

全 国 名 牌 大 学 附 中

优秀生 考前训练要诀



数学

单承华 陆继红 编著

本书助你得高分

○ 考试要点难点全搜索

○ 训练秘诀高招全揭示

○ 基础题拓展题全无敌

北京师大附中
北京师大附中
辽宁师大附中
中国科大附中
北京师大附中
福建师大附中
复旦附中
华东师大二附中

湖南师大附中
北京师范大学附中
山西大学附中
湖南师大附中
江西师大附中
交通大学附中
山西师大实验中学

东方出版中心



图书在版编目 (CIP) 数据

全国名牌大学附中优秀生考前训练要诀·中考数学/
单承华, 陆继红编著. —上海: 东方出版中心, 2003. 1

ISBN 7-80627-986-5

I. 全… II. ①单…②陆… III. 数学课—初中—升
学参考资料 IV. G 634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 079167 号

全国名牌大学附中优秀生考前训练要诀·中考数学

出版发行: 东方出版中心

地 址: 上海市仙霞路 335 号

电 话: 62417400

邮政编码: 200336

经 销: 新华书店上海发行所

印 刷: 昆山市亭林印刷有限责任公司

开 本: 787×1092 毫米 1/16

字 数: 190 千

印 张: 8.5

印 数: 1-7000

版 次: 2003 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 7-80627-986-5/G·371

全套定价: 50.00 元 (共 5 册)

版权所有, 侵权必究。

内 容 提 要

“全国名牌大学附中优秀生考前训练要诀”丛书系由全国名校资深教师编写的应考训练读物,介绍名校考前训练的独到的、行之有效的要诀、方法、程序、习题等,让学生通过自我训练,以良好的应试能力应对升学或毕业考试。本中考数学是其中之一,分上、下两编:上编为“技能训练”,下编为“创新训练”,共近40个“训练要点”。每一个“训练要点”均依据最新的课程标准和考试要求编写,由“训练要诀”、“训练示范”、“训练题目”三部分组成。书末附有全部“训练题目”的参考答案与解题提示。本书体现了名校名师的教学经验和卓有成效的训练、复习方法,特别适宜于全国应届初中毕业生升学应考之用,也可供有关教师和家长参考。

全国名牌大学附中优秀生
考前训练要诀编委会
(以姓氏笔画为序)

马洪邦	叶佩玉	刘	芸	孙福生	
张	林	吴华宝	时	云	时利民
林新民	周望城	晋	军	徐传胜	
徐昭武	郭杰森	曹	军		

目 录

上编 技能训练	1
一、实数	1
二、整式	3
三、分式	6
四、二次根式	8
五、一次方程(组)	11
六、一元二次方程	14
七、分式方程	16
八、无理方程	19
九、简单的二元二次方程组及其解法	20
十、一元一次不等式(组)	23
十一、函数与函数自变量的取值范围	25
十二、一次函数及其图象	27
十三、反比例函数及其图象	28
十四、二次函数及其图象	30
十五、统计初步	32
十六、相交线与平行线	35
十七、三角形及其主要线段	38
十八、全等三角形	41
十九、平行四边形	45
二十、梯形	48
二十一、平行线与比例线段	51
二十二、相似形	55
二十三、解直角三角形	59
二十四、圆的基本概念和性质	63
二十五、点、直线、圆与圆的位置关系	65
二十六、与圆有关的角	70
下编 创新训练	74
二十七、化归法	74
二十八、数形结合法	76
二十九、整体思维法	78
三十、构造法	79

三十一、代数问题分类讨论法	81
三十二、代数探索型问题	84
三十三、代数应用题	86
三十四、综合法和分析法	89
三十五、反证法	92
三十六、几何问题分类讨论法	93
三十七、图形变换法	96
三十八、几何探索型问题	100
三十九、几何应用题	105
参考答案与解题提示	110

上编 技能训练

一、实数

[训练要诀]

应掌握实数的主要概念:数轴,相反数,倒数,绝对值等。绝对值也可从它的几何意义定义,即一个数 a 的绝对值就是数轴上表示数 a 的点和原点的距离。对于绝对值必须注意:1.绝对值的非负性,即 $a \geq 0$ 。2.绝对值原数的双值性,即若 $|x| = a$ ($a \geq 0$),则 $x = \pm a$ 。

3. 分类讨论,即 $|a| = \begin{cases} a & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -a & (a < 0), \end{cases}$ 也即根据数 a 的不同情况, $|a|$ 有不同的结论。实数

的运算是代数运算的基础,关键是确定运算顺序,随时检查运算结果的符号,并把握绝对值化简的正确方法。

[训练示范]

例1 比较大小:

(1) 如果实数 $a < 0$, $b < 0$, 且 $\sqrt{a^2} > \sqrt{b^2}$, 试比较 a 与 b 的大小;

(2) 如果实数 $b < a < 0$, 试比较 a , $|b|$, $a-b$ 的大小。

解析与答案 应画出数轴,利用数形结合比较大小。

(1) $\sqrt{a^2} > \sqrt{b^2}$, 可变形为 $|a| > |b|$,

画出数轴:

即知 $a < b$ 。

说明 本例也可赋 a 、 b 以特殊值求解。

(2) 由数轴观察:

可知: $a - b > 0$, $|b| > a - b > 0$,

$\therefore |b| > a - b > a$ 。

例2 已知 $|x-1| + |x-3| = 4$, 求 x 的取值范围。

解析与答案 可利用 $x+1$ 和 $x-3$ 的零点进行分类讨论,也可根据绝对值的几何意义求解。

解法一:

当 $x \leq -1$ 时,原方程变形为:

$$-x-1-x+3=4, \text{解得: } x=-1。$$

当 $-1 < x < 3$ 时,原方程变形为:

$$x+1-x+3=4,$$

这就是说,在 $-1 < x < 3$ 时, x 的一切实数都适合这个方程。

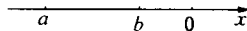


图 1-1

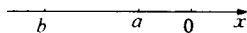


图 1-2

当 $x \geq 3$ 时,原方程变形为:

$$x+1+x-3=4, \text{解得: } x=3。$$

综上所述, x 的取值范围是 $-1 \leq x \leq 3$ 。

解法二:

$$|x+1|+|x-3|=4, \text{即 } |x-(-1)|+|x-3|=4。$$

此式表示数轴上点 x 到点 -1 的距离与到点 3 的距离之和为 4 。

由数轴上可知,满足 $-1 \leq x \leq 3$ 的所有点 x 到点 -1 与到点 3 的距离之和均为 4 。故所求的范围为 $-1 \leq x \leq 3$ 。

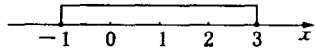


图 1-3

说明 方法一是利用分类讨论求解,方法二是利用 $|x-a|$ 的几何意义求解。在这里,显然是方法二直观,简捷。

[训练题目]

1. 选择题

(1) 在 $\sin 45^\circ$, $\sqrt{5}$, 3.14 , π 四个数中无理数的个数是 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ 的倒数是 ()

- (A) $1-\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2}+1$ (C) $-1+\sqrt{2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

(3) 1 纳米 = 0.000 000 001 米, 则 2.5 纳米用科学记数法表示为 ()

- (A) 2.5×10^{-7} 米 (B) 2.5×10^{-8} 米
(C) 2.5×10^{-9} 米 (D) 2.5×10^{-10} 米

(4) 若 $a+b < 0$, $a < 0$, $b > 0$ 则 a , $-a$, b , $-b$ 的大小关系是 ()

- (A) $a < -b < b < -a$ (B) $-b < a < -a < b$
(C) $a < -b < -a < b$ (D) $-b < a < b < -a$

2. 填空题

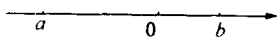
(1) 若实数 m , n 满足 $|4m-3|+n^2=0$, 则 m^n 的值为 _____

(2) 如果实数 a 的相反数大于它的倒数, 那么 $\frac{|a|}{a} =$ _____

(3) 在数轴上, 到原点的距离是 π 的点所对应的数是 _____

(4) 计算: $(-6)^2 \div 9 + 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + (\pi - \sqrt{2})^0 =$ _____

3. 若实数 a , b 在数轴上对应点如下图所示:



化简: $\sqrt{b(b-2a)+a^2} - \sqrt{(a-b)^2+4ab}$ 。

4. 已知 $|4x+1|=2$, 求 $x+2$ 的平方根。

5. 已知 $|x+3|+|x-2|=5$, 求 x 的取值范围。

6. 已知有理数 a, b, c 满足:

$$a + |a| = 0, b + 3|b| = 0, |b + c| \cdot c = 1。$$

化简: $|a - 2bc| - |c - a + 3|$ 。

7. 已知 a, b 是两个有理数, 且 $b > a, c = a + \frac{\sqrt{3}}{3}(b - a)$ 。

(1) 求证: $a < c < b$; (2) c 是有理数, 还是无理数? 为什么?

二、整 式

[训练要诀]

整式的混合运算中要特别注意顺序: 先乘方, 再乘除, 最后加减, 如有括号, 应先算括号内的; 对同一级运算, 应从左到右依次运算。要把握乘法公式的特点, 凡能用乘法公式的, 一定要用它来计算。因式分解的一般步骤是先看各项有没有公因式, 若有应先提取公因式, 而且要一次提取干净。再看能否应用乘法公式, 若是二项式, 可运用平方差公式或立方和(差)公式; 若是三项式, 可考虑应用完全平方式; 如属 $ax^2 + bx + c$ 型的二次三项式, 可考虑用十字相乘法或求根公式分解; 其他还可考虑用分组分解法或用除法分解。

[训练示范]

例 1 计算下列各题:

(1) $(x + 2z - 3y)(3y + 2z - x)$;

(2) $\left(m^2 - \frac{1}{4}\right)\left(m^2 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}\right)\left(m^2 - \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}\right)$;

(3) 已知 $a = mx + p - 1, b = mx + p, c = mx + p + 1$ 。

求 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$ 的值。

解析与答案 对于(1)、(2), 应根据题设特征创设条件, 直接运用乘法公式进行计算。对于(3), 可用代入法求解; 但若抓住 a, b, c 之间关系, 逆向运用乘法公式求解, 可使计算简捷。

$$\begin{aligned}(1) (x + 2z - 3y)(3y + 2z - x) &= [2z + (x - 3y)][2z - (x - 3y)] \\&= (2z)^2 - (x - 3y)^2 \\&= 4z^2 - (x^2 - 6xy + 9y^2) \\&= 4z^2 - x^2 + 6xy - 9y^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \text{原式} &= \left(m + \frac{1}{2}\right)\left(m - \frac{1}{2}\right)\left(m^2 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}\right)\left(m^2 - \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}\right) \\&= \left[\left(m + \frac{1}{2}\right)\left(m^2 - \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}\right)\right]\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)\left(m^2 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}\right)\right] \\&= \left[m^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right]\left[m^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right]\end{aligned}$$

$$= (m^3)^2 - \left[\left(\frac{1}{2} \right)^3 \right]^2$$

$$= m^6 - \frac{1}{64}.$$

$$(3) a-b=-1, b-c=-1, c-a=2,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2]$$

$$= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

$$= \frac{1}{2}[(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2] = 3.$$

说明 (1)题中,应找到相同的项“ $2x$ ”作为公式中的 a ,互为相反数的项“ $x-3y$ ”与“ $3y-x$ ”,作为公式中的“ b ”与“ $-b$ ”,然后运用平方差公式进行计算;(2)题中先逆向运用乘法公式,即将 $m^2 - \frac{1}{4}$ 变形为 $(m + \frac{1}{2})(m - \frac{1}{2})$,于是为利用立方和、立方差公式创设了条件,使计算相当简捷;(3)题中易把 a, b, c 的值代入 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$ 求值,这当然可以,但太繁琐。若能深入观察,发现 a, b, c 中有相同的项 $mx + p$,就可设法先消去 $mx + p$,从而为逆向运用乘法公式创设条件,使计算简捷。

例2 把下列各式分解因式:

- (1) $a^2(x-y) - 2a(x-y)^2 - (y-x)^3$;
- (2) $4a^2 + b^2 - 9c^2 + 4ab$;
- (3) $a^3x^3 + x^3 - a^3y^3 - y^3$;
- (4) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 120$;
- (5) $2x^2 - 8x - 7$ 。

解析与答案 对于(1)、(2)、(3)可利用因式分解的一般步骤求解;对于(4),应适当运用结合律,将原式转化为某个代数式的二次三项式,再分解因式;对于(5)可用求根公式或配方法分解。

$$(1) \text{原式} = (x-y)[a^2 - 2a(x-y) + (x-y)^2]$$

$$= (x-y)[a - (x-y)]^2$$

$$= (x-y)(a-x+y)^2.$$

$$(2) \text{原式} = 4a^2 + 4ab + b^2 - 9c^2$$

$$= (2a+b)^2 - (3c)^2$$

$$= (2a+b+3c)(2a+b-3c).$$

$$(3) \text{原式} = x^3(a^3+1) - y^3(a^3+1)$$

$$= (a^3+1)(x^3-y^3)$$

$$= (a+1)(a^2-a+1)(x-y)(x^2+xy+y^2).$$

$$(4) \text{原式} = [(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)] - 120$$

$$\begin{aligned}
&= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 120 \\
&= (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) + 24 - 120 \\
&= (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) - 96 \\
&= (x^2 + 5x + 16)(x^2 + 5x - 6) \\
&= (x^2 + 5x + 16)(x - 1)(x + 6)。
\end{aligned}$$

(5) 方程 $2x^2 - 8x - 7 = 0$ 的两根为 $x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{120}}{4} = 2 \pm \frac{\sqrt{30}}{2}$,

$$\therefore 2x^2 - 8x - 7 = 2\left(x - 2 - \frac{\sqrt{30}}{2}\right)\left(x - 2 + \frac{\sqrt{30}}{2}\right)。$$

说明 (1)题启示我们要注意因式分解的步骤,即先提取公因式,再应用公式。(2)、(3)题都是四项式,同样先考虑提取公因式,然后考虑分组分解法。应用分组分解法的关键在于使所分各组之间有公因式或可继续应用公式进行分解。(4)题在运用结合律时,要注意选择,以期转化为关于“ $x^2 + 5x$ ”的二次三项式,用十字相乘法继续分解。(5)题利用求根公式(或配方法)分解虽很简单,但在写结果时千万别忘了把二次项的系数去乘以两个一次因式。

[训练题目]

1. 计算下列各题:

(1) $(-4xy^2)^3 \div [(-8x^2y^4)^2 \div (-2xy^2)^3]$;

(2) $[(a+b)^3 + (a+b)^2(a-b) - (a+b)(a-b)^2] \div (a+b)$;

(3) $(x^2 - 9y^2)(x^2 - 3xy + 9y^2)(x^2 + 3xy + 9y^2)$ 。

2. 若 m, n 为整数,且有 $(mx - 3y)(3x + 2y) = 6x^2 - nxy - 6y^2$, 求 m, n 的值。

3. 已知 $x = \sqrt{3} + 6$, 求 $x^2 - 12x + 40$ 的值。

4. 如果 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$, 求 $\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + 4\sqrt{xy}}{x + \sqrt{xy}}$ 的值。

5. 已知: a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三条边,且满足 $a^2 + b^2 + c^2 + 50 = 6a + 8b + 10c$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状。

6. 已知: $a - b = \sqrt{2} + 1$, $b - c = \sqrt{2} - 1$, 求 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$ 的值。

7. 把下列各式分解因式:

(1) $(x - y - z)(x + y - z) - (y - z - x)(y + z - x)$;

(2) $a^2 + 9b^2 - 4c^2 - 6ab$;

(3) $2x^2 - 4x - 3$;

(4) $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15$;

(5) $a^4 + a^2b^2 + b^4$ 。

8. 解答下列各题:

(1) 证明 $47^3 - 15^3$ 能被 32 整除;

(2) 若 $a+b=1$, 求 $a^3+3ab+b^3$ 的值;

(3) 对于自然数 n , 求证 $2^{n+4}-2^n$ 能被 30 整除;

(4) 计算: $\frac{1}{2002^3-2001(2002^2+2003)}$ 。

9. 为了使式子 $x^2-mx+30$ 在整数范围内可因式分解, 问 m 可取哪些整数?

三、分 式

[训练要诀]

对于分式 $\frac{A}{B}$ (A 、 B 均为整式), 要注意 B 中含有字母, 且 $B \neq 0$ 。分式的基本性质中, 要注意分式的分子与分母都乘以(或除以)同一个不等于 0 的整式, 分式的值不变。分式的运算法则是: 加减法: $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$, $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$; 乘法: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; 除法: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$; 乘方: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (n 为正整数)。分式的混合运算法则应注意运算顺序, 先乘方, 再乘除, 最后做加减, 并要灵活运用运算性质进行简便运算。

[训练示范]

例 1 计算 $\frac{3}{x^2-5x+4} - \frac{7}{x^2-x-12} + \frac{4}{x^2+2x-3}$ 。

解析与答案 先将各分式的分母因式分解:

原式 = $\frac{3}{(x-1)(x-4)} - \frac{7}{(x+3)(x-4)} + \frac{4}{(x+3)(x-1)}$ 。至此, 一般可利用通分, 化各分式为分母是最简公分母的同分母分式, 进行加减。但若深入观察, 可发现上述各分式均为 $\frac{m-n}{mn}$ 型, 可拆成 $\frac{1}{n} - \frac{1}{m}$ 进行简便运算。

$$\begin{aligned}\text{解法一: 原式} &= \frac{3}{(x-1)(x-4)} - \frac{7}{(x+3)(x-4)} + \frac{4}{(x+3)(x-1)} \\ &= \frac{3(x+3)}{(x+3)(x-1)(x-4)} - \frac{7(x-1)}{(x+3)(x-1)(x-4)} \\ &\quad + \frac{4(x-4)}{(x+3)(x-1)(x-4)} \\ &= \frac{3x+9-(7x-7)+(4x-16)}{(x+3)(x-1)(x-4)} = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{解法二: 原式} &= \frac{3}{(x-1)(x-4)} - \frac{7}{(x+3)(x-4)} + \frac{4}{(x+3)(x-1)} \\ &= \frac{(x-1)-(x-4)}{(x-1)(x-4)} - \frac{(x+3)-(x-4)}{(x+3)(x-4)} + \frac{(x+3)-(x-1)}{(x+3)(x-1)} \\ &= \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-1}\right) - \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+3}\right) + \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}\right) = 0.\end{aligned}$$

说明 方法一是常规解法,但切忌把 $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - x - 12)(x^2 + 2x - 3)$ 作为公分母。在通分前,应将各分式的分母因式分解,以确定最简公分母是 $(x+3)(x-1)(x-4)$ 。方法二显然比方法一简捷。可见多观察、勤思考是何其重要。

例 2 根据下列条件,求 $\left(1 - \frac{2y^3}{x^3 + y^3}\right) \div \left(1 - \frac{2y}{x + y}\right)$ 的值。

$$(1) 3x^2 - 7xy + 2y^2 = 0; \quad (2) 2x^2 - 5xy + 3y^2 = 0.$$

解析与答案 先化简原式,然后利用条件,用 x 表示 y (或用 y 表示 x),代入化简后,使原式只含一个字母即可求解。但注意分母不为零的条件。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{x^3 + y^3 - 2y^3}{x^3 + y^3} \div \frac{x + y - 2y}{x + y} \\ &= \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{(x + y)(x^2 - xy + y^2)} \cdot \frac{x + y}{x - y} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}. \end{aligned}$$

$$(1) 3x^2 - 7xy + 2y^2 = 0,$$

$$(3x - y)(x - 2y) = 0,$$

$$3x - y = 0 \text{ 或 } x - 2y = 0,$$

解得: $y = 3x$, 或 $x = 2y$ 。

$$\text{当 } y = 3x \text{ 时, } \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{x^2 + 3x^2 + (3x)^2}{x^2 - 3x^2 + (3x)^2} = \frac{13}{7};$$

$$\text{当 } x = 2y \text{ 时, } \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{(2y)^2 + 2y^2 + y^2}{(2y)^2 - 2y^2 + y^2} = \frac{7}{3}.$$

$$(2) 2x^2 - 5xy + 3y^2 = 0,$$

$$(2x - 3y)(x - y) = 0,$$

$\because x - y$ 是分母中的因式, $\therefore x - y \neq 0$,

解得: $2x - 3y = 0$, 即 $x = \frac{3}{2}y$ 。代入得

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{\left(\frac{3}{2}y\right)^2 + \frac{3}{2}y^2 + y^2}{\left(\frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{3}{2}y^2 + y^2} = \frac{19}{7}.$$

说明 这两个小题初看有点类似,但截然不同。第(1)题由条件可得 $y = 3x$ 或 $x = 2y$,故须分类讨论,有两解;第(2)题中则须挖掘分母中因式不为零这一隐含条件: $x - y \neq 0$,故由条件只能得 $x = \frac{3}{2}y$, 只有一解。这里也告诉我们,讨论分式有无意义时,必须对原分式进行讨论,不能讨论化简后的分式。

[训练题目]

1. 当 x 是什么值时,下列分式有意义? 又当 x 是什么值时,它的值等于零?

$$(1) \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2};$$

$$(2) \frac{x + 2}{1 + \frac{1}{x + 1}}.$$

2. 化简下列各式:

$$(1) \frac{4}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2-x};$$

$$(2) \frac{12}{m^2-9} + \frac{2}{3-m};$$

$$(3) \frac{\frac{x}{x-\frac{x^2}{x-\frac{x}{1-x}}}}{\frac{x}{x-\frac{x^2}{x-\frac{x}{1-x}}}}.$$

3. 计算下列各式:

$$(1) \left(\frac{x+2}{x^2-2x} - \frac{x-1}{x^2-4x+4} \right) \div \frac{x-4}{x} \cdot (2-x)^2;$$

$$(2) \frac{a^3}{a-1} - a^2 - a - 1.$$

$$4. \text{ 已知 } a = \frac{2}{\sqrt{2}+1}, \text{ 求分式 } \left| \frac{2-5a+2a^2}{1-2a} \right| \text{ 的值.}$$

$$5. \text{ 已知 } 3x^2 + xy - 2y^2 = 0, \text{ 求 } \left(1 + \frac{2y^3}{x^3-y^3} \right) \div \left(1 + \frac{2y}{x-y} \right) \text{ 的值.}$$

$$6. \text{ 已知 } x+y=5, xy=6, \text{ 求 } \frac{x^3+y^3}{xy} \text{ 的值.}$$

$$7. \text{ 已知 } \frac{a-2b}{3} = \frac{2b+c}{5} = \frac{3c+a}{4}, \text{ 求 } \frac{2b-c}{a-2b} \text{ 的值.}$$

$$8. \text{ 若 } a, b, c \text{ 均为实数, 且 } x = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}, \text{ 求 } x \text{ 的值.}$$

四、二次根式

[训练要诀]

在进行二次根式的加减运算时,一般先化成最简根式,再合并同类根式;在进行二次根式的乘除运算时,一般先进行乘除运算,再化成最简根式。在运算过程中,应结合题口条件,灵活运用二次根式的性质: $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$, $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$, $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} (a \geq 0, b \geq 0)$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} (a \geq 0, b > 0)$ 。在分母有理化时,首先必须选准有理化因式,

然后注意先化简再有理化;能用乘法公式的应充分运用,以使求解过程简便。

[训练示范]

例 1 计算下列各式:

$$(1) (\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6})(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6});$$

$$(2) (\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{6})^2 (\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{6})^2;$$

$$(3) (\sqrt{6} + 2)(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}) \div (\sqrt{3} + \sqrt{2});$$

$$(4) \frac{\sqrt{5} + \sqrt{7}}{\sqrt{10} + \sqrt{14} + \sqrt{15} + \sqrt{21}};$$

$$(5) \frac{3+2\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}.$$

解析与答案 应根据所给数量关系的特征,或利用乘法公式,或利用比例性质求解,以使计算简捷。

$$\begin{aligned}(1) \text{原式} &= [\sqrt{2} + (\sqrt{3} - \sqrt{6})][\sqrt{2} - (\sqrt{3} - \sqrt{6})] \\ &= (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{6})^2 \\ &= 2 - (3 + 6 - 2\sqrt{18}) \\ &= 6\sqrt{2} - 7.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \text{原式} &= [(\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{6})(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{6})]^2 \\ &= [(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{6})^2]^2 \\ &= (8 + 2\sqrt{15} - 6)^2 \\ &= 4(\sqrt{15} + 1)^2 \\ &= 4(16 + 2\sqrt{15}) \\ &= 64 + 8\sqrt{15}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \text{原式} &= (\sqrt{6} + 2)[(1 - \sqrt{2}) + \sqrt{3}][(1 - \sqrt{2}) - \sqrt{3}] \div (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \\ &= (\sqrt{6} + 2)[(1 - \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2] \div (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \\ &= (\sqrt{6} + 2)(3 - 2\sqrt{2} - 3) \div (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \\ &= -2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \div (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \\ &= -2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = -4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \text{原式} &= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{7}}{(\sqrt{10} + \sqrt{14}) + (\sqrt{15} + \sqrt{21})} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{7}}{\sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{7}) + \sqrt{3}(\sqrt{5} + \sqrt{7})} \\ &= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{7}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{7})} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.\end{aligned}$$

$$(5) \frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2},$$

$$\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}{\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{2}.$$

由等比定理,即得

$$\frac{3+2\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{2}.$$

说明 解上述各题,都是深入观察,把握题目特征,灵活选择并运用公式和运算律:(1)先用平方差公式,再用完全平方公式;(2)先用积的乘方法则,再用平方差公式;(3)先用平方差公式,再因式分解;(4)先将分母因式分解,约分,再分母有理化;(5)从整体到局部对题目的结构了如指掌,才能运用等比定理,使计算达到合理,迅捷。

例2 化简求值:

(1) 已知 $x = \frac{1}{2}(\sqrt{7} + \sqrt{5})$, $y = \frac{1}{2}(\sqrt{7} - \sqrt{5})$, 求 $x^2 + xy + y^2$ 的值。

(2) 已知 $x = 1 + \sqrt{2}$, 求 $\frac{x}{x^2 + 1 - x\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{2x - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 - x\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ 的值。

解析与答案 固然可用代入法求解,但较繁。对于(1)可先求得 $x + y$ 和 xy ,然后设法整体代换。对于(2),可将前两式的分母因式分解,再观察其特征,试着能否用分部分式将原式化简,再求值。

$$(1) x + y = \sqrt{7}, xy = \frac{1}{2},$$

$$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = (\sqrt{7})^2 - \frac{1}{2} = \frac{13}{2}.$$

$$\begin{aligned} (2) \text{原式} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}(\sqrt{x^2 + 1} - x)} + \frac{x + x - \sqrt{x^2 + 1}}{x(x - \sqrt{x^2 + 1})} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} - (\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1}(\sqrt{x^2 + 1} - x)} + \frac{x + x - \sqrt{x^2 + 1}}{x(x - \sqrt{x^2 + 1})} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

$$\text{当 } x = 1 + \sqrt{2} \text{ 时, 原式} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

说明 在(1)中,也可将原式化为 $x^2 + xy + y^2 = (x - y)^2 + 3xy$ 再求值。在(2)中,若按常规,先把分母有理化,计算将复杂。在这里,我们对分式运算法则 $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{A+B}{AB}$, 进行了逆用,使计算相当简便。

[训练题目]

1. 当 x 为何值时,下列各式才有意义?

$$(1) \frac{\sqrt{1-2x}}{x+1}; \quad (2) \frac{\sqrt{3-x}}{1-\sqrt{x-2}}.$$

2. 已知最简根式 $\sqrt[3a+2]{4a+3b}$ 与 $(a+2b) \cdot \sqrt[b+4]{2a-b+6}$ 是同类根式,求 a, b 的值。

3. 计算下列各式:

$$(1) 5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} - \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{5}} + \sqrt{45} - \frac{1}{2}\sqrt{405};$$

$$(2) (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{6});$$

$$(3) (\sqrt{15}+3)(\sqrt{7}-\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{3}-\sqrt{2}) \div (\sqrt{5}+\sqrt{3});$$

$$(4) \frac{7}{7-\sqrt{14}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}};$$

$$(5) \frac{a-\sqrt{a^2-2}}{a+\sqrt{a^2-2}} + \frac{a+\sqrt{a^2-2}}{a-\sqrt{a^2-2}}.$$

4. 已知 $a = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$, $b = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$, 求 $\sqrt{a^2-ab+b^2+3}$ 的值。

5. 化简下列各式:

$$(1) \sqrt{4x^2+12x+9} + \sqrt{4x^2-20x+25} \left(-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \right);$$

$$(2) \sqrt{(a-3)^2} + (\sqrt{3-a})^2;$$

$$(3) \sqrt{a^2+2a+1} + \sqrt{a^2-6a+9}.$$

6. 已知 $2x = \sqrt{2-\sqrt{3}}$, 求 $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ 的值。

7. 已知 $m > 0$, $n > 0$, 且 $3m^2 - 4mn + n^2 = 0$, 求 $\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$ 的值。

8. 若 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, $a-b = 2-\sqrt{3}$, 那么 a, b 两数有什么关系? 为什么?

五、一次方程(组)

[训练要诀]

解一元一次方程的基本思路是:通过去分母、去括号、移项、合并同类项等,把方程变形为最简方程 $ax = b (a \neq 0)$, 再求解。要注意的是:去分母时,不要漏乘没有分母的项;去括号时,如果括号前是负号,括号内各项要变号;移项要变号;按一定顺序去括号;解含字母系数的方程时,不能盲目将含有字母的系数去除方程的两边,要根据它们是否为零,分别进行讨论。解一次方程组的基本思路是消元,通过代入消元法或加减消元法,化二元一次方程组为一元一次方程,化三元一次方程组为二元一次方程组来求解。

[训练示范]

例 1 解下列关于 x 的方程:

$$(1) \frac{0.2x+0.3}{0.3} - \frac{0.01x-0.05}{0.02} = \frac{4x-1}{5} + 2;$$

$$(2) \frac{3}{4} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) - 8 \right] = \frac{3}{2}x + 1;$$

$$(3) 2kx - 3 = (3k-1)x - m.$$

解析与答案 可根据解一元一次方程的基本思路求解。注意,对(3)中的字母系数要讨论。

(1) 利用分数基本性质,原方程化为: