

施工结构 计算方法 与设计手册

● 徐伟 吕凤梧 等编著

中国建筑工业出版社

施工结构计算方法与设计手册

徐 伟 吕凤梧 等编著

中国建筑工业出版社

(京) 新登字 035 号

图书在版编目 (CIP) 数据

施工结构计算方法与设计手册/徐伟等编著. -北京: 中国建筑工业出版社, 1998
ISBN 7-112-03649-6

I. 施… II. 徐… III. ①建筑构造-结构设计-手册②建筑构造-计算方法-手册
IV. TU31-62

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 26220 号

本书是为满足目前施工实践的需要而编制的, 是一本全面介绍施工结构的计算方法与设计的工具书。主要内容包括: 变分法和能量原理, 平面杆系结构分析基础, 有限单元法基础, 土的本构关系及非线性分析方法, 软土地基深基坑支护结构的分析计算, 脚手架、模板工程与垂直运输系统的结构设计, 深基坑挡土支护结构体系的可靠度, 施工结构中钢筋混凝土构件设计, 施工结构中钢结构构件的设计及施工结构计算常用图表等。

本书可作为施工企业、设计单位工作人员以及大专院校相关专业师生的参考书。

施工结构计算方法与设计手册

徐伟 吕凤梧 等编著

*

中国建筑工业出版社出版、发行 (北京西郊百万庄)

新华书店经销

北京市兴顺印刷厂印刷

*

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张 44 字数 1094 千字

1999 年 1 月第一版 1999 年 1 月第一次印刷

印数 1—3000 册 定价 61.00 元

ISBN 7-112-03649-6

TU·2810 (8932)

版权所有 翻印必究

如有印装质量问题, 可寄本社退换

(邮政编码 100037)

前 言

我们在参与施工领域的教学、科研实践中感到，当前祖国现代化建设飞速发展，建筑业正以它自身的特点服务于欣欣向荣的国家建设事业，并且其本身也获得了不断地壮大。建筑施工领域的进步，主要反映在施工工艺技术水平的提高上，其标志是我们已经能够建造世界级高度和难度的建筑物和构筑物，能在各种复杂的地质情况中完成各类结构的施工和构筑，在建筑、水利、基础等结构施工中各种新技术、新工艺不断涌现，施工领域的技术水平和整体实力已经接近和达到国际先进水平，在这种形势下我们认为施工实践第一线很需要有一定理论水平、符合目前施工实践应用需要的、介绍施工结构设计方法的工具书，为此我们最近一个时期内，研究探索了一些立足于解决结构物基础施工、上部结构施工经常遇到的施工结构问题的方法，并对建设项目施工技术方案的施工组织设计的计算机辅助设计系统作了一些试验开发，但由于建筑施工领域的科学研究发展迅速，限于我们的水平，仅在施工结构的设计方法和一些例子作初略的叙述，其中有很多不完善的地方，需要进一步研究。

本书由同济大学建筑工程系徐伟、吕凤梧等编著，具体分工如下：绪论、第八章由徐伟、吕凤梧编写，第一、二章由吕凤梧、徐伟编写，第三、四章由陈伟、徐伟编写，第五章由吕凤梧、徐伟、陈伟、于晓音编写，第六章由徐伟、赵志缙、赵帆、孙仓龙、蒋宜翔、王国柱、李磊编写，第七章由陈震、徐伟编写，第九章由李建伟、孙仓龙、端木怡雯、徐伟、张建勋、刘匀编写，第十章由胡晓依、赵帆、赵志缙、李建伟、徐伟、万红编写，全书由徐伟、吕凤梧两位同志作了审校和统一加工。在本书编写过程中得到了各有关方面的大力支持，在此表示衷心的感谢。

本书可作为施工企业和设计单位工作人员以及大专院校有关专业师生的参考书。

由于时间局促、水平有限，本书在理论阐述、设计方法的叙述中，都会存在不少缺点和错误，恳请读者批评指正。

目 录

绪论	1	分析计算	117
第一章 变分法和能量原理	2	第一节 基坑工程概述	117
第一节 外力功和应变能	2	第二节 杆系有限单元分析方法	121
第二节 变分法简介	5	第三节 平面有限单元分析方法及程 序设计	136
第三节 虚功原理	10	第四节 软土地基深基坑支护结构的 空间分析	183
第四节 最小势能原理	12	第五节 土体流变性对支护结构内力 和变形的影响	196
第五节 最小余能原理	17	第六章 脚手架模板工程与垂直 运输系统的结构设计	207
第六节 卡氏定理	18	第一节 脚手架的分类和设置要求	207
第七节 线弹性体系的互等定理	20	第二节 常用脚手架的基本结构 和构造	212
第二章 平面杆系结构分析基础	23	第三节 脚手架的设计计算	222
第一节 平面杆系结构的变形分析	23	第四节 模板与扣件式钢管脚手架 计算	232
第二节 平面杆系结构的静力分析	27	第五节 桁架式爬升脚手架计算 实例	252
第三节 平面杆系结构的简化计算	28	第六节 单跨套筒式爬升脚手架 计算实例	268
第四节 杆件的物理方程	33	第七节 垂直运输体系的结构设计	288
第三章 有限单元法基础	43	第八节 脚手架、模板工程新技术	296
第一节 有限单元法概述	43	第七章 深基坑挡土支护结构体系 的可靠度	298
第二节 平面有限单元法的基本方程	44	第一节 深基坑挡土支护结构体系的可靠 度分析	298
第三节 有限元法的单元位移函数选 择及解答的收敛性问题	45	第二节 深基坑挡土支护结构体系的可靠 度计算	303
第四节 平面分析中的矩形单元和 等参数四边形单元	47	第八章 施工结构中钢筋混凝土 构件设计	309
第五节 空间有限元法的基本方程	68	第一节 施工结构的基本设计原则	309
第六节 空间分析中的长方体单元和 等参数任意形状六面体单元	70	第二节 受弯构件正截面承载力 计算	314
第四章 土的本构关系及非线性 分析方法	101	第三节 受弯构件斜截面的承载	
第一节 材料的典型应力 -应变关系	101		
第二节 土的强度和变形概述	102		
第三节 土的线性本构关系	102		
第四节 土的非线性弹性本构关系	105		
第五节 土的弹塑性本构关系	108		
第六节 土的非线性分析的一般 方法	109		
第五章 软土地基深基坑支护结构的			

力计算	328	和柱	450
第四节 受扭构件扭曲截面承载力 计算	337	第四节 钢构件的塑性设计	477
第五节 受压构件的受压承载力 计算	346	第五节 组合结构	479
第六节 受拉构件的承载力计算	378	第六节 钢材的选用	485
第七节 钢筋混凝土构件裂缝宽度和 变形验算	381	第十章 施工结构计算常用图表与 方法	493
第九章 施工结构中钢结构构件 的设计	388	第一节 荷载用表	493
第一节 钢结构的连接	388	第二节 结构静力计算用表	502
第二节 受弯构件——梁	425	第三节 结构计算用表	540
第三节 施工结构中的拉杆、压杆		第四节 其它用表	622
		第五节 计算方法	626
		参考文献	693

绪 论

随着我国经济体制改革的深化,各项建设事业蒸蒸日上,建筑施工领域在祖国经济建设的促进下也取得了长足的进步,施工领域的技术发展已经到了一个崭新的阶段,其科学技术和整体实力已接近和达到国际先进水平,我们成功地建造了大量高耸结构、大跨结构、深基础结构,其难度和施工水平均体现了我国建筑业发展程度,令世界同行瞩目。施工技术的发展也推动了施工领域的科学技术研究工作,并对科研提出了很高的要求,特别是在施工技术方案的设计中,新工艺、新技术对设计提出了许多新的研究课题,将这些课题归拢起来,我们发现关于施工结构的准确设计方法,已成为施工领域工程实践中迫切需要解决的问题。在理论和实践中解决这一问题,将有助于施工技术的进一步发展。

施工结构是指以建造新的建筑物或构筑物为目的而构筑或搭设的结构和与之相互影响的岩土或其它结构物。它可以是一种临时结构,也可以成为新建的建筑物或构筑物永久结构中的一部分。在以前的施工工艺中,施工结构大多用于搭设模板和脚手架,用于基坑施工的辅助措施也是简单的支护结构,实践中常将它们简化为单根的压杆、简支的桁架、多跨的连续梁等,认为这样的计算假定已足够精确,用于工程可以满足实际需要。随着新工艺、新技术的涌现,上述方法显然已无法适应现代化施工的需要,我们需要保留一部分传统的计算方法,因为它们简便、实用,但我们还要探索一些新的理论和实践,以满足日益发展的工程技术要求,比如目前大量采用的整体提升或爬升的脚手架,如不采用空间桁架的计算模式来验算显然不很安全,大型的深基坑工程已不能将支撑结构简化成单根多跨的连续压杆来作围护壁的支撑。我们可以优化施工结构,使之为施工创造优良的外部环境,尽量降低施工成本、加快施工速度。我们也可以利用欲建造的永久结构的一部分来为施工服务,使之优化工艺过程,低耗优质地实现项目施工。近年来世界上建筑业的CM管理模式逐步受到青睐,正由于是它考虑了现代化大型建筑物设计和施工的有机结合,使得项目的设计和施工更趋合理,当然在这样的管理模式中对施工技术设计的要求也就更高。

目前我国施工领域的高级工程技术人材开始聚集,省市级的建筑施工企业都已形成大集团经营模式,企业内部技术管理的硬件条件已具有相当规模,因此施工企业已有提高计算技术的条件和需要。我们的建筑企业在积极参与国际和国内建筑市场的竞标过程中与国际建筑集团在整体实力上也不相上下,但在竞争中反映出我们虽然有硬件条件,但在系统地应用这些条件方面还有差距,所以我们要加快在施工技术领域的理论研究,提高工程技术人员的理论修养和力学基础,这也是施工结构设计方法发展的现实需要。为此我们将在书中讨论一些基本的力学理论和有限元方法,提出深基坑施工结构的设计方法、施工结构的安全度问题,介绍模板、脚手架结构的计算实例和基本的钢筋混凝土结构构件和钢结构构件的设计方法,并提供了一些传统的施工结构计算方法和计算用表。我们相信在蓬勃发展的建设事业带动下,我国的施工结构设计理论和施工科学技术水平将会不断地发展提高。

第一章 变分法和能量原理

能量原理是各种结构近似分析方法的基础，因此，要掌握结构的数值分析方法，必须很好地掌握能量原理。变分法是能量原理应用的数学基础。

第一节 外力功和应变能

一、功和余功

一个物体在外力作用下产生了位移，我们就说力在位移上做了功。理论力学中定义，力所做的功就是力在其作用点运动方向上的投影与该点运动路程的乘积，即

$$T = \int_S dT = \int_S P \cos(P, v) dS \quad (1-1)$$

式中 T ——力 P 所做的功；

(P, v) ——力 P 与其作用点运动方向的夹角；

S ——运动路程。

一般说来，力所做的功与其作用点的运动路线的形状、路程的长短有关。但对于大小和方向都不变的力，其所做的功则只与其作用点的起迄位置有关。

若体系上作用一常力 P ，力的作用点发生与力的方向相同的位移 Δ ，则由式 (1-1) 可知该力所做的功为

$$T = \int_{\Delta} P dS = P\Delta \quad (1-2)$$

在结构静力分析中，作用在结构上的外力 P 就是静力荷载，该力由零逐渐增加到 P ，与此相对应，荷载作用点沿荷载作用方向的位移也由零逐渐增加到 Δ ，体系的荷载-位移曲线见图 1-1。

假定荷载从零开始增加到 P 的过程中某一时刻的值为 F ，荷载作用点沿荷载作用方向的相应位移为 λ 。当外荷载由 F 增加到 $(F+dF)$ 时，相应的位移也由 λ 增加到 $(\lambda+d\lambda)$ 。此时，如果忽略荷载增量 dF 在位移增量 $d\lambda$ 上所做的功（是二阶微量），则荷载 F 所做的功为

$$dT = Fd\lambda \quad (1-3)$$

上式积分后，得外荷载 P 所做的总功为

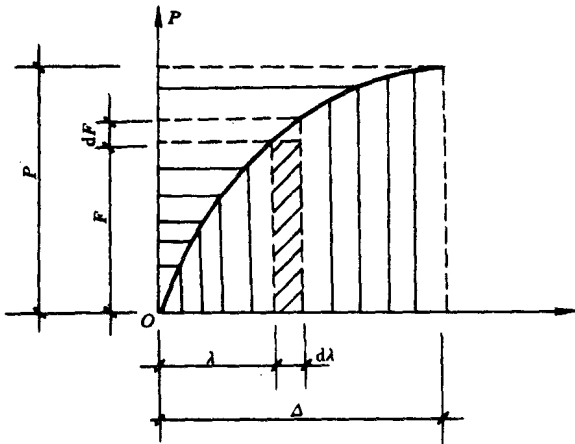


图 1-1 P - Δ 曲线

如果忽略荷载增量 dF 在位移增量 $d\lambda$ 上所做的功（是二阶微量），则荷载 F 所做的功为

$$T = \int dT = \int_0^{\Delta} F d\lambda \quad (1-4)$$

其几何意义就是图 1-1 中荷载-位移曲线下面阴影部分的面积。

对于线性体系，虎克定律满足，即位移与荷载成比例。

$$\lambda = \delta F \quad (1-5)$$

式中 δ ——体系的柔度系数，即作用力等于 1 时，体系在荷载作用点沿荷载作用方向的位移。

由 $F=P$ 时 $\lambda=\Delta$ ，可得 $\delta=\Delta/P$ ，将式 (1-5) 代入 (1-4)，得

$$T = \int_0^{\Delta} \frac{P}{\Delta} \lambda d\lambda = \frac{1}{2} P \Delta \quad (1-6)$$

需要指出，上述推导过程中， P 是广义力， Δ 是与广义力对应的广义位移。例如，若 P 是力矩，则 Δ 是与力矩相应的角位移。

当线性体系上有若干个外力共同作用时，外力所做的总功为

$$T = \frac{1}{2} P_1 \Delta_1 + \frac{1}{2} P_2 \Delta_2 + \cdots + \frac{1}{2} P_n \Delta_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i \quad (1-7)$$

注意式中的 Δ_i 是所有外力共同作用时， P_i 作用点沿 P_i 作用方向的位移。

由功的定义可见，外力功与外力（或位移）呈非线性关系，所以，对功不能应用叠加原理。

在图 1-1 中，荷载-位移曲线上方的阴影面积定义为余功，用 T^* 表示，即

$$T^* = \int_0^P \lambda(F) dF \quad (1-8)$$

可见

$$T + T^* = P \Delta \quad (1-9)$$

对于线性体系，有

$$T = T^*$$

二、应变能和余应变能

加载过程中，作用在体系上的外力所做的功通过体系的变形转化为一种能量储存在体系内部；卸载过程中，这种能量又通过消除体系的变形释放出来。这种因体系的变形而储存或释放的能量，称为体系的应变能，通常用 U 表示。单位体积储存的应变能，称为应变能密度，通常用 \bar{U} 表示。

一般情况下，对于三维的弹性体，其应变能密度可表示成

$$\bar{U} = \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x d\epsilon_x + \int_0^{\epsilon_y} \sigma_y d\epsilon_y + \int_0^{\epsilon_z} \sigma_z d\epsilon_z + \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \int_0^{\gamma_{yz}} \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \int_0^{\gamma_{zx}} \tau_{zx} d\gamma_{zx} \quad (1-10)$$

简写成矩阵形式，有

$$\bar{U} = \int_0^{(\epsilon)} \{\sigma\}^T d\{\epsilon\} \quad (1-11)$$

式中 $\{\sigma\} = \{\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}\}^T$

$\{\epsilon\} = \{\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}\}^T$

应变能为

$$U = \int_V \bar{U} dV \quad (1-12)$$

式中 V ——弹性体体积。

当虎克定律适用时, 式 (1-12) 化为

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV \quad (1-13)$$

上式写成矩阵形式

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV \quad (1-14)$$

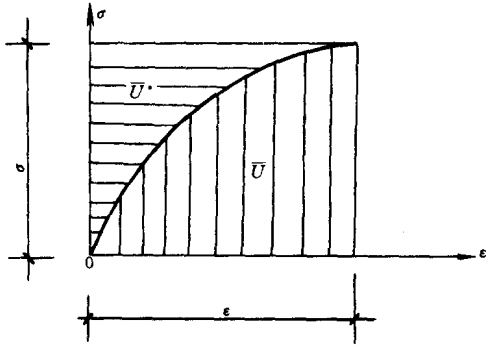


图 1-2 σ - ε 曲线

应变能密度 \bar{U} 的几何意义是图 1-2 中 σ - ε 曲线下方的阴影面积。图中曲线上的阴影面积定义为余应变能密度, 用 \bar{U}^* 表示。

$$\bar{U}^* = \int_0^{(\sigma)} \{\varepsilon\}^T d\{\sigma\} \quad (1-15)$$

余应变能为

$$U^* = \int_V \bar{U}^* dV \quad (1-16)$$

应力-应变 (应变-应力) 关系可由下式给

出

$$\{\sigma\} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \{\varepsilon\}} \quad (1-17a)$$

$$\{\varepsilon\} = \frac{\partial \bar{U}^*}{\partial \{\sigma\}} \quad (1-17b)$$

应变能密度和余应变能密度满足

$$\bar{U} + \bar{U}^* = \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} \quad (1-18)$$

下面推导线弹性直杆的应变能表达式。

1. 轴向应变能 U_N

由材料力学知, 直杆在轴向力作用下, 有

$$\sigma_x = \frac{N}{A}, \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

所以, 杆件的应变能为

$$\begin{aligned} U_N &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{\sigma_x^2}{E} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l dx \left(\int_A \frac{N^2}{EA^2} dA \right) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EA} dx \end{aligned} \quad (1-19)$$

2. 弯曲应变能 U_M

由材料力学知, 对于直杆的弯曲, 有

$$\sigma_x = \frac{MZ}{I}, \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

上式代入式 (1-13), 得

$$\begin{aligned} U_M &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{\sigma_x^2}{E} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l dx \left(\int_A \frac{M^2 Z^2}{EI^2} dA \right) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx \end{aligned} \quad (1-20)$$

3. 剪切应变能 U_Q

直杆在剪力 Q 作用下产生的应力如下:

$$\tau_{xy} = \frac{QS}{Ib} \frac{(y)}{(y)}, \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

其应变能为

$$\begin{aligned} U_Q &= \frac{1}{2} \int_V \tau_{xy} \gamma_{xy} dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{\tau_{xy}^2}{G} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l dx \left(\int_A \frac{Q^2 S^2(y)}{GI^2 b^2(y)} dA \right) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{Q^2}{GI^2} dx \left(\int_A \frac{S^2(y)}{b^2(y)} dA \right) \end{aligned}$$

记 $k = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{S^2(y)}{b^2(y)} dA$, 则

$$U_Q = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{kQ^2}{GA} dx \quad (1-21)$$

式中 G ——材料的剪切模量。

系数 k 是一个只与截面形状有关的无量纲数。对于矩形截面 $k=1.2$; 对于圆形截面 $k=10/9$; 对于工字形截面, 近似地取 $k=A/A_s$, 其中 A 为整个横截面面积, A_s 为腹板的面积。

对于小变形, 直杆在轴力作用下, 只产生轴向变形; 在弯矩作用下, 只产生弯曲变形; 在剪力作用下, 只产生剪切变形。也就是说, 三者做功彼此互不干扰, 所以直杆的应变能为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{kQ^2}{GA} dx \quad (1-22)$$

平面杆系结构由若干杆段组成, 整个结构的应变能应为各杆段应变能之和。所以, 整个结构的应变能为

$$U = \frac{1}{2} \sum \int \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \sum \int \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \sum \int \frac{kQ^2}{GA} dx \quad (1-23)$$

由上式可见, 杆系结构的应变能是内力的二次函数, 因此, 变形能的计算不能应用叠加原理。

三、外力功和应变能的关系

受静力荷载作用的线弹性变形体系, 在变形过程中没有动能的变化, 如果忽略变形过程中的热能损失, 那么, 根据能量守恒定律, 变形过程中外力做的功完全转化为体系的应变能, 即

$$T = U \quad (1-24)$$

将式 (1-7) 和式 (1-23) 代入上式后, 展开为

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i = \frac{1}{2} \sum \int \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \sum \int \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \sum \int \frac{kQ^2}{GA} dx \quad (1-25)$$

第二节 变分法简介

一、引言

工程中的许多问题, 都可以化成极值问题求解。除了求函数 $y=f(x)$ 的极值外, 我们还会经常碰到泛函的极值。所谓泛函就是函数的函数, 也就是说是以一个或几个函数作为

自变量的函数。其数学定义如下：

如果对于某一类函数 $y(x)$ 中的每一个函数 $y(x)$ ，变量 Π 均有一个值与之相对应，则变量 Π 就称为函数 $y(x)$ 的泛函。写为

$$\Pi = \Pi[y(x)] \quad (1-26)$$

例如，连接平面上两点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) ，作一曲线 $y=y(x)$ ，曲线的长度为

$$L = L[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2} dx \quad (1-27)$$

L 就是 $y(x)$ 的泛函，因为长度值 L 由函数 $y(x)$ 的选择来确定。

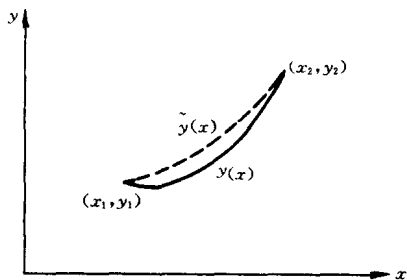


图 1-3

显然，对于不同的曲线 $y=y(x)$ ，有不同的长度 L 值与之对应，如果欲求使长度 L 为最小的那条曲线，这就是求泛函极值的问题。凡是有关求泛函极值的问题都称为变分问题，变分法就是研究确定泛函极值的基本方法。

二、变分的定义

上面提出的最短曲线问题是变分法中最简单的问题，为了定义的方便和清晰，我们仍取该问题作为例子。该问题可概括为：

求使泛函

$$\Pi = \Pi[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (1-28)$$

在边界条件

$$y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2 \quad (1-29)$$

下取极小值的函数 $y(x)$ 。

假定上述问题的正确解为 $y=y(x)$ ，记满足边界条件 (1-29) 的 $y(x)$ 的邻近函数为 $\tilde{y}(x)$ ， $\tilde{y}(x)$ 与 $y(x)$ 之差就称为自变函数 $y(x)$ 的变分，用 δy 表示，即

$$\delta y = \tilde{y}(x) - y(x) \quad (1-30)$$

δy 也是 x 的函数，它在 x 的可取域内都是微量。

同样， $y(x)$ 的斜率与 $\tilde{y}(x)$ 的斜率之差称为 $y(x)$ 斜率的变分，用 $\delta y'$ 表示，即

$$\delta y' = \tilde{y}'(x) - y'(x) \quad (1-31)$$

由式 (1-30) 知

$$(\delta y)' = \tilde{y}'(x) - y'(x) \quad (1-32)$$

比较式 (1-31) 和式 (1-32)，得

$$\delta y' = (\delta y)' \quad (1-33)$$

因此，变分和微分的过程可以互换

当 y 增加 δy ， y' 增加 $\delta y'$ 时，函数 $F[x, y(x), y'(x)]$ 的增量为

$$\Delta F = F[x, y + \delta y, y' + \delta y'] - F[x, y, y'] \quad (1-34)$$

将 $F[x, y + \delta y, y' + \delta y']$ 按泰勒级数展开

$$F[x, y + \delta y, y' + \delta y'] = F[x, y, y'] + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right)$$

$$+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \delta y'^2 \right) + \dots \quad (1-35)$$

所以

$$\Delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \delta y'^2 \right) + \dots \quad (1-36)$$

记

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \quad (1-37a)$$

$$\delta^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \delta y'^2 \quad (1-37b)$$

.....

δF 称为 F 的一阶变分, $\delta^2 F$ 称为 F 的二阶变分, 依次类推, F 的 n 阶变分为

$$\delta^n F = \delta(\delta^{n-1} F) \quad (1-38)$$

从而

$$\Delta F = \delta F + \frac{1}{2!} \delta^2 F + \dots \quad (1-39)$$

下面考查泛函 Π 的增量。

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= \Pi[y(x) + \delta y(x)] - \Pi[y(x)] \\ &= \int_{x_1}^{x_2} F[x, y + \delta y, y' + \delta y'] dx - \int_{x_1}^{x_2} F[x, y, y'] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \Delta F dx \end{aligned} \quad (1-40)$$

将式 (1-39) 代入式 (1-40) 后, 得

$$\Delta \Pi = \int_{x_1}^{x_2} (\delta F + \frac{1}{2!} \delta^2 F + \dots) dx \quad (1-41)$$

记

$$\delta \Pi = \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx \quad (1-42a)$$

$$\delta^2 \Pi = \int_{x_1}^{x_2} \delta^2 F dx \quad (1-42b)$$

.....

$\delta \Pi$ 称为泛函 Π 的一阶变分, $\delta^2 \Pi$ 称为 Π 的二阶变分, 类似地, Π 的 n 阶变分定义为

$$\delta^n \Pi = \int_{x_1}^{x_2} \delta^n F dx \quad (1-43)$$

从而

$$\Delta \Pi = \delta \Pi + \frac{1}{2!} \delta^2 \Pi + \dots \quad (1-44)$$

三、欧拉方程

作函数

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \delta y(x) \quad (1-45)$$

式中 α ——与 x 无关的参数。

当 α 的绝对值很小时, $y = y(x, \alpha)$ 就是满足边界条件 (1-29) 的在 $y = y(x)$ 附近的曲线族方程。

将式 (1-45) 代入式 (1-28) 后, 得

$$\Pi(\alpha) = \Pi[y(x, \alpha)] = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)] dx \quad (1-46)$$

如果 $y=y(x)$ 是使泛函 $\Pi[y(x)]$ 取极小值的解, 那么, $\Pi(\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 时取极小值, 由微积分学知

$$\Pi'(0) = 0 \quad (1-47)$$

由式 (1-46) 得

$$\begin{aligned} \Pi'(\alpha) &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F[x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)]}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F[x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)]}{\partial y'} \delta y' \right\} dx \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \Pi'(0) &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y'} \delta y' \right\} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx = \delta \Pi \end{aligned} \quad (1-48)$$

结合 (1-47) 和 (1-48) 可见, Π 在边界条件 (1-29) 下取极小值的必要条件为

$$\delta \Pi = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = 0 \quad (1-49)$$

应用分部积分公式

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y \right] dx$$

并注意到边界条件

$$\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$$

式 (1-49) 简化为

$$\delta \Pi = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0 \quad (1-50)$$

由于变分 δy 是任意函数, 所以

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (1-51)$$

式 (1-51) 是使泛函 $\Pi[y(x)]$ 取极小值的 $y(x)$ 必须满足的微分方程, 这样, 就把求解泛函 (1-28) 的驻值问题归结为在边界条件 (1-29) 下求解微分方程 (1-51)。这类从变分泛函而得到的微分方程统称为欧拉方程。

式 (1-51) 中的第二项是对 x 的全导数, 将其展开后, 欧拉方程又可写为

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \frac{\partial y'}{\partial x} = 0 \quad (1-52)$$

欧拉方程 (1-52) 只是泛函 $\Pi[y(x)]$ 有极值的必要条件, 要判别解 $y(x)$ 究竟使 $\Pi[y(x)]$ 为极大还是极小, 还需要进一步考察 $\Pi[y(x)]$ 的二阶变分 $\delta^2 \Pi$ 的符号。

对于任意的 δy , 如果 $\delta^2 \Pi > 0$, 则 Π 有极小值; 反之, 如果 $\delta^2 \Pi < 0$, 则 Π 有极大值。

对于本节最初提出的最短曲线问题, 由式 (1-27) 知:

$$F(x, y, y') = \sqrt{1+y'^2}$$

所以, 欧拉方程 (1-52) 成为

$$y''=0$$

其通解为

$$y=C_1x+C_2$$

利用边界条件 (1-29) 确定积分常数 C_1 、 C_2 后, 得

$$y-y_1 = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} (y_2-y_1)$$

可见, 解是连接两已知点的直线。由

$$\delta^2\Pi = \int_{x_1}^{x_2} [1+y'^2]^{-\frac{3}{2}} (\delta y')^2 dx > 0$$

可知, 这时 Π 取极小值。

当泛函有 n 个自变函数时, 即

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi[y_1, y_2, \dots, y_n] \\ &= \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx \end{aligned} \quad (1-53)$$

同样用上述方法进行讨论, 得泛函 Π 取极值的必要条件为

$$\delta\Pi = 0 \quad (1-54)$$

$$\text{或} \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_1} \right) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_2} \right) &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial F}{\partial y_n} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_n} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-55)$$

这是 n 个二阶微分方程, 其解由以下 $2n$ 个边界条件确定。

$$\left. \begin{aligned} y_1(x_1) &= y_{11}, y_1(x_2) = y_{12} \\ y_2(x_1) &= y_{21}, y_2(x_2) = y_{22} \\ \dots\dots\dots \\ y_n(x_1) &= y_{n1}, y_n(x_2) = y_{n2} \end{aligned} \right\} \quad (1-56)$$

对于依赖于高阶导数的泛函, 即

$$\Pi = \Pi[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}] dx \quad (1-57)$$

进行类似的讨论, 并反复进行分部积分, 可得作为泛函 Π 取极值必要条件的欧拉方程为

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) = 0 \quad (1-58)$$

这是一个 $2n$ 阶的常微分方程, 其解由以下 $2n$ 个边界条件完全决定。

$$\left. \begin{aligned} y(x_1) = y_1, y'(x_1) = y'_1, \dots, y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)} \\ y(x_2) = y_2, y'(x_2) = y'_2, \dots, y^{(n-1)}(x_2) = y_2^{(n-1)} \end{aligned} \right\} \quad (1-59)$$

第三节 虚功原理

虚功原理是应用范围很广的一个能量原理，它是利用功和能的概念来描述和研究刚体体系、弹性变形体系的平衡问题。因此，虚功原理是许多方法方法的基础。

一、虚位移和虚功

在介绍虚位移和虚功之前，我们首先介绍一个“约束”的概念。所谓“约束”就是指体系中限制物体位置或运动的装置。比如说，图 1-4 中体系内部杆件与杆件之间的连接——C 点的铰，杆件与基础的连接——A 点的铰，B 及 D 点的链杆，都是施加在体系上的约束。

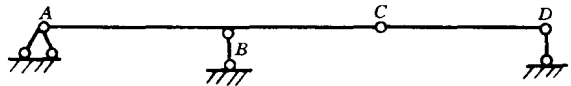


图 1-4 约束

虚位移就是指约束条件所允许的虚设的无限小位移。例如，图 1-5 (a) 所示的简支梁，杆端虚位移可以是微小的转角 $d\theta$ ，但不能是竖向线位移；如果杆端的竖向约束用力 R 代替后，那么该杆端可以取竖向的虚位移 dv (图 1-5 (b))。



图 1-5 虚位移

虚功是体系上的力在体系发生虚位移的过程中所做的功。

虚功和虚位移是相对于体系的实功和真实位移而言的，所谓的“虚”是指力与位移无关。应该讲，在确定的荷载和初始条件下，体系的真实位移通常只有一个，但虚位移可有无穷多种。在实际应用中，我们应该选择能最方便简化计算的虚位移。

二、虚功原理

刚体体系的虚功原理可表述如下：

刚体体系处于平衡的充分必要条件是，对于符合约束条件的虚位移，刚体体系上所有外力所做的虚功总和等于零。

虚功原理可以推广到一般的变形体情况，这时，我们不仅要考虑外力的虚功，而且还要考虑与内力有关的虚功。变形体系的虚功原理表述如下：

变形体系处于平衡的充分必要条件是，对于符合约束条件的虚位移，变形体系上所有外力所做的虚功之和等于内力所做的虚功之和。即

$$\delta W = \delta U \quad (1-60)$$

式中 δW ——外力在虚位移上所做的虚功之和；

δU ——内力所做的虚功之和，即虚应变能。

式 (1-60) 称为变形体系的虚功方程。

我们注意到，刚体体系的虚功原理只是变形体系虚功原理的一种特例。因刚体体系发生虚位移时，刚体本身并不产生变形，故内力虚功为零，于是 $\delta W=0$ ，即刚体体系上所有外力所做的虚功总和等于零。

变形体系虚功原理适用于线性弹性、非线性弹性、弹塑性及塑性等变形体系。

三、虚功原理的应用形式

由于虚功方程中，力系和位移是独立无关的，因此，在应用中，既可以把位移看作是虚设的，也可以把力系看作是虚设的，根据虚设对象的不同，虚功原理主要有以下两种应用形式：

1. 虚设位移，求未知力

这是在虚设的位移状态和实际给定的力系之间应用虚功原理，这种形式的虚功原理称为虚位移原理。

例如，要求图 1-6 (a) 所示简支梁的 C 截面弯矩 M_C 。首先用未知力 M_C 代替 C 截面的弯曲约束，形成图 1-6 (b) 所示的体系，令体系上的力在图 1-6 (c) 所示的虚位移上做功，建立虚功方程为

$$M_C (\alpha + \beta) - m\alpha = 0$$

$$\text{即 } M_C \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \delta - m \frac{\delta}{a} = 0$$

$$\text{从而 } M_C = \frac{b}{l} m$$

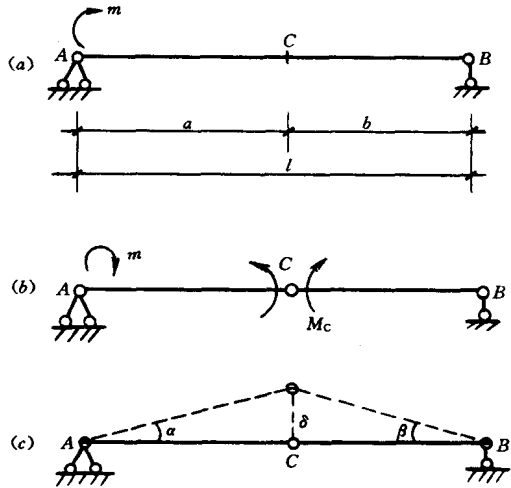


图 1-6

虚功原理的这种应用形式，实质上是
用几何方法来求解静力平衡问题；此时的虚功方程，实质上是实际给力系的平衡方程。

2. 虚设力系，求位移

这是在虚设的力系和实际位移状态之间应用虚功原理，这种形式的虚功原理称为虚力原理。

例如，欲求图 1-7 (a) 所示简支梁的跨中挠度，建立图 1-7 (b) 所示的虚拟力系，令该力系在图 1-7 (a) 中的真实位移上做功，建立虚功方程为

$$\Delta_C = \int_0^l dx \left(\int_A \frac{\bar{M}y}{I} \frac{My}{EI} dA \right) + \int_0^l dx \left(\int_A \frac{\bar{Q}S}{Ib} \frac{QS}{GIb} dA \right)$$

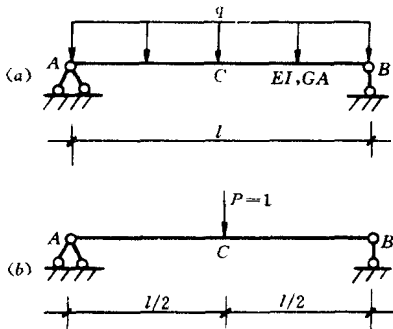


图 1-7

整理后，得

$$\Delta_C = \int_0^l \frac{\bar{M}M}{EI} dx + \int_0^l \frac{k \bar{Q}Q}{GA} dx$$

式中 \bar{M}, \bar{Q} —— 虚拟力状态的弯矩和剪力；

M, Q —— 真实位移状态的弯矩和剪力。

两种状态下的内力均可通过平衡条件求得，进而算出 Δ_C 。

虚功原理的这种应用形式，本质上是用静力平衡方法求解几何问题。此时，虚功方程的实质是真