

(PASCAL语言)

孙增圻

金亿创

钱宗华

叶 榛

编

[illegible]

计算机辅助设计控制系统 程序汇编 (PASCAL语言)

孙增圻 金亿创 编
钱宗华 叶 榛

宇航出版社

内 容 简 介

本书汇编了60多个控制系统CAD常用算法程序。全部程序分为六大块：(1)控制系统CAD常用的基本运算；(2)控制系统仿真；(3)控制系统模型转换；(4)控制系统的古典法分析和设计；(5)应用现代控制理论的控制系统分析和设计；(6)控制系统的模型辨识。这些程序为控制系统的分析、设计、建模和仿真提供了方便的工具。

所有程序均用PASCAL语言编制，在PDP-11/23计算机上的RT-11操作系统下调试通过，它们也可直接在VAX系列机上运行。每个程序均为独立的完整程序，它们采用了统一的输入输出格式，即每个程序均提供有两种输入方式（键盘输入和文件输入）和三种输出方式（屏幕输出、打印机输出和文件输出），因此使用方便和灵活。每个程序的说明部分介绍了程序的主要功能、特点、所采用的主要算法、程序的使用方法及计算举例。

本书可与所列参考文献[1]配合使用。文献[1]主要介绍算法，本书则给出相应的计算程序。本书可供从事控制工程的技术人员使用，也可作为高等学校相应专业的学生、研究生、教师及有关研究人员的参考书。

计算机辅助设计控制系统 程序汇编(PASCAL语言)

孙增圻 金亿创 编
钱宗华 叶 榛
责任编辑：张 芝

*

宇航出版社出版
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经销
建新厂印刷

*

开本：787×1092 1/16 印张：42.375 字数：1050千字

1989年8月第1版第1次印刷 印数：1—5000册

ISBN 7-80034-210-7/TP·013 定价：19.00元

前 言

为了普及和推广控制系统CAD技术在教学、科研及生产中的应用,本书汇编了60多个实用的设计程序。按照程序的内容,全书共分六章:(1)控制系统CAD常用的基本运算;(2)控制系统仿真;(3)控制系统模型转换;(4)控制系统的古典法分析和设计;(5)应用现代控制理论的控制系统分析和设计;(6)控制系统的模型辨识。这些程序为控制系统的分析、设计、建模和仿真提供了方便的工具,为控制系统从理论到实际应用之间架起了一座桥梁。

本书所提供的程序均用PASCAL语言编制,在PDP-11/23计算机上的RT-11操作系统下调试通过。由于PDP-11计算机是向上兼容的,因此它们也可以在VAX系列机上运行。利用这些应用程序,并加上相应的管理程序,我们研制成一个完整的控制系统CAD程序包THCAD-CS。该程序包已于1986年通过了部委级鉴定,并于1987年获得国家教委科技进步二等奖。该程序包除可在PDP-11/23计算机上运行外,目前已将它移植到了IBM-PC及Dual 6800计算机上。

本书所提供的是互相独立的应用程序,它们各自解决控制系统CAD中的一个方面的问题。程序采用了统一的输入和输出格式。每个程序均提供有两种输入格式——键盘输入和文件输入,三种输出格式——终端屏幕输出、打印机输出和文件输出。因此程序的使用方便灵活。

需要使用这些程序时,首先须将源程序经编译和连接成为可运行的目标程序,此后便可直接运行这些目标程序。程序运行后,首先回答输入和输出设备名,然后进行计算,直至最后输出结果。程序具体的询问和过程如下(下面划线部分表示由用户输入的内容):

问: PLEASE INPUT THE INPUT FILENAME:

TT: OR OTHER FILENAME

答: TT: (由键盘输入数据)

xxx.xxx (从磁盘文件中读取数据, xxx表示文件名和属性, 由用户自定)

问: PLEASE INPUT THE OUTPUT FILENAME:

TT: OR LP: OR OTHER FILENAME

答: TT: (终端屏幕输出)

LP: (打印机输出)

xxx.xxx (输出以该文件名存入磁盘)

当用键盘输入数据时,程序采用问答式工作方式,用户根据屏幕上给出的提示输入数据,

当用文件方式输入数据时,须首先建立数据文件。数据文件的格式和顺序与键盘输入时相同。由于以上操作过程对于每个程序均是相同的,因此这里给予统一说明,而不再在每个程序说明中加以重复。

本书每一节介绍一个独立的程序,其中包括程序的主要功能、特点、适用范围、算法简介、程序说明及计算举例,重点介绍程序的使用。对于所采用的算法只作了简要的介绍,其详细的说明及推导过程可参考书后所列参考文献。其中文献[1]是本书的主要参考资料,因此本书可与文献[1]配合使用。文献[1]主要介绍算法,本书则给出相应的计算程序及使用说明。对于每一个程序均给出了一些必要的计算举例,从而便于读者使用和验证这些程序。为查阅方便,所有程序清单均作为附录统一列在书后。

本书第一章由叶榛执笔,第二、四、六章由金亿创执笔,第三章由钱宗华执笔,孙增圻执笔第五章并校阅了全书。

参加本书程序编制工作的除以上执笔者外,本专业的部分大学生和研究生也为此作了大量的工作,此外,张毓凯、袁曾任和丁冬花等老师及本专业计算机房的工作人员对于这项工作也给予了很大的关心和帮助。在此向他们一并表示感谢。

本书可供从事控制工程的技术人员使用,也可作为高等学校相应专业的学生、研究生、教师及有关研究人员的参考书。

由于编者水平所限,书中肯定存在不少缺点和错误,欢迎广大读者批评指正。

编 者
(清华大学计算机系)

目 录

第一章 控制系统CAD常用基础算法

程序..... (1)

第一节 矩阵的基本运算..... (1)

第二节 矩阵求逆..... (2)

第三节 求矩阵范数..... (3)

第四节 矩阵的奇异值分解..... (5)

第五节 代数多项式求根..... (9)

第六节 计算矩阵的特征值和特征 向量..... (10)

第七节 多项式矩阵相乘..... (13)

第八节 多项式矩阵求逆..... (15)

第九节 化多项式矩阵为司密斯标 准形..... (17)

第十节 求最大公因子..... (19)

第十一节 连续李雅普诺夫方程的 求解..... (20)

第十二节 离散李雅普诺夫方程的 求解..... (22)

第十三节 代数李卡蒂 (Riccati) 方程 求解..... (24)

第二章 控制系统仿真..... (27)

第一节 连续线性系统仿真..... (27)

第二节 离散线性系统仿真..... (32)

第三节 采样控制系统仿真..... (37)

第四节 非线性系统仿真..... (46)

第五节 随机连续系统仿真..... (52)

第六节 随机采样系统仿真..... (55)

第七节 数字控制系统仿真..... (62)

第八节 直接状态反馈的MIMO采样控 制系统仿真..... (71)

第三章 控制系统模型的相互转换..... (75)

第一节 化连续状态方程为离散状态 方程..... (75)

第二节 化一般状态方程为能控、能观 标准形..... (79)

第三节 化状态方程为传递函数..... (83)

第四节 化连续传递函数为离散传递函数

的零阶保持器法..... (87)

第五节 连续和离散传递函数相互转换的

双线性变换..... (92)

第六节 多输入-多输出传递函数矩阵最

小状态方程的实现..... (96)

第七节 化SISO、SIMO和MISO传递

函数为状态方程..... (101)

第八节 化多项式系统矩阵为传递函

数阵..... (104)

第九节 结构图化简为状态方程..... (107)

第四章 古典法设计控制系统..... (115)

第一节 利用代数判据判断系统稳

定性..... (115)

第二节 用长除法求 z 反变换..... (117)

第三节 传递函数部分分式展开..... (118)

第四节 波特图的绘制..... (120)

第五节 串联校正PID调节器的设计..... (123)

第六节 用仿真方法优化PID调节器..... (126)

第七节 用分支跟踪法绘制根轨迹..... (130)

第五章 现代控制理论分析和设计系统..... (133)

第一节 按极点配置设计控制规律..... (133)

第二节 按极点配置设计观测器..... (137)

第三节 连续系统线性二次型最优控制规 律的计算..... (140)

第四节 离散和采样系统中线性二次型最 优控制规律的计算..... (142)

第五节 离散和采样系统中最优状态 估计器的计算..... (146)

第六节 连续系统二次型性能指标函数的 计算..... (150)

第七节 离散和采样系统中二次型性能指 标函数的计算..... (152)

第八节 随机连续控制系统中平均性能指 标函数的计算..... (157)

第九节 随机离散和采样系统中平均性能

指标函数的计算.....	(159)
第十节 连续系统中二次型性能函数及其 对控制器参数灵敏度的计算.....	(165)
第十一节 离散和采样系统中二次型性能 函数及其对控制器参数灵敏度 的计算.....	(167)
第十二节 连续系统中部分状态反馈次最 优控制器的计算.....	(171)
第十三节 离散和采样系统中部分状态反 馈次最优控制器的计算.....	(174)
第十四节 最小方差控制器的计算.....	(178)
第六章 控制系统模型参数辨识.....	(181)
第一节 随机数的产生.....	(181)
第二节 随机信号自相关函数的计算.....	(183)
第三节 随机信号互相关函数的计算.....	(183)
第四节 从随机信号中移去确定性的变化 趋势.....	(184)
第五节 离散傅立叶正变换.....	(185)
第六节 离散傅立叶反变换.....	(187)
第七节 频率法辨识系统模型参 数(一).....	(188)
第八节 频率法辨识系统模型参 数(二).....	(191)
第九节 用递推最小二乘算法辨识系统模 型参数.....	(192)
第十节 批处理广义最小二乘法辨识系统 模型参数.....	(194)
第十一节 递推广义最小二乘法辨识系统 模型参数.....	(197)
第十二节 批处理极大似然法辨识系统模 型参数.....	(199)
第十三节 递推极大似然估计法辨识系统 模型参数.....	(201)
附录(程序清单).....	(204)
1.1 矩阵的基本运算(MATOP).....	(205)
1.2 矩阵求逆(INVR).....	(208)
1.3 求矩阵范数(NORM).....	(211)
1.4 矩阵的奇异值分解(SVD).....	(215)
1.5 代数多项式求根(ROOT).....	(221)
1.6 计算矩阵的特征值和特征向量 (EIGEN).....	(234)

1.7 多项式矩阵相乘(MTPAB).....	(233)
1.8 多项式矩阵求逆(INVPOL).....	(236)
1.9 化多项式矩阵为司密斯标准 形(SMITH).....	(240)
1.10 求最大公因子(COMPMT).....	(246)
1.11 连续李雅普诺夫方程的求 解(LYPNVC).....	(251)
1.12 离散李雅普诺夫方程的求 解(LYAPD).....	(256)
1.13 代数李卡蒂(Riccati)方程求 解(RICCAT).....	(262)
2.1 连续线性系统仿真(RESF).....	(275)
2.2 离散线性系统仿真(SML).....	(290)
2.3 采样控制系统仿真 (SIMSAM).....	(301)
2.4 非线性系统仿真(SIMCON).....	(316)
2.5 随机连续系统仿真(SIMRAC).....	(334)
2.6 随机采样系统仿真(SIMRAD).....	(345)
2.7 数字控制系统仿真(SIMDIG).....	(359)
2.8 直接状态反馈的MIMO采样控制系 统仿真(SMSAM2).....	(375)
3.1 化连续状态方程为离散状态 方程(DISAB).....	(384)
3.2 化一般状态方程为能控、能观标准 形(NOMAL).....	(389)
3.3 化状态方程为传递函 数(STATR).....	(394)
3.4 化连续传递函数为离散传递函数的 零阶保持器法(TRCTRD).....	(398)
3.5 连续和离散传递函数相互转换的双 线性变换(BILIN).....	(405)
3.6 多输入-多输出传递函数矩阵最小状 态方程的实现(MINFTS).....	(409)
3.7 化SISO、SIMO和MISO传递函数 为状态方程(TRCSTC).....	(418)
3.8 化多项式系统矩阵为传递函数 阵(SYSTSR).....	(421)
3.9 结构图化简为状态方 程(SIMP).....	(426)
4.1 利用代数判据判断系统稳定 性(ROUTH).....	(432)

4.2	用长除法求 z 反变换(INVZ).....(436)		计算(DJD)(570)
4.3	传递函数部分分式展开(EXPAND).....(438)	5.12	连续系统中部分状态反馈式最优控制器的计算(SOPC)(581)
4.4	波特图的绘制(BODE).....(448)	5.13	离散和采样系统中部分状态反馈式最优控制器的计算(SOPD)(591)
4.5	串联校正PID调节器的设计(PID1)(454)	5.14	最小方差控制器的计算(MIN).....(603)
4.6	用仿真方法优化PID调节器(PID2)(464)	6.1	随机数的产生(STAT)(607)
4.7	用分支跟踪法绘制根轨迹(LOCU)(477)	6.2	随机信号自相关函数的计算(ACOF)(609)
5.1	按极点配置设计控制规律(CPLAS)(487)	6.3	随机信号互相关函数的计算(CCOF).....(611)
5.2	按极点配置设计观测器(OPLAS)(494)	6.4	从随机信号中移去确定性的变化趋势(TREND)(613)
5.3	连续系统线性二次型最优控制规律的计算(CLQ)(500)	6.5	离散傅立叶正变换(DFT).....(617)
5.4	离散和采样系统中线性二次型最优控制规律的计算(DLQ)(509)	6.6	离散傅立叶反变换(IDFT).....(620)
5.5	离散和采样系统中最优状态估计器的计算(KLM)(519)	6.7	频率法辨识系统模型参数(一)(FREQ)(623)
5.6	连续系统二次型性能指标函数的计算(CLOS)(527)	6.8	频率法辨识系统模型参数(二)(COID)(631)
5.7	离散和采样系统中二次型性能指标函数的计算(DLOS)(532)	6.9	用递推最小二乘法辨识系统模型参数(LSR)(642)
5.8	随机连续控制系统中平均性能指标函数的计算(RCLOS)(544)	6.10	批处理广义最小二乘法辨识系统模型参数(GLSB).....(650)
5.9	随机离散和采样系统中平均性能指标函数的计算(RDLOS)(549)	6.11	递推广义最小二乘法辨识系统模型参数(GLSR)(656)
5.10	连续系统中二次型性能函数及其对控制器参数灵敏度的计算(DJC)(561)	6.12	批处理极大似然法辨识系统模型参数(MLB).....(660)
5.11	离散和采样系统中二次型性能函数及其对控制器参数灵敏度的计算	6.13	递推极大似然估计法辨识系统模型参数(MLR).....(666)
		参考文献	(670)

第一章 控制系统CAD常用基础算法程序

第一节 矩阵的基本运算

一、概述

该程序可对矩阵进行乘、加、减及矩阵转置运算。

二、算法简介

算法比较简单故略去。下面只列出这四种基本运算的符号表示。

1. $C = A \cdot B$
2. $C = A + B$
3. $C = A - B$
4. $C = A^T$

三、程序说明

1. 输入参数

问答式时按照程序提问依次输入以下参数：

- (1) 选择运算方式：1——乘运算
2——加运算
3——减运算
4——转置
- (2) A 矩阵的行数
- (3) A 矩阵的列数
- (4) A 矩阵元素（按行输入）
- (5) B 矩阵的列数（仅乘法运算需输入此参数）
- (6) B 矩阵元素（转置不必输入此参数）

文件式输入时，需首先建立数据文件，其次序与问答式相同。

2. 输出参数

程序输出矩阵运算结果。

该程序目前能运行的最大维数为20，若超过此数，需修改程序中TYPE语句。

四、计算举例

例 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ 运算结果为

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 22 & 15 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

五、程序清单

见附录1.1。

第二节 矩阵求逆

一、概述

该程序采用列主元素消去法求给定满秩矩阵的逆。当给定矩阵为奇异时，程序输出零。

二、算法简介

设 A 为 $n \times n$ 的满秩矩阵， I 为同样维数的单位矩阵。对组合矩阵 $[A : I]$ 进行一系列的 行初等变换，使得 $[A : I]$ 变成 $[I : B]$ 的形式，则 B 便为 A 的逆矩阵。

三、程序说明

1. 输入参数

问答式时按照程序提问依次输入以下参数：

(1) 待求矩阵的维数

(2) 待求矩阵元素

文件式输入时，需首先建立数据文件，其次序与问答式相同。

2. 输出参数

程序输出给定矩阵的逆。

该程序目前能运行的最大维数为10，若超过此数，可修改程序中的CONST语句。

四、计算举例

已知 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ，运行该程序算得结果为：

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

五、程序清单

见附录1.2。

第三节 求矩阵范数

一、概述

该程序用于求一个实矩阵 $A_{n \times m}$ 的无穷范数、1范数和2范数。它们的表达式分别为:

$$(1) \quad \|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \quad (3.1)$$

$$(2) \quad \|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (3.2)$$

$$(3) \quad \|A\|_2 = [\lambda_{\max}(A^T A)]^{1/2} \quad (3.3)$$

其中 $\lambda_{\max}(A^T A)$ 表示 $A^T A$ 的最大特征值。求特征值采用了雅可比 (Jacobi) 分解法。

一、算法简介

$\|A\|_\infty$, $\|A\|_1$ 算法略。求矩阵的 2 范数关键是计算 $A^T A$ 的特征值, 程序中采用了雅可比分解法求 $A^T A$ 的特征值, 算法简述如下。

用 A_0 表示 $A^T A$, 则正交变换为:

$$A_k = R_k A_{k-1} R_k^T \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.4)$$

如矩阵 A_{k-1} 的非对角元素中按模最大者是 $a_{pq}^{(k-1)}$ (设 $p < q$)，则 R_k 为具有如下形式的正交矩阵：

$$R_4 = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} 1 & & & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & 0 & \\ \hline & \cos \theta & 0 & \cdots & 0 & \sin \theta & & & & \\ & 0 & 1 & & 0 & 0 & & & 0 & \\ & 0 & & & & & & & & \\ & 0 & 0 & & 1 & 0 & & & & \\ & -\sin \theta & 0 & \cdots & 0 & \cos \theta & & & & \\ \hline & & & & & & & & 1 & \\ & 0 & & & 0 & & & & & \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{第 } p \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \\ \text{第 } q \text{ 行} \end{array}$$

印

$$\left. \begin{aligned} r_{pp}^{(k)} &= r_{qq}^{(k)} = \cos \theta & r_{pq}^{(k)} &= -r_{qp}^{(k)} = \sin \theta \\ r_{ii}^{(k)} &= 1 (i \neq p, q) & r_{ij}^{(k)} &= 0 \text{ (所有其它非对角元)} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

θ 的选择为

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad (3.7)$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{x}{y} \quad (3.8)$$

$$\cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\theta}} \quad (3.9)$$

$$2\sin\theta\cos\theta = \operatorname{tg} 2\theta \cos 2\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (3.10)$$

其中

$$y = |a_{pp}^{(k-1)} - a_{qq}^{(k-1)}| \quad (3.11)$$

$$x = \operatorname{sign}(a_{pq}^{(k-1)} - a_{qp}^{(k-1)}) 2a_{pq}^{(k-1)} \quad (3.12)$$

根据式 (3.11), (3.12) 算出 x, y 值, 再根据式 (3.9) (3.10) 求出 $\cos\theta, \sin\theta$ 值。

若经 r 次变换后 A 变成对角阵, 则迭代停止。由式 (3.4) 有

$$A = R_1 \dots R_r A_0 R_1^T \dots R_r^T \quad (3.13)$$

矩阵 A 的对角元素 $a_{ii}^{(r)}$ 即为所求特征值。

三、程序说明

1. 输入参数

问答式时按照程序提问依次输入以下参数:

- (1) 矩阵 A 的行数
- (2) 矩阵 A 的列数
- (3) 矩阵元素
- (4) 所求范数类型, $l=0$ 为无穷范数

$l=1$ 为1范数

$l=2$ 为2范数

文件式输入时, 需首先建立数据文件, 其次序与问答式相同。

2. 输出参数

矩阵的范数。

该程序目前能运行的最大维数为20, 若超过此数, 需修改程序中的CONST语句。

四、计算举例

例 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

计算结果为

$$\|A\|_{\infty} = 7, \|A\|_1 = 6, \|A\|_2 = 5.464986$$

五、程序清单

见附录1.3。

第四节 矩阵的奇异值分解

一、概述

该程序用来进行矩阵的奇异值分解。对于 $m \times n$ 实矩阵 A ，存在 $m \times m$ 正交矩阵 U 以及 $n \times n$ 矩阵 V 使得

$$A = U \Sigma V^T$$

其中

$$\Sigma = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

以及

$$S = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$$

其中 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 = \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n$ ，称为矩阵 A 的奇异值。矩阵奇异值分解简称SVD。SVD的计算包括豪斯霍尔德 (Householder) 变换与QR分解两个主要的计算。它是近十多年来发展起来的具有很好的数值计算特性的有效算法。适用于以矩阵作为分析工具的一系列问题的计算。特别适合于有关的病态问题的计算。

二、算法简介

1. 用豪斯霍尔德变换将矩阵 A 化为双对角线型。

对给定任何向量 X ，存在一个豪斯霍尔德变换矩阵 Q ，它使得

$$QX = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

其中

$$\lambda = \|X\| = (X^T X)^{1/2} \quad (4.2)$$

$$Q = I - 2WW^T \quad (4.3)$$

W 为单位长度列向量，可以这样组成

$$\begin{cases} w_1 = \left[\frac{1}{2} (1 - x_1/\lambda) \right]^{1/2} \\ w_i = -x_i / 2w_1 \lambda, \quad i = 2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (4.4)$$

下面以一个 5×4 的矩阵为例说明算法步骤。

设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \vdots & & \vdots \\ a_{31} & \vdots & & \vdots \\ a_{41} & \vdots & & \vdots \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

令

$$\bar{\mathbf{X}} = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, r_{11}, a_{51})^T$$

利用公式 (4.4) 计算出豪斯霍尔德变换中的单位长度向量, 并记它为 $\mathbf{W}_1$ 进而计算 $U_1 = I - 2\mathbf{W}_1\mathbf{W}_1^T$ 并计算得到

$$A^1 = U_1 A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & : & : \\ 0 & : & : & : \\ 0 & : & : & : \\ 0 & a_{52}^{(1)} & a_{53}^{(1)} & a_{54}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

再令 $\mathbf{X}^1 = (a_{12}^{(1)}, a_{22}^{(1)}, a_{52}^{(1)})^T$ 按照同样的方法算出相应的豪斯霍尔德变换阵 $V_1 = I - 2\mathbf{W}_1\mathbf{W}_1^T$ 以使得

$$V_1^T \mathbf{X}_1 = (\lambda_1^1, 0, 0)^T \quad (4.7)$$

组成如下矩阵

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (V_1^1)^T \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

并用 V_1 右乘 A_0^1 得

$$A_1 = A^1 V_1^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & : & : & : \\ 0 & : & : & : \\ 0 & a_{52}^{(2)} & a_{53}^{(2)} & a_{54}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

按照类似的方法选择 V_2 和 V_1^T , 并依次类推最终可求得

$$A_4 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_2^1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \lambda_3^1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

由于所进行的都是正交变换, 所以 A 和 A_4 具有相同的奇异值

2. 对角化

下一步就是将 A_4 进行对角化, 它是通过一种旋转变换来实现的, 这是 QR 方法的一种变形。这里说的对角化是一个逐步逼近的过程。

定义矩阵 P_{ij}

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & r & \cdots & \sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -\sigma & \cdots & r & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{第 } i \text{ 行} \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \text{第 } i \text{ 列} \\ \text{第 } j \text{ 列} \end{matrix} \quad (4.11)$$

为 (i, j) 平面上的一个旋转。其中 $r^2 + \sigma^2 = 1$ 。可证 P_{ij} 为一正交矩阵, 且对任意矩阵 A , $B = P_{ij}A$ 与 A 的不同仅在第 i 行和第 j 行, 这两行元素由

$$\beta_{ik} = r a_{ik} + \sigma a_{jk} \quad (4.12)$$

$$\beta_{jk} = -\sigma a_{ik} + r a_{jk} \quad (4.13)$$

给出。若置

$$r = a_{ji} / (a_{ji}^2 + a_{ii}^2)^{1/2} \quad (4.14)$$

$$\sigma = -a_{ii} / (a_{ji}^2 + a_{ii}^2)^{1/2} \quad (4.15)$$

则

$$\beta_{ii} = 0$$

若按 (4.14) 选 r , 且置

$$\sigma = a_{ji} / (a_{ji}^2 + a_{ii}^2)^{1/2} \quad (4.16)$$

则

$$\beta_{ji} = 0$$

同样, $C = AP_{ij}$ 与 A 的不同仅在第 i 列与第 j 列。适当选择 r 和 σ 可使这两列中的某一元素为零。

因式 (4.10) 中 A_0 最后一行是零, 因此在以下讨论中只须考虑方阵, 为书写方便, 把它记为一般形式

$$= \begin{vmatrix} \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{vmatrix} \quad (4.17)$$

首先选择 $(1, 2)$ ——平面上的旋转 R_{12} , 使得 $R_{12}(A^T A - kI)$ 的 $(2, 1)$ 元素为零。其中 k 为位移, 它的计算将在后面介绍。

令 $Q_0 = R_1^T$ 做变换

$$A' = AQ_0 \quad (4.18)$$

A' 将有如下形式

$$A' = \begin{vmatrix} \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{vmatrix} \quad (4.19)$$

其次选 P_{12} 为 $(1, 2)$ ——平面上的一个旋转, 使得 $P_{12}A'$ 中的 $(2, 1)$ 元素为零, 这时 $P_{12}A' = P_{12}AQ_0$ 具有如下形式

$$P_{12}A' = \begin{vmatrix} \times & \times & \times & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{vmatrix} \quad (4.20)$$

再选 Q_{23} 为(2, 3)——平面上的一个旋转, 使得 $P_{12}A'Q_{23}$ 中的(1, 3)元素为零, 这时 $P_{12}A'Q_{23}$ 具有如下形式:

$$P_{12}A'Q_{23} = \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

式(4.21)的右下角子阵具有式(4.19)的形式, 重复以上过程, 最终又回到了双对角线型。

$$PAQ = \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

至此一次迭代结束。重复进行以上过程, 矩阵的次对角线元素将逐步趋于零, 其中右下角元素 $\times$ 收敛最快(立方级)。当 $|\hat{\times}| < \varepsilon$ 时, $\hat{\times}$ 就是所求的一个奇异值, 当所有次对角线元素都近似为零时, 则求得了 A 的全部奇异值。将所有变换阵进行积累, 就可得到变换阵 U 和 V 。

3. 位移 k 的计算

在每次迭代中, 位移 k 是不一样的, 随着迭代过程的进行, 最终 k 将趋于 $A'A$ 的一个特征值。在每次迭代开始时计算一次 k 值, 设

$$A = \begin{bmatrix} w_1 & r_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & r_{n-1} \\ 0 & & & w_{n-1} & r_n \\ & & & & w_n \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

k 值由下式给出

$$\begin{cases} f = \frac{(r_{n-1} - r_n)(r_{n-1} + r_n) + (w_{n-1} - w_n)(w_{n-1} + w_n)}{2w_n r_n} \\ k = r + w - w_{n-1} r_n / [f + \text{sign}(f)(f^2 + 1)^{1/2}] \end{cases} \quad (4.24)$$

三、程序说明

1. 输入参数

问答式时按照程序提问依次输入以下参数:

- (1) 矩阵行数
- (2) 矩阵列数

(3) 矩阵元素

文件式输入时, 需首先建立数据文件, 其次序与问答式相同。

2. 输出参数

(1) 矩阵奇异值

(2) 奇异值分解左乘矩阵U

(3) 奇异值分解右乘矩阵V

该程序目前能运行的最大维数为10, 若超过此数, 需修改程序中的CONST语句。

四、计算举例

例 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

运行该程序算得结果为:

奇异值: $\begin{bmatrix} 0.3659663 \\ 5.464985 \end{bmatrix}$

$$U = \begin{bmatrix} 0.9145142 & 0.4045537 \\ -0.4045536 & 0.9145142 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} -0.8174155 & 0.5760484 \\ 0.5760484 & 0.8174155 \end{bmatrix}$$

五、程序清单

见附录1.4。

第五节 代数多项式求根

一、概述

该程序采用二次劈因子法求实系数多项式方程

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (5.1)$$

的全部实、复根。这种算法的特点是不需要复数运算。

二、算法简介

设 $\omega_0(x) = x^2 + p_0 x + q_0 = 0$ 是一元 n 次方程

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (5.2)$$

的一个近似二次因式。用 $\omega_0(x)$ 除 $f(x)$ 得商

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n-2} b_i x^{n-i-2} \quad (5.3)$$

和余式

$$R(x) = r_0 x + r_1 \quad (5.4)$$

于是有