数学分析

下册

庄亚栋　王慕三

高等教育出版社

数学分析

下册

庄亚栋　王慕三

高等教育出版社

全书根据数学、力学教材编委会1981年审定的综合大学与高师数学专业《数学分析教学大纲》要求，分三册编写. 按集论、实数论、极限（包括数项级数）论、连续函数（包括函数项级数）、一元微积分、多元微积分安排体系，用现代分析的观点处理数学分析的传统内容，适当精减了微积分的初等内容，着力于其理论部分的严格化及现代化处理，例习题丰富、有趣. 可作为大学数学系师生的教学参考书.

数 学 分 析

下 册

庄亚栋　王慕三

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

国防工业出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 9.75　字数 230 000

1990年9月第1版　　1990年9月第1次印刷

印数 0 001—1 380

ISBN 7-04-003046-2/O·951

定价 2.35 元

目　录

第十章　多元向量值函数微分学 ………………………… 1

第1节　极限与连续 ………………………… 1

1.1　多元实值函数及其极限与连续性(1)　1.2　多元向量值函数的极限与连续性(3)　1.3　例(6)　1.4　方向极限(10)　1.5　二次极限(12)　练习1(15)

第2节　方向导数与偏导数 ………………………… 18

2.1　方向导数(18)　2.2　偏导数(20)　2.3　高阶偏导数(21)　练习2(24)

第3节　导数 ………………………… 26

3.1　可微函数(26)　3.2　导数与偏导数的关系(29)　3.3　求导法则(33)　3.4　中值定理(40)　3.5　n元实值函数的泰勒公式(42)　3.6　n元实值函数的极值(47)　练习3(52)

第4节　由积分定义的函数及其性质 ………………………… 58

4.1　常义积分定义的函数的性质(58)　4.2　含参量广义积分的一致收敛性(63)　4.3　一致收敛积分所确定的函数的性质(68)　4.4　Γ函数与B函数(73)　4.5　斯梯林公式(77)练习4(79)

第5节　反函数定理与隐函数定理 ………………………… 84

5.1　反函数定理(84)　5.2　隐函数定理(88)　5.3　例(92)　5.4　$\mathbf{R}^3$中曲面的切平面(97)　5.5　条件极值(99)　练习5(107)　习题(110)

第十一章　重积分 ………………………… 118

第1节　n维紧区间上的重积分 ………………………… 118

1.1　定义及性质(118)　1.2　关于可积性的勒贝格定理(121)　1.3　重积分的计算——化成累次积分(124)　练习1(130)

第2节　有界集上的重积分容度 ………………………… 133

2.1　定义(133)　2.2　容度与J可测集(134)　2.3　容度的性质(137)　2.4　常见的J可测集类(142)　练习2(146)

第3节　约当可测集上的积分 ………………………… 148

练习3(158)

第4节　重积分的变量代换 ………………………… 163

4.1 变量代换公式——直观途径(163) 4.2 二重积分的变量代换(165) 4.3 三重积分的变量代换(169) 4.4 n 维空间中的坐标变换(173) 4.5 代换定理的证明(176) 练习 4 (180)
第 5 节 广义重积分 …… 184
练习 5 (193)
第 6 节 曲面面积 …… 197
练习 6 (205) 习题(206)
第十二章 曲线积分与曲面积分 …… 213
第 1 节 曲线积分 …… 213
1.1 纯量场的曲线积分(213) 1.2 向量场的曲线积分(216) 练习 1 (221)
第 2 节 向量场的原函数 …… 224
练习 2 (232)
第 3 节 曲面积分 …… 234
3.1 纯量场的曲面积分(234) 3.2 曲面的定向(236) 3.3 向量场的曲面积分(240) 练习 3 (247)
第 4 节 各种积分之间的关系 …… 249
4.1 格林定理(249) 4.2 高斯-奥斯特洛格拉特斯基定理(散度定理)(252) 4.3 斯托克斯定理(256) 练习 4 (259)
第 5 节 微分形式 …… 262
5.1 外积与微分形式(262) 5.2 外微分(264) 5.3 斯托克斯公式(266) 练习 5 (268)
第 6 节 闭微分形式与恰当微分形式 …… 269
练习 6 (274)
第 7 节 关于场论的一些知识 …… 274
7.1 梯度、旋度、散度的极限形式与物理意义(274) 7.2 格林公式与调和函数(277) 7.3 一些特殊的向量场(279) 练习 7 (282) 习题(284)
习题的答案与提示 …… 289
第十章(289) 第十一章(296) 第十二章(303)

第十章　多元向量值函数微分学

本章主要讨论从向量空间$\mathbb{R}^n$的子集E到另一个向量空间$\mathbb{R}^m$的多元向量值函数，它们的连续性、可微性以及可微函数的一些重要性质——链式法则、反函数存在定理及隐函数存在定理.

第1节　极限与连续

1.1　多元实值函数及其极限与连续性

设$E\subseteq\mathbb{R}^n$，函数$f: E\to\mathbb{R}$叫作n元实值函数，也以$y=f(\boldsymbol{x})$，$y=f(x_1,\cdots,x_n)$（$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$）等表示，当$n=2$，$3$时，也写作$z=f(x,y)$，$u=f(x,y,z)$等．对二元实值函数，其图象

$$\mathrm{Gr}f\xlongequal{d}\{(x,y,z):z=f(x,y),(x,y)\in E\subseteq\mathbb{R}^2\}$$

是$\mathbb{R}^3$中的点集，通常遇到的是$\mathbb{R}^3$中的曲面．一般地，n元实值函数$f:E\to\mathbb{R}$的图象

$$\mathrm{Gr}f\xlongequal{d}\{(\boldsymbol{x},y):y=f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in E\subseteq\mathbb{R}^n\}\subseteq\mathbb{R}^{n+1},$$

这里$(\boldsymbol{x},y)$表示$(x_1,\cdots,x_n,y)$，$\in\mathbb{R}^{n+1}$.

请回顾第一章第3节．3.1，3.5，3.6节的概念都是对一般函数讨论的，当然也适用于多元函数．3.2节的内容以及奇偶性、有界性，也适用于多元实值函数.

下面处理多元函数的极限与连续性，精神与一元函数是一致的.

定义1.1　设$\boldsymbol{a}\in E\subseteq\mathbb{R}^n$，$\delta>0$，开球$B(\boldsymbol{a},\delta)$叫做$\boldsymbol{a}$的$\delta$球邻域，开方区间$\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:|x_i-a_i|<\delta,\ i=1,\ \cdots,\ n\}$叫做$\boldsymbol{a}$的$\delta$方邻

域. 统称为 a 的 δ 邻域或邻域, 记作 $U(a,\delta), U_a$ 等.

由于 a 的球邻域中总有 a 的方邻域, 反之亦然, 所以下面谈到邻域时, 可以是球邻域, 也可以是方邻域. 当 $n=1$ 时, 它们都是开区间.

定义 1.2 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n, a\in E', b\in\mathbb{R}, f:E\to\mathbb{R}$. 若对 b 的任何邻域 V, 存在 a 的邻域 U, 使 $f(E\cap U-\{a\})\subseteq V$, 则称 $x\to a$ 时, $f(x)$ 以 b 为极限. 记作 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ 或 $f(x)\to b(x\to a)$ 等.

若取球邻域, 并用 ε-δ 说法, 上述定义就是:

$$\exists b\in\mathbb{R}\,\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\in E,\ 0<\|x-a\|<\delta: |f(x)-b|<\varepsilon.$$

如果改用方邻域, 则成为

$$\exists b\in\mathbb{R}\,\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\in E,\ x\neq a,\ |x_i-a_i|<\delta(i=1,2,\cdots,n): |f(x)-b|<\varepsilon.$$

注意"$x\neq a, |x_i-a_i|<\delta$"不能写作"$0<|x_i-a_i|<\delta$".

上述极限是有向函数极限的特例. 事实上, 仿照第三章 1.4 节例 15, 对 $E\subseteq\mathbb{R}^n$, $a\in E'$ 与 $x,y\in E$, 规定 $x\leqslant y\Longleftrightarrow\|y-a\|\leqslant\|x-a\|$, 或 $x\leqslant y\Longleftrightarrow|y_i-a_i|\leqslant|x_i-a_i|(i=1,2,\cdots,n)$, 则 $(E,\leqslant)$ 是有向集, 记作 $\{x\to a\}$.

这样, 第三章 1.5 节有向函数极限的所有性质以及柯西准则也对多元实值函数的极限成立. 此外第三章 1.7 节复合函数极限定理以及海涅定理也成立, 不再一一赘述.

定义 1.3 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n, a\in E, f:E\to\mathbb{R}$. 若对 $f(a)$ 的任何邻域 V, 存在 a 的邻域 U, 使 $f(E\cap U)\subseteq V$, 则称 f 在 a 处连续. 若 f 在 E 的每一点连续, 则称 f 在 E 上连续.

用 ε-δ 说法及球邻域, f 在 $a\in E$ 连续 $\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\in E, \|x-a\|<\delta: |f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

定理 1.1 设 $a\in E'$, 则

$f:E\to\mathbb{R}$ 在 a 处连续

$\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

$\Longleftrightarrow$ 对 E 中趋于 a 的任何点列 $\langle x_k\rangle$，$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)=f(a)$. ▮

第三章的定义 2.4 与定理2.4，2.5，2.8，2.9，2.10 都可移植过来，只要把 $E\subseteq \mathrm{R}$ 改成 $E\subseteq \mathrm{R}^n$，证明完全类似.

1.2 多元向量值函数的极限与连续性

设 $E\subseteq \mathrm{R}^n$，E 到 R^m 的函数叫做 n 元向量值函数，记作 $\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{g}$ 等. 与第九章 3.1 节定义 3.1一样，给定 $\boldsymbol{f}:E\to \mathrm{R}^m$，便确定了 m 个 n 元实值函数 $f_i:E\to \mathrm{R}$，由 $f_i(x)=(\boldsymbol{f}(x))_i$ 定义，$i=1,2,\cdots,m$. 它们叫做 $\boldsymbol{f}$ 的分量，记作 $\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_m)$. 反之，给定 m 个 n 元实值函数，可以确定一个到 R^m 中的向量值函数.

只要把定义 1.2 中的 f 改成 $\boldsymbol{f}$，$b\in \mathrm{R}$ 改成 $\boldsymbol{b}\in \mathrm{R}^m$ 便可得到 $\lim\limits_{x\to a} \boldsymbol{f}(x)=\boldsymbol{b}$ 的定义. 请读者自己写出这个定义以及 $\boldsymbol{f}$ 在 a 处连续的定义，并考虑有关性质对向量值函数成立的情况.

定理 1.2 设 $\boldsymbol{f}:E(\subseteq \mathrm{R}^n)\to \mathrm{R}^m$，$\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_m)$，则

(1) $\lim\limits_{x\to a} \boldsymbol{f}(x)=\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_m) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f_i(x)=b_i$，$i=1,2,\cdots,m$；

(2) $\boldsymbol{f}$ 在 a 处连续 $\Longleftrightarrow f_1,\cdots,f_m$ 在 a 处连续.

证 (1) 由不等式 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{|f_i(x)-b_i|\}\leqslant \|\boldsymbol{f}(x)-\boldsymbol{b}\|\leqslant \sum\limits_{j=1}^{m}|f_j(x)-b_j|$ 立得.

(2) 由(1)与定理 1.1 得证. ▮

定理 1.3 设 $\boldsymbol{f}:E(\subseteq \mathrm{R}^n)\to \mathrm{R}^m$. 下列陈述等价：

(1) $\boldsymbol{f}$ 在 E 上连续；

(2) 对每个开集 $G\subseteq \mathrm{R}^m$，存在开集 $G_1\subseteq \mathrm{R}^n$，使 $\boldsymbol{f}^{-1}(G)=$

$G_1 \cap E$;

(3) 对每个闭集 $F \subseteq \mathbb{R}^m$，存在闭集 $F_1 \subseteq \mathbb{R}^n$，使 $f^{-1}(F) = F_1 \cap E$;

(4) 对所有 $a \in E$ 及 E 中任一趋于 a 的点列 $\langle x_k \rangle$，均有 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$.

证 (1)⇒(2) 对任一开集 $G \subseteq \mathbb{R}^m$，若 $f^{-1}(G) = \varnothing$，则取 $G_1 = \varnothing$ 便可. 设 $f^{-1}(G) \neq \varnothing$.

$\forall a \in f^{-1}(G), f(a) \in G$，存在 $f(a)$ 的邻域 $V \subseteq G$. 因为 f 连续,故有 a 的邻域 U_a,使

$$f(U_a \cap E) \subseteq V \subseteq G.$$

因此 $U_a \cap E \subseteq f^{-1}(G)$. 令

$$G_1 = \bigcup_{a \in f^{-1}(G)} U_a \quad ,$$

则由开集的性质知 G_1 是开集,且 $f^{-1}(G) = G_1 \cap E$.

(2)⇒(3) 设 F 是 $\mathbb{R}^m$ 的闭集,则 $G \overset{d}{=} \mathbb{R}^m - F$ 是开集. 由(2),存在开集 $G_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ 使 $f^{-1}(G) = G_1 \cap E$. 因此

$$\begin{aligned} f^{-1}(F) &= f^{-1}(\mathbb{R}^m - G) = f^{-1}(\mathbb{R}^m) - f^{-1}(G) \\ &= E - G_1 \cap E = E \cap (\mathbb{R}^n - G_1), \end{aligned}$$

取 $F_1 = \mathbb{R}^n - G_1$ 得证.

(3)⇒(4) 设 $a \in E, x_k \to a$. 当 $a \in E'$ 时,由定理 1.2(2)及定理 1.1 立得 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$. 当 a 是 E 的孤立点时，对充分大的 k 必有 $x_k = a$,因此也有 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$.

(4)⇒(1) 由定理 1.2(1),定理 1.1 及定理 1.2(2)即得. ∎

推论 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 连续

$\Longleftrightarrow \mathbb{R}^m$ 的开集的逆象是($\mathbb{R}^n$ 的)开集

$\Longleftrightarrow \mathbb{R}^m$ 的闭集的逆象是($\mathbb{R}^n$ 的)闭集.

定理 1.4 设 $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $B\subseteq\mathbb{R}^m$. 若 $f:A\to B$ 在 $a\in A$ 处连续, $g:B\to\mathbb{R}^k$在 $b=f(a)$处连续,则 $g\circ f$ 在 a 处连续.

证 可以仿照第三章定理 2.6 证明. 下面是从定义出发, 直接证明. (图 10-1)

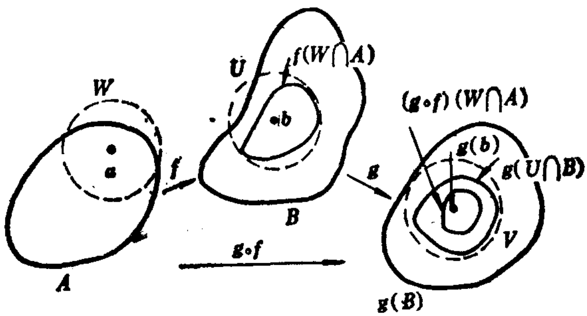

图 10-1

设 V 是$g(b)$的任一邻域,由 g 的连续性,存在 b 的邻 域 U 使 $g(U\cap B)\subseteq V$. 由 f 的连续性,存在 a 的邻域W 使 $f(W\cap A)\subseteq U$ (实 际上$\subseteq U\cap B$). 从而$(g\circ f)(W\cap A)=g(f(W\cap A))\subseteq g(U\cap B)\subseteq V$. 这就证明了 $g\circ f$ 在 a 处的连续性. ▌

定理 1.5 紧集的连续象是紧集. 即,若 $E\subseteq\mathbb{R}^n$紧, $f:E\to\mathbb{R}^m$ 连续,则 $f(E)\subseteq\mathbb{R}^m$是紧集.

证 设$\mathscr{U}$是 $f(E)$的任一开覆盖,则对每个 $U\in\mathscr{U}$,由定理1.3,存在开集 $V_U\subseteq\mathbb{R}^n$使 $f^{-1}(U)=V_U\cap E$. 于是$\{V_U:U\in\mathscr{U}\}$是E 的开覆盖. 因为E 紧,故存在 $V_{U_1},\cdots,V_{U_k}$覆盖E. 因此

$$E=(V_{U_1}\cap E)\cup\cdots\cup(V_{U_k}\cap E)=f^{-1}(U_1)\cup\cdots\cup f^{-1}(U_k),$$

$$f(E)\subseteq U_1\cup\cdots\cup U_k.$$

由定义,$f(E)$是紧集. ▌

定理 1.6 连通集的连续象是连 通 集. 即, 若 $E\subseteq\mathbb{R}^n$连通, $f:E\to\mathbb{R}^m$连续,则 $f(E)$是连通集.

证 设 $f(E)$不连通,则存在非空集 A,B, 满足: $f(E)=A\cup$

$B, \bar{A}\cap B=\varnothing, A\cap\bar{B}=\varnothing$. 设

$$C=\boldsymbol{f}^{-1}(A), \boldsymbol{D}=\boldsymbol{f}^{-1}(B),$$

则 C, D 是 E 的非空子集，且

$$C\cup D=\boldsymbol{f}^{-1}(A)\cup\boldsymbol{f}^{-1}(B)=\boldsymbol{f}^{-1}(A\cup B)=\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{f}(E))=E.$$

下面证明 $\bar{C}\cap D=\varnothing, C\cap\bar{D}=\varnothing$，从而 E 不连通，得到矛盾.

事实上，从 $\bar{A}\cap B=\varnothing$ 有 $\boldsymbol{f}^{-1}(\bar{A})\cap\boldsymbol{f}^{-1}(B)=\boldsymbol{f}^{-1}(\varnothing)=\varnothing$，只要证得

$$\overline{\boldsymbol{f}^{-1}(A)}\subseteq\boldsymbol{f}^{-1}(\bar{A}), \tag{*}$$

便有 $\bar{C}\cap D=\varnothing$. 设 $\boldsymbol{x}\in\overline{\boldsymbol{f}^{-1}(A)}$，则存在 $\boldsymbol{x}_n\in\boldsymbol{f}^{-1}(A)$，使 $\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}$. 由 $\boldsymbol{f}$ 连续，得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)\to\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. 而 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)\in A$，故 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in\bar{A}, \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{f}^{-1}(\bar{A})$，因此(*)式成立. 类似地可证 $C\cap\bar{D}=\varnothing$. ▌

推论(介值定理)　设 E 连通，$f:E\to\mathbb{R}$ 连续. 若 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in E$，$f(\boldsymbol{x})\leqslant c\leqslant f(\boldsymbol{y})$，则存在 $\boldsymbol{\xi}\in E$，使 $f(\boldsymbol{\xi})=c$. ▌

1.3　例

例 1　线性函数(见第九章定义 1.3)连续.

证　设 $\boldsymbol{f}=(f_1, \cdots, f_m)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性函数，则 $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 也是线性函数($i=1,2,\cdots,m$). 由第九章定理 1.4，$\exists_1\boldsymbol{a}_i\in\mathbb{R}^n$ 使 $f_i(\boldsymbol{x})=\langle\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}\rangle$，从而由柯西-许瓦兹不等式得：$\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|^2=\sum_{i=1}^{m}(f_i(\boldsymbol{x}))^2\leqslant\sum_{i=1}^{m}\|\boldsymbol{a}_i\|^2\|\boldsymbol{x}\|^2$$

$$=\|\boldsymbol{x}\|^2\sum_{i=1}^{m}\|\boldsymbol{a}_i\|^2,$$

或 $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|\leqslant M\|\boldsymbol{x}\|$，其中 $M\overset{d}{=}\left[\sum_{i=1}^{m}\|\boldsymbol{a}_i\|^2\right]^{1/2}$. 因此，$\forall\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$，

$$\|f(x)-f(x_0)\|=\|f(x-x_0)\|\leqslant M\|x-x_0\|,$$

从而 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to f(x_0)$，即 f 在 x_0处连续. ▌

上面的证明提供了一个常用的结论：

若 f: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$线性，则存在 $M\in\mathbf{R}$，$\forall x\in\mathbf{R}^n$：$\|f(x)\|\leqslant M\|x\|$.

为了下面引用方便，我们把所有这样的M的下确界记作$\|f\|$：

$$\|f\|\overset{d}{=}\inf\{M\in\mathbf{R}:\forall x\in\mathbf{R}^n\text{有}\|f(x)\|\leqslant M\|x\|\}.$$

于是有

定理 1.7 若 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$线性，则$\|f(x)\|\leqslant\|f\|\|x\|$. ▌

不难证明，$\|f\|$具有第九章定理 1.3 所说的欧几里得范数所具有的三条性质. 这样，如果把$\mathbf{R}^n$到$\mathbf{R}^m$的所有线性变换之集记作$\mathscr{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$（它是 mn 维线性空间），我们可以把$\|f\|$叫做线性变换空间$\mathscr{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$的范数.

注 给定线性变换 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$，可以确定一个 $m\times n$ 矩阵A：若以 $e_1,e_2,\cdots,e_n$表示$\mathbf{R}^n$的标准基，并且$\mathbf{R}^m$也取标准基，则A的第 j 个列向量是 $f(e_j)$ $(j=1,2,\cdots,n)$（例如可见W·弗列明《多元函数》上册第 139—140 页，人民教育出版社，1981）. A 叫做 f的表示矩阵. 反之，给定矩阵$(a_{ij})_{m\times n}$，把它的第 j 个列向量记作 v_j，由 $f(x)=\sum_{j=1}^{n}x_jv_j$ $(x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n)$定义 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$，则易知 f 是线性变换，$f(e_j)=v_j$，故f的表示矩阵正是$(a_{ij})_{m\times n}$。这样，$\mathbf{R}^n$到$\mathbf{R}^m$的线性变换与 $m\times n$ 矩阵是一一对应的. ▌

由$\mathbf{R}^n$中超平面的定义，超平面

$$H_c=\{x:f(x)=c\}=f^{-1}(\{c\}),$$

即 H_c是闭集$\{c\}$在某个线性泛函 f 下的逆象. 由例 1，f 连续. 因此由定理 1.3 推论，可知$\mathbf{R}^n$中任一超平面是闭集. 因为$\mathbf{R}^n$的任

一线性子空间是若干个超平面的交集（第九章练习1第10题），故$\mathbb{R}^n$的每个线性子空间也都是闭集.

例2　函数$f(x,y)=\sin x$在$\mathbb{R}^2$上连续，这容易从定义（取方邻域）证得. 粗略地说，若$m<n$，则m元连续函数也是n元连续函数. 严格地说，有：

若函数$f(x_1,\cdots,x_m)$在$(a_1,\cdots,a_m)\in\mathbb{R}^m$连续，$m<n$，则对任意的$b_{m+1},\cdots,b_n\in\mathbb{R}$，函数$F(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_m)$在$(a_1,\cdots,a_m,b_{m+1},\cdots,b_n)\in\mathbb{R}^n$处连续.

事实上，当$(x_1,\cdots,x_n)\to(a_1,\cdots,a_m,b_{m+1},\cdots,b_n)$时$(x_1,\cdots,x_m)\to(a_1,\cdots,a_m)$. 从而

$$\begin{aligned}&F(x_1,\cdots,x_n)-F(a_1,\cdots,a_m,b_{m+1},\cdots,b_n)\\&=f(x_1,\cdots,x_m)-f(a_1,\cdots,a_m)\to0.\end{aligned}$$

这样，我们立即可以知道常值函数$f(\boldsymbol{x})=c$，坐标函数$\pi_i(\boldsymbol{x})=x_i$，以及$n$元多项式函数

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{p_1,\cdots,p_n=0}^{n}a_{p_1\cdots p_n}x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n},$$

（$p_1,\cdots,p_n$是非负整数，$a_{p_1,\cdots,p_n}\in\mathbb{R}$）的连续性. 再应用连续函数的有关运算性质与复合函数的连续性可以知道如

$$\sin\sqrt{x^2+y^2},\ e^{\sin\sqrt{x^2+y^2}},\ (xy)^{\frac{1}{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{x^2+y^2+1}}$$

这样一些函数在其定义域上的连续性. ▌

例3　考察下列函数的连续性：

$$(1)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & x=y=0;\end{cases}$$

$$(2)\ g(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}, & xy\neq0,\\ 0, & xy=0.\end{cases}$$

解 (1) 当$(x,y)\neq(0,0)$时，由例 2 知 f 在(x,y)处连续. 当$(x,y)\neq(0,0)$时，由

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{|y|}{2}$$

知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$，故 f 在$(0,0)$处连续. 因此 f 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续.

极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$ 也可以这样得到：令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right|=|r\cos\theta\sin^2\theta|\leqslant r.$$

因为$(x,y)\to(0,0)$时 $r=\sqrt{x^2+y^2}\to0$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$. ▮

(2) 当 $xy\neq0$ 时，仍由例 2 知 g 在(x,y)连续.

当 $y_0\neq0$ 及$\frac{1}{n\pi}$(n 是非零整数)时，

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)}y\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\text{不存在},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)}x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0\left(\text{因为}\left|x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|\leqslant|x|\right),$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)}g(x,y)$不存在，即 g 在$(0,y_0)$处不连续. 类似地，当 $x_0\neq0$ 及 $\frac{1}{n\pi}$(n 是非零整数)时，g 在$(x_0,0)$处不连续. 由

$$|g(x,y)|\leqslant|x+y|\left|\sin\frac{1}{y}\right| \quad \text{及} \quad |g(x,y)|\leqslant|x|+|y|$$

分别得到

$$\lim_{(x,y)\to\left(0,\frac{1}{n\pi}\right)}g(x,y)=0=g\left(0,\frac{1}{n\pi}\right)\text{及}\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=0$$
$$=g(0,0).$$

类似地，$\lim\limits_{(x,y)\to\left(\frac{1}{n\pi},\,0\right)} g(x,y)=0=g\left(\frac{1}{n\pi},0\right)$.

综上所述，g 在 $(x,y)\,(x\neq0,y\neq0)$，$\left(0,\frac{1}{n\pi}\right)$，$\left(\frac{1}{n\pi},0\right)$，$(0,0)$ 处连续，在其它点间断. ▌

例 4 求极限

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{e^{xy}-1}{x}$;

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

解 (1) 当 $a\neq0$ 时，由连续性，所求的极限为$\dfrac{e^{ab}-1}{a}$. 当$a=0$ 时，

$$\text{原式}=\lim_{(x,y)\to(0,b)} \frac{e^{xy}-1}{x\cdot y}\cdot y=1\cdot b=b.$$

(2) $\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}<\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$. 所求的极限为 0. ▌

以上求极限时，大致用了以下一些方法：利用连续性；利用一元函数的极限（特别是变量可以分离的时候）；利用不等式与夹带性；利用变量代换，例如用极坐标代换（例 3 (1)，参见下面例 6 及其后面的说明）.

多元向量值函数的极限与连续性可归结为其分量的极限与连续性，不再举例.

1.4 方向极限

迄今为止，我们只看到多元函数与一元函数的极限和连续性的一致方面，下面是不一致的方面.

在多元函数的极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ 中，要求x以任何方式在E中

趋于 a, 例如沿连结 x,a 的曲线、直线趋于 a，或跳动着以点列的形式趋于 a. 这就要比一元函数的情况复杂得多. 如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在, 则 x 按任何特殊方式在 E 中趋于 a 时的极限都应存在且相等. 例如从类似于第三章定理 1.12 的复合函数求极限的定理易知:

定理 1.8 设 $f:E\to\mathbb{R}^m$. 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$, Γ 是 E 中连结 a, x_0 的简单曲线, $\Phi:[0,1]\to E$ 是其参数表示(即 Φ 是单射且连续, $\Phi(0)=a,\Phi(1)=x_0$), 则 f 沿曲线 Γ 的极限

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x=\Phi(t)}} f(x)=\lim_{t\to 0+} f(\Phi(t))=b.$$

特别地, 对 f 沿通过 a, 具有方向 v 的直线的极限(简称为方向极限)有

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x=a+tv}} f(x)=\lim_{t\to 0+} f(a+tv)=b(\forall v\neq 0). \blacksquare$$

例 5 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

证 因为 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}$,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=0,$$

所以题中的极限不存在. $\blacksquare$

例 6 考虑 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$. 下面的讨论是错误的:

令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 原式成为

$$\lim_{r\to 0}\frac{r\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta+r^2\sin^4\theta}.$$

当 $\theta\neq\dfrac{\pi}{2}$ 时, 上式 $=\dfrac{0}{\cos^2\theta}=0$; 当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时, 极限号后的式 $=\dfrac{0}{r^2}=0$ (因为 $r\to 0$ 时 $r\neq 0$). 故对任何 θ, 上式 $=0$. 因此所求极

限为 0.

正确的做法是：因为 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}=0$，$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}=\dfrac{1}{2}$，故所求极限不存在. ∎

第一种方法错误的原因是：极坐标代换后得到的极限正是方向极限，因为平面上的方向可以写成 $v=(\cos\theta,\sin\theta)$，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 正是平面上通过 $(0,0)$ 具有方向 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 的直线的方程. 一般来说方向极限与极限是不同的，只在一些特殊情况如 $f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ 与 θ 无关，或 $h(r)\leqslant f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\leqslant g(r)$ 且 $\lim\limits_{r\to0}h(r)=\lim\limits_{r\to0}g(r)$ 时才能确定极限.

从例 6 知道：即使所有方向极限存在且相等，也不足以保证极限存在，所以多元函数没有类似于一元函数从左右极限相等判定极限存在的相应法则. 求多元函数极限的复杂性于此可见一斑.

从沿曲线的极限与方向极限，也可考虑沿曲线与沿给定方向的连续性等，不再赘述.

1.5 二次极限

考虑二元实值函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)$. 如果先固定 y，让 $x\to a$，再让 $y\to b$，或反之，便得到二次极限 $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b}f(x,y)$. 相对而言，$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)$ 叫做二重极限，从二次极限相等不能得到二重极限的存在，如例 5，6. 反之，从二重极限存在也不能保证二次极限存在，例如例 3 (2) 在 (0, 0) 处. 所以二次极限是与二重极限不同的另一类极限.

两个二次极限中，一个二次极限存在也不能保证另一个二次