曲线梁的计算公式

（附数表）

〔日〕岛田静雄
仑西茂 著
廖顺庠 吴在辉 译

人民交通出版社

曲线梁的计算公式

（附 数 表）

（日）岛田静雄
仓西 茂 著
廖 顺 庠
吴 在 辉 译

人民交通出版社

曲线梁的计算公式（附数表）
島田静雄　倉西茂
曲り梁の計算式（付数表）
技報堂　昭和 40 年

本书根据日本技报堂1965年版本译出
廖顺庠　吴在辉　译
人民交通出版社出版
（北京市安定门外和平里）
北京市书刊出版业营业许可证出字第 00C 号
新华书店北京发行所发行
各 地 新 华 书 店 经 售
人民交通出版社印刷厂印
开本：850×1168 $\frac{1}{32}$　印张：10.5　字数：277千
1 9 8 1 年 2 月　第 1 版
1 9 8 1 年 2 月　第 1 版　第 1 次印刷
印数：0001—4,600册　定价：1.95元

内容提要

随着交通运输事业的发展，立体交叉和高架桥必将日益增多。由于路线线形的需要，桥梁经常采用曲线桥。国内外关于曲线桥方面的文献不多，而比较系统和实用的著作则更少。日本岛田、仓西二人合著的“曲线梁的计算公式（附数表）”一书，详细介绍了在曲线梁上施加各种荷载时，计算应力和变形的公式，并用电算结果编制了大量数表，列举了计算实例。无论对开口或闭口截面，均可计算，能用于简支及连续曲线梁桥的多种解法，使用甚为方便。

本书可供广大桥梁技术人员应用和参考。此外，本书也适用于建筑及水工方面的其它曲线梁结构。

目　录

前 言

本书论述在平面内具有一定曲率的曲线梁承受垂直荷载时的应力与变形。弧面承受荷载的曲线梁为拱，本书对此从略。对于在单位荷载作用下的一些基本的梁的支承状态，备有必要的数表以便能用以进行曲线桥的计算。至于曲线梁的特殊受力状态，如支点处支承线为斜向、曲率变化或变截面等，理应逐个地进行设计讨论，但由于情况特殊，所以本书也未涉及。

本书的初稿，是由合著者岛田、仓西就这个问题进行讨论而得以诞生的，后来，著者的老师东京大学平井教授和奥村教授的适当教益也有助于这个问题的解决。我们对此，深表谢意。

本书原稿为东京大学桥梁研究室用蓝图保存的104集报告（1962年5月）。1963年和1964年建设省高架结构研究会的讲义，与本书完全相同。

本书的计算式和数表，是企图汇总起来在可能范围内供多方面使用，既便于实用计算，又可有效地运用近似的内插法而不降低其精确度。虽然如此，也还有一部分，由于考虑不周，未必能用于实际计算。因此，除了在理论上进行探求的情况以外，应用于设计计算时，要充分考虑利用本书公式而产生的数值上的误差。

再者，计算公式的大部分系用电子计算机计算，这是有隣电子计算中心的角谷先生与岩本女士辛勤劳动的成果。其计算费用，由首都高速公路协会从委托给东京大学奥村教授的研究费中，

拨付了一部分。恰好首都高速公路桥的设计计算也需要应用这些数表，所以得到横河桥梁工程局的资助。

此外，在本书汇总过程中，承技报堂宫崎先生、京浜商会五十嵐先生协助整理资料，谨在此一併表示深切的谢意。

著　者

1965年6月

§1 绪 论

本书解析在水平面内有一定曲率的曲线梁，当垂直荷载作用时梁的应力与变形。

由作用于曲面内的荷载引起的变形，与圆弧拱相同，本书从略。

曲线梁为具有抗弯刚度 EJ、抗扭刚度 GK、抗弯抗扭刚度 EC 的梁，梁的两端，对弯曲变形按铰支座、对扭转变形按固定支座作为基本状态。连续曲线梁为2跨以上的单跨曲线梁在支点连接并传递应力。此时各跨的曲率、抗弯刚度等以不变为好。

以梁的轴线作为扭转中心的位置，曲率半径 R、跨径（沿曲线计算的弧长）也是按相对于扭转中心轴来计算。把横向刚接的2根以上的曲线梁当作单根的曲线梁时，用(11)节的一些公式的换算值。2根以上的曲线梁在横向为弹性联接的横梁时，采用(12)节的一些公式计算作用在各曲线梁上的荷载分布。

垂直荷载作用在由扭转中心轴至曲线的外侧偏心距离 e 处。这个荷载为垂直作用在扭转中心轴的垂直荷载 P 或 p，同时考虑相当于 $T=P\cdot e$ 或 $t=p\cdot e$ 的纯扭矩作用。这时认为均布荷载 p 从实际作用的曲率半径 $(R+e)$ 移至 R 的位置，所以必须考虑 $(R+e)/R$ 倍的荷载强度。

确定曲线梁变形及应力的基本假定，系根据应力产生的变形微小而认为力与变形成正比例。因而就应力和变形而言，广义的互换作用成立。

曲线梁的变形有外表的挠度 ω 和外表的扭角 θ。此变形为梁的实际弯曲变形、梁的实际扭角 ψ 及曲率 R 的影响所合成。当各种单位荷载时，用(2)～(5)节的各式，求解 ω、θ、ψ 及弯矩、

扭矩等梁的应力。当解连续梁或支点受约束的曲线梁时，为方便起见，在支点加弯矩 M^b 及端应力 W，如(6)、(7)节所示。

在这些公式的演算中，和梁的常数 KG、EC 有关的 μ 的两个端值，同时表示 $\mu=0$ 及 $\mu=\infty$ 等两种情况。其所以如此，是因为在实际计算中，μ 值特别大或者特别小的情况较多的缘故。

由于梁的常数及弧角，曲线梁的变形虽显得复杂，但有几种参数，如第（2）节各式中，当 $f_1(s、u)\sim f_6(s、u)$ 已知时，用这些函数的组合就容易求得其变形。这个基本的函数 $f_1\sim f_{20}$、$g_1\sim g_4$、几个其它常数等，任何一个都是弧角 Φ 的复杂函数，这些从 $\Phi=0$ 的直梁到 $\Phi=90°$ 左右的计算数值，参见后面的计算数表。

求曲线梁的变形及应力，多将梁的跨径 l 分成 n 等分点，为此，给出在 n 等分点上由 $\sin i\pi/n$ 分布的格点荷载引起的变形及应力，在第(10)节提供了基本公式。

§ 2 定义及约束

梁的扭转中心轴以水平面内曲率半径 R 的圆弧绘出，沿扭转中心轴规定计算的坐标 s。s 的正方向以曲率中心反时针旋进方向为标准。该方向的定义与扭矩荷载、扭角 θ 的符号有关，扭矩及扭角选择以扭向梁的曲率半径外侧方向为正。这个方向朝 s 的前进方向看是向右旋转的。荷载 P 及扭矩作用点的坐标用 u 表示，关系式大多选取在 $s<u$ 的范围内。

因此，在 $u<s<l$ 的范围，取坐标方向可考虑将原点移至另一端。

由于曲率方向与上述的定义相反，s 行进方向从右边看曲率中心时，如将扭矩及扭角仍以扭向曲线外侧方向为正，则式中符号可以不变。但扭矩、扭角在 s 前进的方向变成向左旋转，梁的

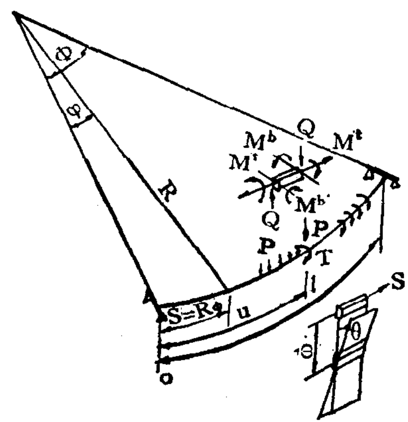

图 1

扭矩符号也必须认为是相反。

作用于曲线梁的内力是弯矩 M^b、扭矩 M^t 及剪力 Q 三种。弯矩和剪力的符号与直梁时标准相同。扭矩的正号方向，如图 1 所示，作用于脱离体上的扭矩的方向。

曲线梁的支点构造，如图 1 所示那样把曲率中心方向作为轴的铰支座。从力学上说，对于弯曲为铰支点，对于扭转为刚性支点。把两端这样支承的曲线梁，叫做两端简支。这种支承状态，从立体上讲，为一次超静定结构。

连续曲线梁可以认为是两端简支的各跨，在支点按梁轴线相接而连接。

§ 3 梁的断面常数和应力

曲线梁的断面常数有抗弯刚度 EJ、抗扭刚度 GK、抗弯抗扭刚度 EC 三种。各个断面常数，与弯矩 M^b、扭矩 M^t、弯扭轴应力 W 有关。

计算抗弯刚度使用的断面惯性矩，当曲率较小时及梁的宽度较小时，实际与直桥计算相同。组合 2 根梁作为单根换算梁时的断面惯性矩，用(11-2)式即可。由此式可知，在曲线外侧梁的表面刚度减少，内侧梁的刚度增大，特别是计算

宽度大的矩形断面的断面惯性矩时，必须用(11-2)式求抗弯刚度。

抗扭刚度 GK 为圣维南抗扭刚度。宽度大的断面有(11-3)式所示那样的曲率的影响，如断面为图2(a)所示的开口形状，则

$$K=\Sigma\frac{1}{3}bt^3$$

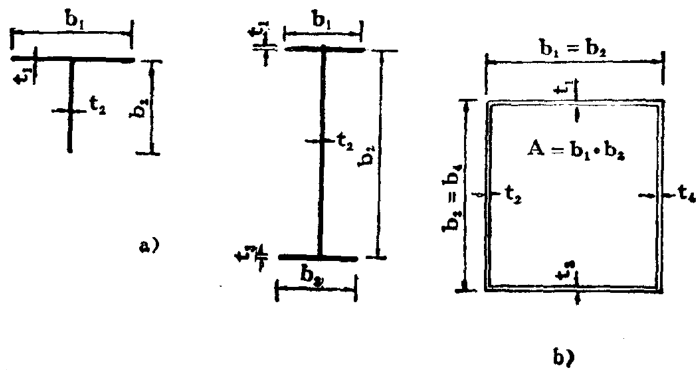

图 2

又，如为图2(b)所示的闭口断面，则

$$K=\frac{4A^2}{\Sigma\frac{b}{t}}$$

EC 为瓦格纳抗弯抗扭刚度。为了理解 EC 值，考虑2根平行布置的抗弯刚度为 EJ 的梁即可（图3）。使 $P=1$ 的荷载作用在右侧梁，$P=-1$的荷载作用在左侧梁的同样位置。

这时右侧梁 a 的变形条件为：

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4}=P(x)$$

关于梁 b，则为：

$$EJ\left(-\frac{d^4y}{dx^4}\right)=-P(x)$$

此处2根梁实际上看作组合的单根梁，用一对外力 P 旋转时，如用旋转角 θ 给出相对的变位，则

$$y=\frac{b}{2}\theta\ ,\ T=P\cdot b$$

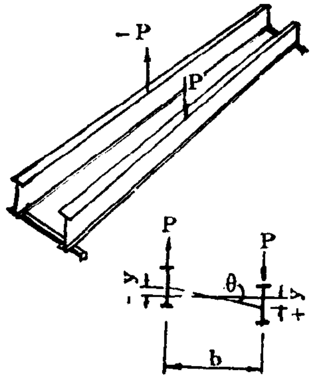

图 3

$$\therefore \quad EJ \cdot \frac{b^2}{2} \frac{d^4\theta}{dx^4} = T$$

此式为扭矩与扭角的关系式，抗弯抗扭刚度 EC 为 $EC = \frac{b^2 EJ}{2}$。从这项推导可知，有一定抗弯抗扭刚度的梁，每个部件都受到弯曲变形。正如对于抗弯刚度 EJ 而确定弯矩 M^b 一样，对弯扭引起的轴向应力的分布值，定义为

$$W = -EC\frac{d^2\theta}{dx^2}$$

在求抗弯抗扭刚度 EC 和单位应力分布 W 时，实际上需要进行剪流理论及其它复杂的计算，但如在概念上弄清如下性质，将有助于对问题的理解。

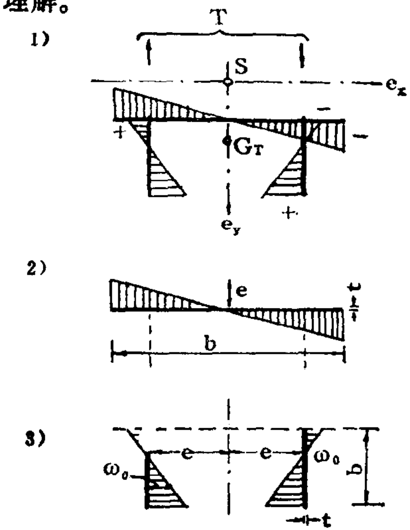

图 4

例如在图4所示的断面中，剪力中心 S 与重心 G 不同。剪力中心根据 x 方向、y 方向的弯曲由剪力的分布加以决定。

轴向应力的符号，产生右转扭矩的一组外力作用于腹板部分，采取和产生弯曲应力相同的符号。如果把 e_x、e_y 定为如图4-1所示，则在分成各单元的杆件上，轴向应力 σ 的分布如下式：

$$\sigma = \frac{W}{C}(e_x \cdot e_y + \omega)$$

式中，W 为用右转的扭角 θ 的2次微分确定的弯扭应力。

$$W = -EC\frac{d^2\theta}{ds^2}$$

把 EC 作为抗弯抗扭刚度，C 为弯扭断面系数，ω 在每个被分割的杆件上为常数。

此时，把杆件中心的 $(e_x e_y + \omega)$ 设为 ω_0，如将杆件的垂直距离设为 e，则弯扭断面常数为：

$$C = \Sigma\left(\frac{tb^3}{12}e^2 + \omega_0^2 tb\right)$$

$$= \Sigma(Je^2 + \omega_0^2 A)$$

式中，J 和 A 为各单元的断面惯性矩和截面积。利用此性质，也容易求得图3梁的弯扭断面系数 C。

几根梁组合时，抗弯抗扭刚度可用(11-4)式计算。

注：式中ω与各分式中梁的变位ω不同。

符　号

R	m	曲率半径	T, t	t-m, t-m/m	荷载 p、P 仅偏心作用于从梁的轴线到曲线外侧距离 e 处时，$T=Pe$，$t=pe$ 作为扭转荷载
l	m	沿圆弧计算的梁的跨径	EJ	$t\text{-}m^2$	梁的抗弯刚度
$\Phi=\frac{l}{R}$	(－)	曲线梁跨径的夹角	GK	$t\text{-}m^2$	梁的抗扭刚度
s	(m)	沿圆弧计算的梁的坐标	EC	$t\text{-}m^4$	梁的抗弯抗扭刚度
$\varphi=\frac{s}{R}$	—	梁的极坐标	$\mu^2=\frac{GK}{EC}l^2$	—	参　数
$\left(\begin{array}{l}\varphi=\gamma\\ s=u\end{array}\right.$	— m	荷载作用点的坐标	M^b	t-m	弯　矩
$\left(\begin{array}{l}x=s/l\\ y=u/l\end{array}\right.$	— —	表示坐标的参数	M^t	t-m	扭　矩
ω	m	梁的垂直挠度	Q	t	剪　力
θ	—	梁的表面扭角	N	t	支点反力
ψ	—	梁产生的实际扭角	$f(s,u)$ $f(n,i)$	—	与 s、u 有关的函数 与 n、i 有关的函数
P, p	t, t/m	作用于梁轴线的垂直集中荷载及垂直均布荷载	W	$t\text{-}m^2$	弯扭应力的分布函数

$i=1,2,3,\cdots\cdots n$	表示傅里叶级数的指标
θ_i, ω_i, p_i, t_i, $M^b{}_i$, $M^t{}_i\cdots\cdots$	作为 i 数的傅里叶级数 $\sin i\pi x$ 分布的扭角、挠度荷载……等的系数
$\frac{1}{{}^iC_{\omega p}}$, $\frac{1}{{}^iC_{\omega t}}$, $\frac{1}{{}^iC_{\theta p}}$, $\frac{1}{{}^iC_{\theta t}}$ (m^2/t), (m/t), (m/t), $(1/t)$	表示 ω_i、θ_i 与 p_i、t_i 的关系的系数。称为弹簧常数
n $i=1,2,\cdots\cdots,n-1$ k	表示用正整数 n 等分的梁的 K 点。i 表示荷载种类
θ_i, W_i, P_i, T_i, $m^b{}_i$, $m^t{}_i$, B_i, $(-)$, (m), (t), $(t\text{-}m)$, $(t\text{-}m)$, $(t\text{-}m)$, $(t\text{-}m^2)$	作为 $\sin\frac{ik\pi}{n}$, $K=1,2,\cdots\cdots n-1$ 的分布的扭角、挠度、荷载……等的系数

$\frac{1}{{}^iC_{WP}}$, $\frac{1}{{}^iC_{WT}}$, $\frac{1}{{}^iC_{\theta P}}$, $\frac{1}{{}^iC_{\theta T}}$ (m/t), $(1/t)$, $(1/t)$, $(1/t\cdot m)$	表示 W_i、θ_i 与 P_i、T_i 的关系的系数。称为弹簧常数
$\beta=\frac{\Phi}{n}$	
$\mu_1=\frac{\mu}{n}$	
λ (m)	主梁间距
$EJ_Q(t-m^2)$	横梁抗弯刚度
X	横梁向上的反力
Z	向横梁左面旋转的弯矩
α	支点处梁的挠角
ρ	支点处梁的扭率
i, j, k	表示连续 3 跨的参数

（1）基础关系式

1-1	$\frac{d\psi}{ds}=\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{R}\cdot\frac{d\omega}{ds}$	梁实际的扭率
1-2	$M^{b}=-EJ\left(\frac{d^{2}\omega}{ds^{2}}+\frac{\theta}{R}\right)$	梁的弯矩
1-3	$M^{t}=GK\frac{d\psi}{ds}-EC\frac{d^{3}\psi}{ds^{3}}$	梁的扭矩
1-4	$Q=\frac{dM^{b}}{ds}-\frac{1}{R}M^{t}$	梁的剪力
1-5	$t=-\frac{1}{R}M^{b}-\frac{dM^{t}}{ds}$	扭转外力
1-6	$p=-\frac{d^{2}M^{b}}{ds^{2}}+\frac{1}{R}\cdot\frac{dM^{t}}{ds}$	垂直外力
1-7	$\frac{d^{2}M^{b}}{ds^{2}}+\frac{1}{R^{2}}M^{b}=-\left(p+\frac{t}{R}\right)$	弯矩的条件式
1-8	$-EC\frac{d^{4}\theta}{ds^{4}}+\left(GK-\frac{EC}{R^{2}}\right)\frac{d^{2}\theta}{ds^{2}}+\frac{GK}{R^{2}}\theta=\left(\frac{EJR^{2}+GKR^{2}+EC}{EJR^{3}}\right)$ $\times M^{b}-\frac{EC}{EJR}\cdot p-\frac{R^{2}EJ+EC}{R^{2}EJ}\cdot t$	弹性方程式
1-9	$W=-EC\frac{d^{2}\psi}{ds^{2}}$	由于弯扭引起的轴应力的分布函数
1-10	$\mu^{2}=\frac{GKl^{2}}{EC}$，$\mu_{1}^{2}=\frac{GKb^{2}}{EC}$ $\left(b=\frac{l}{n}\right)$	参　数

（2）承受 P＝1的单位集中荷载的两端简支的曲线梁

2-0	$P=1$的单位集中荷载作用在梁 轴 线 $s=u$ 处，在$s=0$、$s=l$ 的边界条件下 $\omega=\theta=0$，$M=W=0$	
2-1	$M^b=l\cdot f_1(s,\ u)$	弯　　矩
2-2	$M^t=\Phi l\cdot g_1(s,\ u)$	扭　　矩
2-3	$Q=\dfrac{l-u}{l}=1-y,\ (s<u);Q=-\dfrac{u}{l}=-y,(s>u);$	剪力(与直梁时相等)
2-4	$\omega_p=\dfrac{l^3}{EJ}\cdot f_2(s,\ u)+\dfrac{l^3}{GK}\left\{\dfrac{\mu^2 f_2(s,u)}{\Phi^2+\mu^2}+\dfrac{\Phi^2 f_3(s,u)}{(\Phi^2+\mu^2)^2}-f_4(s,\ u)\right\}=\dfrac{l^3}{EJ}\cdot f_2(s,u)+\dfrac{l^6}{EC}\cdot\dfrac{1}{\mu^2}\left\{\dfrac{\mu^2 f_2(s,u)}{\Phi^2+\mu^2}+\dfrac{\Phi^2 f_3(s,u)}{(\Phi^2+\mu^2)^2}-f_4(s,\ u)\right\}$	挠　　度
2-4-1	$\omega_p=\dfrac{l^3}{EJ}\cdot f_2(s,\ u)+\dfrac{l^3}{GK}[f_2(s,\ u)-f_4(s,\ u)]$	$EC=0$ 时的挠度
2-4-2	$\omega_p=\dfrac{l^3}{EJ}\cdot f_2(s,\ u)+\dfrac{l^6}{EC}\cdot\dfrac{1}{\Phi^2}[f_2(s,\ u)-2f_4(s,\ u)+f_6(s,\ u)]$	$GK=0$ 时的挠度

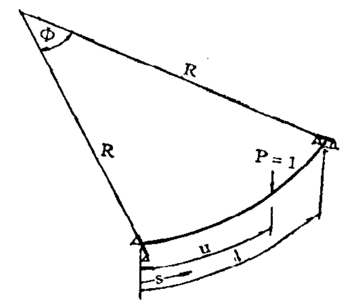

图　5