韩志刚 著

OR

·运筹学小丛书·

# 矩阵与投入产出分析

·运筹学小丛书·

# 矩阵与投入产出分析

韩志刚 著

辽 宁 教 育 出 版 社
1990年·沈阳

**矩阵与投入产出分析**

韩志刚　著

---

辽宁教育出版社出版　　辽宁省新华书店发行

（沈阳市南京街6段1里2号）　阜新蒙古族自治县民族印刷厂印刷

字数：101,000　　开本：787×1092　1/32　　印张：5 1/3

印数：1，114—3,114

1987年4月第1版　　　　1990年10月第2次印刷

责任编辑：杨　力　　　　　　责任校对：理　力

封面设计：宋丹心

---

ISBN7—5382—1320—1/G·1026　　　定价：2.10元

# 出 版 说 明

运筹学是二十世纪四十年代开始形成的一门学科，是现代数学的一个重要组成部分。在科学技术迅速发展的今天，运筹学有着广泛的应用。

为了向广大读者普及运筹学知识，在中国运筹学会的关心和支持下，尤其是在徐利治教授的积极倡导和组织下，编辑出版了这套《运筹学小丛书》。

这套丛书用通俗的语言，系统地介绍了运筹学中各个分支的基础知识和应用方法，其中包括规划论、对策论、排队论等方面的二十多个专题。在编写内容上，注重科学性、知识性和趣味性相结合，论述一般先从实例谈起，由浅入深，引出完整的数学理论。并且，大部分内容的引出方法都是初等的，因此，凡是具有高中以上文化程度的读者，都可以阅读。

# 序　　言

本书作为运筹学小丛书的一个分册，主要是介绍各分册中将要用到的向量和矩阵知识。在本书中，我们把有限维向量看成是特殊类型的矩阵。因为就运筹学的应用而言，一般地说这就足够了。所以我们没有介绍抽象的向量空间的概念。

投入产出法是对国民经济进行分析和制定大范围国民经济计划的有力工具。近些年来，这一方法受到了经济界的广泛重视。另一方面，投入产出法中直接消耗系数矩阵的引入，也使得抽象的矩阵概念有了明显的实际背景。所以我们用投入产出分析的观点贯串全书，这使得一些抽象概念和运算法则有了简单的实际含义。无疑这将有助于加深初学者对它们的理解。例如，我们首先引入了直接消耗系数矩阵，然后才引入一般的矩阵概念，用投入产出分析的观点解释矩阵的代数和，矩阵与数的乘积，矩阵与矩阵的乘积，矩阵与向量的乘积等等。我们从方程组的求解问题，引出了逆矩阵和广义逆矩阵的概念。

众所周知，向量的范数的概念是有着明显的实际意义的。我们在本书中先平行于向量的范数，引出矩阵的欧几里得范数的概念。进一步我们又介绍了矩阵的算子范数，并力

图对这一概念也从实际的角度予以解释。

矩阵的特征值与特征向量的有关理论，当然是矩阵理论的重要组成部分。对这部分内容的较好掌握，其意义是深远的。所以在本书中，我们也把它作为介绍的重点之一。

书中有些定理的证明，对于某些实际工作者在初次接触时，是有一定困难的。这部分内容，我们把它加上了“*”号，初学者可以略去。

关于投入产出分析，我们是从矩阵理论的简单应用的观点，对它的基本理论部分进行了扼要的介绍。同时我们也简单地指出了它可能的应用范围。

本书的附录，只是简单地列举了一些矩阵理论在运筹学的一些分支的基本问题描述中的应用。对于尚不熟悉这些分支内容的读者，可以暂时不去阅读它们。

在本书的写作过程中，我们力图做到理论联系实际，并且尽可能的深入浅出，同时也注意了内容的科学性。但由于作者水平所限，错误之处在所难免，希读者指正。

吴从炘教授审阅了本书原稿，并提出了宝贵意见，特向他表示谢意。

韩　志　刚

1982年元月

# 目　录

# 第一章　矩阵及其运算

## 第一节　矩阵与向量

如人们所熟知的，一个系统的单一的数字特征，只要用纯量来表示就够了．而当考虑到系统的多个有一定内在联系的数字特征时，仅用一个纯量来表示，就远远不够了，因此要借助于向量和矩阵．而有限维向量可以看成特殊的矩阵，所以我们先引入矩阵的概念．

为了明了矩阵这一概念的直观背景，让我们考虑如下的具体例子：

设某工厂生产三种产品 $A$, $B$, $C$；消耗四种原料 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$．我们把生产每单位产品$A$所消耗的第一种原料，即原料 $\alpha$ 的数量记成为 $a_{11}$，所消耗的第二种原料 $\beta$ 的数量记成为 $a_{21}$，所消耗的第三种原料 $\gamma$ 的数量记成为 $a_{31}$，所消耗的第四种原料 $\delta$ 的数量记成为 $a_{41}$。这里的 $a_{11}$, $a_{21}$, $a_{31}$, $a_{41}$ 都叫做产品 $A$ 分别对各种原料的直接消耗系数．同样，可以引出产品$B$和产品$C$分别对各种原料的直接消耗系数：$a_{12}$, $a_{22}$, $a_{32}$, $a_{42}$ 和 $a_{13}$, $a_{23}$, $a_{33}$, $a_{43}$。综上所述我们可以得出如下的关于直接消耗系数的表格：

| 消耗系数 原料＼产品 | A | B | C |
|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ |
| $\beta$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ |
| $\gamma$ | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ |
| $\delta$ | $a_{41}$ | $a_{42}$ | $a_{43}$ |

当我们考虑这个工厂的管理问题时，当然应该知道上述的全部直接消耗系数。它们综合起来，从关于原料的消耗方面，表现了这个工厂的生产水平。所以把它们集中地写成下述形式将是方便的：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

这个记号，把全部12个直接消耗系数排成了一个矩形的阵列，我们称它为这个工厂的直接消耗系数矩阵。按照习惯，称横排为行，竖排为列。上述“矩阵”有四个行三个列，故简单地说它是$4\times3$的矩阵。为引出矩阵的一般概念，我们把上述例子一般化。

设某工厂生产$n$种产品：$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，消耗$m$种原料：$B_1$，$B_2$，…，$B_m$。我们把生产每单位产品$A_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 所消耗的原料 $B_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 的数量记成$a_{ij}$，称之为第$j$种产品对第$i$种原料的直接消耗系数。由于有$n$种产品和$m$种原料，所以共有$m\times n$个直接消耗

系数。它们总起来作为一个整体，从消耗方面表现了这个工厂的生产（技术）水平。所以我们应该把这 $m\times n$ 个直接消耗系数看成一个整体，集中写成下述形式将是方便的也是必要的：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

同样地把这个矩形的阵列，称为这个工厂的直接消耗系数矩阵（简称为矩阵）．它是一个$m$行 $n$ 列的矩阵即 $m\times n$ 的矩阵。

上述的这种 $m\times n$ 的矩阵，既可以由某个工厂的直接消耗系数构成，又可以由具有其它的实际背景的量来构成。所以它是有着广泛的实际意义的。对矩阵本身的性质进行深入的探讨，当然是必要的。

以下我们从数学的角度，引出矩阵的一般概念：

**定义** 我们把 $m\times n$ 个数（纯量）$a_{ij}$ $(i=1, 2, \cdots m; j=1, 2, \cdots, n)$ 写成下述的 $m$ 行 $n$ 列的矩形阵列的形式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称之为 $m$ 行 $n$ 列的矩阵，或简称为 $m\times n$ 的矩阵。

一个普通的数可以看成是一行一列的矩阵。

矩阵，通常用字母 $A$, $B$, $C$ 等等表示。

特别地，我们把 1 行 $n$ 列的矩阵，即 $1\times n$ 的矩阵称为一个 $n$ 维的行向量；$m$行 1 列的矩阵，即 $m\times 1$ 的矩阵称为 $m$ 维的列向量。列向量通常用记号 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ 等等表示。例如

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

等等。对于向量 $\boldsymbol{x}$ 来说，$x_1$, $x_2$, …, $x_m$ 分别称为它的第 1 个，第 2 个，…，第 $m$ 个分量。

如果矩阵 $A$ 是

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

则 $a_{ij}$ 称为矩阵 $A$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列上的元素。

我们把以矩阵 $A$ 的行为列，列为行所组成的矩阵，称为 $A$ 的转置矩阵，记作 $A^T$，即

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

如果 $A$ 是某工厂的直接消耗系数矩阵，则 $A^T$ 称为这个工厂的投入——产出矩阵。

显然，列向量 $\boldsymbol{x}$ 的转置 $\boldsymbol{x}^T$ 为行向量，行向量 $\boldsymbol{y}$ 的转置

为列向量．以列向量$\boldsymbol{x}$为例，若

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{x}^T=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

所有元素皆为0的矩阵，称为零矩阵，记作0，即

$$0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

行数和列数相同的矩阵，称为方阵．$n\times n$ 的方阵，简称为$n$阶方阵．

设 $A$ 是一个 $n$ 阶方阵，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则 $a_{11}$，$a_{22}$，$\cdots$，$a_{nn}$ 称为 $A$ 的主对角线上的元素．如果$A$的元素满足

$$a_{ij}=\begin{cases} 1, 当\ i=j \\ 0, 当\ i\neq j \end{cases}$$

则$A$称为 $n$ 阶单位矩阵（幺矩阵），记作 $I_n$，即

$$I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

矩阵、向量的概念与线性方程组有着密切的联系. 例如设有线性方程组

$$\begin{cases}3x+2y+6z-5w=7\\2x-3y-7z+6w=8\\4x+y+2z-4w=6\end{cases}\qquad(3)$$

可以把未知向量 $x$, $y$, $z$, $w$ 和常数项7,8,6分别写成向量的形式

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}7\\8\\6\end{pmatrix}$$

也可以把方程组（3）的所有系数写成下述的矩阵的形式

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 6 & -5\\2 & -3 & -7 & 6\\4 & 1 & 2 & -4\end{pmatrix}$$

那么我们分别称 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$, $A$ 为方程组（3）的未知量向量，常数项向量和系数矩阵.

更一般地，对于含有 $n$ 个未知数的 $m$ 个线性方程所组成的方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad \cdots \quad \cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases} \tag{4}
$$

其系数矩阵是

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

而方程组（4）的未知量向量 $\boldsymbol{x}$ 和常数项向量 $\boldsymbol{b}$ 分别是

$$
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

## 第二节　矩阵的运算

**定义**　两个矩阵 $A$ 和 $B$，如果它们的行数相同，列数也相同，并且对应的元素相等，即

$$a_{ij} = b_{ij}$$

就说它们是相等的，记作 $A = B$.

在这一节，我们要来介绍矩阵之间的运算及其规律．为了易于了解问题的本质，我们的叙述将紧紧地结合着投入——产出问题．

设某企业由两个工厂组成，工厂$A$生产的产品是$A_1$，$A_2$，$A_3$，$A_4$；工厂$B$生产的产品是$B_1$，$B_2$，$B_3$，$B_4$。它们所用的原料都是$\alpha$，$\beta$，$\gamma$。每一单位产品$A_i$必须和相应的一单位产品$B_i$组合而成该企业的一单位产品$C_i$（$i=1$，2，3，4）。

设工厂$A$和工厂$B$的直接消耗系数矩阵分别是

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

和

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}$$

不难看出，每一单位产品$c_i$所消耗的第$j$种原料的数量$c_{ji}$应该是

$$c_{ji}=a_{ji}+b_{ji} \quad (j=1,\ 2,\ 3;\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

由此可见，整个企业的直接消耗系数矩阵是

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & a_{14}+b_{14} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & a_{24}+b_{24} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & a_{34}+b_{34} \end{pmatrix}$$

自然地，我们认为直接消耗系数矩阵$C$是由直接消耗系数矩阵$A$与$B$相加而成的。

就数学的意义而言我们有：两个矩阵，只有它们有相同的行数和相同的列数时才能相加，而且其和是一个矩阵，它的元素是由前两个矩阵的对应元素之和而构成的。即如果

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

则

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

类似地，我们可以定义矩阵$A$与$B$之差为对应的元素之差组成的矩阵，即有

$$A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

**例1** 设