$

沿每索 dx 段上的荷载为 dq ,并有

$$dq = q(x)dx = \frac{2\pi(x+a)}{n} q_0(x, \theta) dx \quad (1.31)$$

如将索看作简支梁,可以求得 x 处剪力为

$$V(x) = \frac{1}{r} \int_0^r (r-x)q(x)dx - \int_0^x q(x)dx \quad (1.32)$$

设初始状态外部荷载为零,即 $q_0(x)=0$,按简支梁分析索的支反力为零。由式(1.14)可求出悬索在内环支点的反力为

$$R = -\frac{H_0 C}{r} \quad (1.33)$$

式中, H_0 为初始状态每根索的水平张力。根据悬索在内环竖向合力的平衡条件可得

$$\left. \begin{aligned} -\frac{H_0 C}{r} + g &= 0 \\ C &= \frac{gr}{H_0} \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

即当 H_0 为已知时,内环的位置 C 可从上式得出,这时悬索呈直线形状。

当加荷 $q(x)$ 之后,内环下移至 C_1 ,索的张力增加到 H ,即 $H=H_0+\Delta H$,代入式(1.27)变形协调方程得

$$H = H_0 + \Delta H = H_0 + \frac{EA(C_1^2 - C_0^2)}{2r^2} + \frac{EA}{2H^2 r} \int_0^r V^2 dx \quad (1.35)$$

悬索在内环支座的反力为

$$R = \frac{1}{r} \int_0^r (r-x)q(x)dx - \frac{HC_1}{r} \quad (1.36)$$

再由内环竖向平衡条件得

$$R + g = \frac{1}{r} \int_0^r (r-x)q(x)dx + g - \frac{HC_1}{r} = 0 \quad (1.37)$$

由式(1.35)与式(1.37)可求两个未知数 H 和 C_1 。