差分方程的振动理论

张广　高英　编著

高等教育出版社

本书作为一本专门著作，系统而全面地总结了差分方程振动性的理论、方法和最新进展。内容由浅入深，由时滞差分方程到中立型差分方程，由低阶差分方程到高阶差分方程，由常差分方程到偏差分方程。本书既可供相关研究人员作参考书，也可供大学教学专业、应用数学专业高年级学生和研究生作为相关课程的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

差分方程的振动理论/张广，高英编著.—北京：高等教育出版社，2001.12
ISBN 7-04-010158-0

Ⅰ.差...Ⅱ.①张...②高...　Ⅲ.差分方程-振动理论　Ⅳ.O241.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 066182 号

差分方程的振动理论
张广　高英　编著

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电　　话	010-64054588	传　　真	010-64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		
开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2001 年 12 月第 1 版
印　　张	11.625	印　　次	2001 年 12 月第 1 次印刷
字　　数	300 000	定　　价	18.30 元

前　言

微分方程或泛函微分方程振动理论在定性理论中占据着十分重要的位置，近年来已有多本专著对此进行了论述，例如文献[1－7]．作为古老而又年轻的差分方程的振动理论在定性理论中同样具有重要意义．自20世纪80年代人们在差分方程中引入泛函微分方程的方法以来，它得到了快速发展，有关论文数以百计．但是，这方面的专门著作却尚未见到．本书的目的就是介绍近年来国内外学者在差分方程振动理论方面的新的研究成果，当然其中也包括了作者在这方面的一些工作．

全书共分八章．在第一章中，先给出了一些与本书有直接关系的基本概念，这些基本概念在一般的书中可以找到，它们的证明将省略．从第二章开始，则分类讨论各种类型差分方程的振动性．第二章讨论一阶时滞差分方程，第三章则考虑一阶中立型差分方程．第四章考察了二阶方程，第五章着重研究二阶中立型差分方程，第六章将研究高阶差分方程．另外，偏差分方程和具有连续变量的差分方程的振动性工作近几年也有一定发展，因此在第七章我们总结了偏差分方程的内容，而在第八章研究了具有连续变量的差分方程和偏差分方程．此外，我们也在有关章节中讨论了含有最大值的差分方程，这类方程在控制论中具有广泛的应用．对本书的出版，雁北师院马晋宜院长给予了大力支持，同时大同职业技术学院和雁北师院的领导及有关同志对本书的出版也给予了很大的帮助与关心，这里一并表示感谢．

北方工业大学韩效宥教授，山西大学燕居让教授和青岛海洋大学张柄根教授对本书的第一作者给予了长期教诲，本书的完成也得益于同台湾清华大学郑穗生教授的长期合作．同时，郑穗生教授提供了本书的大部分参考资料，也对本书的第一作者给予了长期的资助，

这里深表谢意.

燕居让教授和郑穗生教授阅读了本书的初稿,提出了一些建设性意见,中国科学院应用数学研究所的俞元洪研究员和北京理工大学葛渭高教授在详细阅读了该书的初稿后提出了一些有意义的建议,在此表示诚挚的谢意。作者的初衷是在介绍近年来本方向研究新成果的同时,较为系统的整理差分方程的振动性结果.但由于新的结果层出不穷,文献难免挂一漏十,再加上作者水平的局限,倘有谬误,热忱欢迎识者不吝指正.

张广　高英

2000年6月于大同

目　　录

第一章　差分方程的基本概念与方法

在本章中，将简要介绍差分方程最基本的一些概念，这些基本概念是讨论问题的出发点．由于篇幅关系，这里只提及与讨论问题有关的内容，较详细的叙述可在一般差分方程的著作中找到．

§1.1　基本概念

一个差分方程其实就是一个递推数列

$$x_{n+k} = F(n, x_{n+k-1}, \cdots, x_n), \tag{1.1.1}$$

其中 k 是一个正整数，$n=0,1,2,\cdots$，$F\in(\mathbf{N}\times\mathbf{R}^k,\mathbf{R})$且对于固定的 n 来说是一个连续函数．

方程(1.1.1)被称做是一个 k 阶差分方程，这是因为(1.1.1)中的最大足码 $n+k$ 与最小足码 n 的差为 k．(1.1.1)的一个解是指一个数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 且当 $n\geqslant k$ 时满足方程(1.1.1)．由于方程(1.1.1)是一个递推数列，显然，如果给定初始条件 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{k-1}$，我们可依次计算出 $x_k, x_{k+1}, \cdots$．

如果存在某一常数 $\bar{x}$ 使得

$$\bar{x} = F(n, \bar{x}, \cdots, \bar{x})$$

对所有的 $n\in\mathbf{N}$ 上式成立，则称 $\bar{x}$ 是(1.1.1)的一个平衡点．如果方程的一个解 $\{x_n\}$ 满足 $\{x_n-\bar{x}\}$ 既不是最终正的，也不是最终负的，我们称其解 $\{x_n\}$ 关于平衡点 $\bar{x}$ 是振动的．对于数列 $\{x_n\}$ 如果有 N 使得 $n\geqslant N$ 时 $x_n>0$，则称 $\{x_n\}$ 是最终正的；最终负的可类似定义．现在对于方程(1.1.1)做变换 $y_n=x_n-\bar{x}$，它可以变为

$$y_{n+k} = G(n, y_{n+k-1}, \cdots, y_n). \tag{1.1.2}$$

这时,如果(1.1.1)有平衡点 $\bar{x}$,则(1.1.2)就有平衡点零.(1.1.1)关于平衡点 $\bar{x}$ 的振动也变为(1.1.2)关于平衡点零的振动.因此,本书中如无特别声明均指关于零点振动.另一方面,我们也假定零是方程(1.1.2)的唯一平衡点.

这样一来,对于方程(1.1.2)的一个解 $\{y_n\}$,如果有 N 存在,使得 $n \geqslant N$ 时 $y_n > 0$,则称 $\{y_n\}$ 是方程(1.1.2)的一个最终正解;同样,最终负解是指存在 N,当 $n \geqslant N$ 时 $y_n < 0$.如果解 $\{y_n\}$ 既不是最终正解也不是最终负解,则称其为振动解.如果方程(1.1.2)的所有解振动,则称方程(1.1.2)是振动的.类似地,如果(1.1.2)的所有解是非振动的,则称方程(1.1.2)非振动.

Δ 是一个差分算子,它在差分表达式中随时可见,其含义为

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n, \quad \Delta^k = \Delta(\Delta^{k-1}).$$

由于我们要讨论的是振动问题,因此本书所指的解均为正则解.所谓正则解是指方程的一个解 $\{y_n\}$ 对任意大的 N_y,有 $\sup\limits_{n \geqslant N_y} |y_n| > 0$.方程

$$\Delta x_n + p_n x_{n-k} = 0 \tag{1.1.3}$$

中 $k \in \mathbf{N}$.它显然是一个 $k+1$ 阶差分方程,这由上面的定义显知.但实际上往往称方程(1.1.3)为一阶时滞差分方程,这一说法主要来源于泛函微分方程.人们总是把方程(1.1.3)看成是一阶时滞微分方程

$$x'(t) + p(t)x(t-\tau) = 0$$

的离散形式.类似地,方程

$$\Delta^m x_n + p_n x_{n-k} = 0$$

叫做 m 阶时滞差分方程,方程

$$\Delta(x_n - p_n x_{n-k}) + q_n x_{n-l} = 0 \tag{1.1.4}$$

叫做一阶中立型时滞差分方程或一阶中立型差分方程.

方程(1.1.4)之所以叫做中立型差分方程,主要是因为在(1.1.4)中的算子 Δ 下含有时滞 k.事实上,泛函微分方程

$$[x(t) - p(t)x(t-\tau)]' + q(t)x(t-\sigma) = 0$$

也叫做一阶中立型时滞微分方程.类似地,方程

$$\Delta^m(x_n - p_n x_{n-k}) + q_n x_{n-l} = 0 \tag{1.1.5}$$

也叫做 m 阶中立型时滞差分方程,有时也直接叫做 m 阶中立型差分方程.注意到方程(1.1.5)总可以写成形式(1.1.2),因此,其解的存在性与唯一性是显然的.

另一方面,如前面所述,我们将方程(1.1.1)的解一般记为 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$.但是,为了叙述上的方便,我们常常会记为 $\{x_n\}$,或者直接称 x_n 是方程(1.1.1)的解.有时也将解记为 x,y,w 等.方程(1.1.3),(1.1.4),(1.1.5)等可类似称之.

§1.2 差分算子

由差分算子 Δ 的定义不难看出,对任意常数 α,β 有

$$\Delta(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha\Delta x_n + \beta\Delta y_n.$$

即差分算子是线性的.另外,如下公式是显然的:

$$\Delta^2 x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n,$$

$$\Delta(x_n y_n) = y_{n+1}\Delta x_n + x_n\Delta y_n,$$

$$\sum_{k=a}^{b}\Delta x_k = x_{b+1} - x_a,$$

$$\sum_{k=a}^{b} y_{k+1}\Delta x_k = x_{b+1}y_{b+1} - x_a y_a - \sum_{k=a}^{b} x_k\Delta y_k.$$

由 Δ 的定义,我们也不难计算出

$$\Delta c = 0,\quad c\text{ 是常数};$$

$$\Delta(-1)^k = 2(-1)^{k+1},\quad k\text{ 是整数};$$

$$\Delta b^k = b^k(b-1),\quad k\in Z, b\neq 0;$$

$$\Delta b^k = b^k(b-1),\quad k>1.$$

x 是实数,n 是正整数,记

$$x^{(n)} = x(x-1)\cdots(x-n+1).$$

容易证明，$\Delta x^{(n)} = nx^{(n-1)}$.

E 称为移位算子，它满足 $Ex_n = x_{n+1}$. 如果 I 为恒等算子，则 E 和 Δ 有关系 $\Delta = E - I$. 于是由二项式公式，有

$$\Delta^k = (E - I)^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} E^i, \tag{1.2.1}$$

$$E^k = (\Delta + I)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^i, \tag{1.2.2}$$

其中 $\Delta^0 = E^0 = I$. 于是对任一正整数 n，有

$$u_n = E^n u_0 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i u_0. \tag{1.2.3}$$

定理 1.2.1 设 k 和 n 是正整数，$k \leqslant n$，则

$$u_n = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \Delta^i u_0 + \sum_{s=0}^{n-k} \binom{n-s-1}{k-1} \Delta^k u_s. \tag{1.2.4}$$

证明 由(1.2.3)可知

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \Delta^i u_0 + \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k+j} \Delta^{k+j} u_0 \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \Delta^i u_0 + \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k+j} \Delta^k \sum_{s=0}^{j} (-1)^{j-s} \binom{j}{s} E^s u_0 \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \Delta^i u_0 + \sum_{s=0}^{n-k} \left[\sum_{j=s}^{n-k} (-1)^{j-s} \binom{n}{k+j} \binom{j}{s} \right] \Delta^k E^s u_0 \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \Delta^i u_0 + \sum_{s=0}^{n-k} \binom{n-s-1}{k-1} \Delta^k u_s.
\end{aligned}$$

证毕.

定理 1.2.2 设 j, k, n 是正整数，$j \leqslant k-1$，$k \leqslant n$，则

$$\Delta^j u_n = \sum_{i=j}^{k-1} \binom{n}{i-j} \Delta^i u_0 + \sum_{s=0}^{n-k+j} \binom{n-s-1}{k-j-1} \Delta^k u_s.$$

证明 $j=0$ 时，由定理 1.2.1 知命题成立. 现假设对某个 j 成立，则

$$\begin{aligned}\Delta^{j+1}u_n &= \sum_{i=j+1}^{k-1}\binom{n}{i-j-1}\Delta^i u_0 + \sum_{s=0}^{n-k+j}\binom{n-s-1}{k-j-2}\Delta^k u_s \\ &\quad + \binom{k-j-1}{k-j-1}\Delta^k u_{n+1-k+j} \\ &= \sum_{i=j+1}^{k-1}\binom{n}{i-j-1}\Delta^i u_0 + \sum_{s=0}^{n-k+j}\binom{n-s-1}{k-j-2}\Delta^k u_s \\ &\quad + \binom{k-j-2}{k-j-2}\Delta^k u_{n+1-k+j} \\ &= \sum_{i=j+1}^{k-1}\binom{n}{i-j-1}\Delta^i u_0 + \sum_{s=0}^{n-k+j+1}\binom{n-s-1}{k-j-2}\Delta^k u_s.\end{aligned}$$

即命题对 $j+1$ 也成立. 证毕.

§1.3 不动点定理

本节将介绍一些不动点定理,它们可在一般的泛函分析书中找到,证明从略. 这些定理在本书中用于寻找方程的解.

Ω 是非空集合,在其上定义函数 $d:\Omega\times\Omega\to[0,\infty)$,如果 d 满足:(i) 任意 $x,y\in\Omega$,$d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;(ii) 任意 $x,y\in\Omega$,有 $d(x,y)=d(y,x)$;(iii) 任意 $x,y,z\in\Omega$ 有 $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$,这时称 d 是距离,Ω 是一个距离空间. 距离空间中的序列 $\{x_n\}$ 如果对任意的 $\varepsilon>0$ 总有 $N=N(\varepsilon)$,当 $n,m\geqslant N$ 时恒有 $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ 成立,这时称 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列. 如果 Ω 中的任一 Cauchy 列按距离均收敛于 Ω 中的一点,这时称 Ω 是完备的. 对于映射 $T:\Omega\to\Omega$,如果有常数 $\lambda\in[0,1)$ 使得对任意的 $x,y\in\Omega$ 有 $d(Tx,Ty)\leqslant\lambda d(x,y)$,这时称 T 是 Ω 上的压缩映射.

Ω 是一个线性空间,在其上定义非负函数 $\|\cdot\|$,它如果满足:(i) $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$;(ii) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$ 对任意标量 α 及 $x\in\Omega$ 成立;(iii) 任意 $x,y\in\Omega$ 有 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$,则称

Ω 是一赋范线性空间，$\|\cdot\|$ 称为 Ω 的范数. 一个赋范线性空间如果对任意 $x,y\in\Omega$，以 $\|x-y\|$ 作为距离，它显然构成一个距离空间. 一个完备的赋范线性空间称为 Banach 空间. 对于赋范线性空间 Ω 的一个子集 S，如果有正数 M 使得对任意 $x\in S$ 有 $\|x\|\leqslant M$，这时称 S 为有界的；如果对任意的 $x,y\in S$，$\alpha x+(1-\alpha)y\in S$ 对 $\alpha\in[0,1]$ 成立，称 S 是凸的；如果 S 的所有极限都含于 S 中，这时称 S 是闭的.

M 和 N 是赋范空间，X 是 N 的子集，算子 $T:X\to M$ 称为关于点 $x\in X$ 连续，如果满足任意 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$ 使得 $y\in X\ \|y-x\|<\delta$ 恒有 $\|Tx-Ty\|\leqslant\varepsilon$ 成立. T 在 X 上连续是指在 X 上点点连续.

定理 1.3.1 (Banach 压缩映射原理)完备的距离空间上的压缩映射必有不动点.

定理 1.3.2 (Brouwer 唯一不动点定理)Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 上非空有界闭凸集，$f:\Omega\to\Omega$ 是连续映射，则 f 在 Ω 上有一个不动点.

Banach 空间 X 的子集 S 的任何无限点列都有收敛子列，这时称 S 具有致密性. 如果 $\bar{S}$ 是致密的，我们称 S 是相对致密的，其中，$\bar{S}$ 是由 S 的所有极限构成的集合.

定理 1.3.3 (Schauder 不动点定理)S 是 Banach 空间的非空闭凸集，$T:S\to S$ 是连续映射，且 TS 是相对致密的，则 T 在 S 中至少有一个不动点.

K 是 Banach 空间 X 的非空闭集，如果满足：(i) $\alpha>0, x\in K$，则 $\alpha x\in K$；(ii) 任意 $x,y\in K$，则 $x+y\in K$；(iii) $x\in K-\{0\}$，则 $-x\notin K$，这时称 K 是一个锥. 我们在 X 上定义偏序"$\leqslant$"：$x\leqslant y$ 当且仅当 $y-x\in K$. M 是偏序 Banach 空间 X 的子集，令 $\bar{M}=\{x\in X: y\leqslant x, y\in M\}$，称 $x_0\in X$ 是 $\bar{M}$ 或 M 的下确界，如果对任意的 $x\in\bar{M}$ 有 $x_0\leqslant x$. 上确界的概念可类似定义.

定理 1.3.4 (Knaster 不动点定理)设 X 是具有偏序"$\leqslant$"的 Banach空间. M 是 X 的子集，它具有性质：M 的下确界属于 M，M 的

每一非空子集的上确界属于M. $T:M\to M$ 是增映射,则 T 在M 中有不动点.

设 B 是由所有实数列$x=\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$构成的线性空间,在其上定义范数 $\|x\|=\sup\limits_{k\geq N}\dfrac{|x_k|}{h_k}<\infty$,其中$\{h_k\}_{k=N}^{\infty}$是有一致下界的正数列.这时,$B$ 构成一 Banach 空间.$\Omega\subset B$,如果对任意的 $\varepsilon>0$,存在 M 使得当$i,j>0$ 时有$\left|\dfrac{x_i}{h_i}-\dfrac{x_j}{h_j}\right|<\varepsilon$,我们称 $x\in\{x_k\}\in\Omega$ 是一致 Cauchy 的.

定理 1.3.5 (Cheng 和 Patula 定理)[95]Ω 是 B 的有界闭凸集,$T:\Omega\to\Omega$ 是连续映射,如果 $T(\Omega)$是一致 Cauchy 的,则 T 在 Ω 中有不动点.

§1.4 Z-变换

本节介绍的 Z-变换,在解决常系数差分方程问题中十分有效,它也可以称做是离散的 Laplace 变换.给定数列$\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$,它的 Z-变换被定义为

$$Z\{u_n\}=U(z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nz^{-n}, \tag{1.4.1}$$

其中 z 是复数.$g(z)$是复数 z 的表达式,令

$$p(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(g(z))^n,$$

显然当$|g(z)|<1$ 时,它们收敛到 $p(z)=1/(1-g(z))$.例如 $n\geq0$ 时 $u_n=1$,这时有

$$Z\{u_n\}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\frac{z}{z-1},\quad |z|>1.$$

而$\{u_n\}_{n=0}^{\infty}=\{a^n\}_{n=0}^{\infty}$的 Z-变换为

$$Z\{a^n\}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n=\frac{z}{z-a},\quad |z|>|a|.$$

类似地，我们也可给出$\{u_n\}_{n=N}^{\infty}$的Z－变换.

利用几何级数，我们容易求得 Z－变换的逆变换 Z^{-1}. 例如求 $Z^{-1}\left\{\dfrac{1}{z-a}\right\}$，这时将 $U(z)=\dfrac{1}{z-a}$表达成$\left(\dfrac{1}{z}\right)^n$ 的级数形式即可.

$$U(z)=\frac{1}{z-a}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(1-a/z)}$$
$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{z^n}.$$

容易得知 $u_n=a^{n-1}, n\geqslant 1, u_0=0$.

$$Z\{u_{n+1}\}=\sum_{n=0}^{\infty}u_{n+1}z^{-n}=z\sum_{n=0}^{\infty}u_{n+1}z^{-n-1}$$
$$=z\sum_{m=1}^{\infty}u_m z^{-m}=z(-u_0+\sum_{m=0}^{\infty}u_m z^{-m})$$
$$=z(-u_0+U(z))=zU(z)-zu_0.$$

类似地，有

$$Z\{u_{n+2}\}=z^2U(z)-z^2u_0-zu_1.$$

于是，一般地有

$$Z\{u_{n+k}\}=z^kZ\{u_n\}-\sum_{m=0}^{k-1}u_m z^{k-m}. \tag{1.4.2}$$

关于 Z－变换的线性性是显然的. 即

$$Z\{c_1u_n+c_2v_n\}=c_1U(z)+c_2V(z). \tag{1.4.3}$$

$U(z)$和 $V(z)$分别是$\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$和$\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$的 Z－变换.

我们定义$\{u_n\}$和$\{v_n\}$的卷积为

$$u_n * v_n=\sum_{k=0}^{n}u_k v_{n-k}. \tag{1.4.4}$$

这时有

$$Z\{\{u*v\}_n\}=Z\left\{\sum_{k=0}^{n}u_k v_{n-k}\right\}=U(z)V(z). \tag{1.4.5}$$

例 1.4.1 考虑初值问题

$$u_{n+2}-u_{n+1}-6u_n=0, \tag{1.4.6}$$

$$u_0=0, u_1=3. \tag{1.4.7}$$

解 对方程(1.4.6)两边做 Z-变换,则有

$$Z\{u_{n+2}-u_{n+1}-6u_n\}=Z\{0\}, \quad n\geqslant 0.$$

利用(1.4.2)式,有

$$z^2U(z)-z^2u_0-zu_1-(zU(z)-zu_0)-6U(z)=0.$$

将(1.4.7)式代入,则有

$$U(z)=\frac{3z}{z^2-z-6}=\frac{\frac{9}{5}}{z-3}+\frac{\frac{6}{5}}{z+2}.$$

于是

$$\begin{aligned}u_n&=Z^{-1}\{U(z)\}=Z^{-1}\left\{\frac{\frac{9}{5}}{z-3}\right\}+Z^{-1}\left\{\frac{\frac{6}{5}}{z+2}\right\}\\&=\frac{9}{5}(3)^{n-1}+\frac{6}{5}(-2)^{n-1}\\&=\frac{3}{5}(3)^n-\frac{3}{5}(-2)^n.\end{aligned}$$

例 1.4.2 考虑方程

$$u_{n+2}-u_{n+1}-6u_n=\sin\frac{\pi n}{2}, \quad n\geqslant 2, \tag{1.4.8}$$

$$u_0=0, \quad u_1=3. \tag{1.4.9}$$

解 对(1.4.8)作 Z-变换,则有

$$\begin{aligned}(z^2-z-6)U(z)-3z&=Z\left\{\sin\frac{\pi n}{2}\right\}\\&=Z\left\{\frac{1}{2i}\left(e^{\frac{in\pi}{2}}-e^{-\frac{in\pi}{2}}\right)\right\}=\frac{z}{z^2+1}.\end{aligned}$$

于是有