刘宗贵 著

非Σ语言

一元微积分学

b

a

贵 州
教育出版社

非 ε 语言一元微积分学

刘宗贵　著

贵州教育出版社

非ε语言一元微积分学

贵州教育出版社出版发行
（贵阳市中华北路289号）
贵州新华印刷厂印刷
787×1092毫米　32开本11印张230千字
印数1—1120册
1993年9月第1版　1994年10月第1次印刷

ISBN 7-80583-363-x/G·362　定价：6.00元

序

欣闻《非ε语言一元微积分》即将付梓，而且著者刘宗贵先生希望我为它作序。这对我是一件高兴的事。我乐于借此机会和读者谈上几句。

这本书的特色，正如书名所示，是用非ε语言来讲微积分。基本概念的引入方法变了，定理的推导和解题的方法也自然要作一些相应的改变。这样，它在众多的微积分教材中就显得独具一格。至于这"一格"是好是差，最后要等待教学实践的检验。

在近代数学史上，ε语言的产生和被普遍接受，应当算是一件大事。微积分是牛顿和莱布尼兹发明的。但这两位创始人无法把微积分的道理从逻辑上讲明白。又过了两百年，柯西、维尔斯特拉斯等数学家，以ε语言为工具建立起极限概念，才给微积分奠定了严谨的逻辑基础。从此，要真正明白微积分的道理，必须从ε语言学起。不学ε语言，只会用公式算微分积分，就是知其然而不知其所以然。许多数学家，如我国著名数学家和数学教育家徐利治教授，都持这样的观点：不用ε语言，许多微积分的基本定理就无法严格证明。就连高中的教材，讲一点微积分和极限时，也在向ε语言靠拢和为ε语言

作准备了。

但是，ε语言又是数学教学中的一大难点。这也难怪。许多才智超群的数学家两百年间没有想出来的东西，必然不会十分平易近人。要让只有初等数学知识的一般青年在短短几星期内理解它掌握它，绝非易事。正因为如此，许多非数学专业的教材中，就用直观代替严谨，略去了ε语言。其结果是：大量的科技工作者，尽管他们学了高等数学，会使用微积分的定理与公式(?)，但始终没有明白其中的道理。

笔者1980～1985年在中国科技大学数学系及少年班讲授微积分时，深感ε语言有改革之必要。直到1983～1984年间，才形成一个看法：不用ε语言，也可以把微积分的基本概念讲得同样严格，并可以简化推理，改进解题方法。与之相应，实数的基本理论和连续函数的性质的推导也可以改进——使用连续归纳法。在教学中初步试用，效果尚佳。但后来就不教微积分而从事其它研究了，这方面也就没有再做下去。只不过把这些想法写成论文，发表于四川教育学院学报。1989年出版的《从数学教育到教育数学》(四川教育出版社)一书中，曾专用一章来讲述极限概念的非ε语言。不少朋友和读者问我，为什么不写一本非ε语言的微积分教材？其实，我也想写它一本。但又觉得工程浩大，下不了决心。现在，刘宗贵先生写了这本书，实在使我喜出望外。但是，这本书使自己的想法有了受到教学实践检验的机会，也让自己在高兴之余有点惶恐之感。

大家知道，把纸上谈兵的研究成果写入教材，是一个再创造的过程。1992年初，我曾粗略地拜读了此书初稿。给我的印象是：刘宗贵先生为把非ε语言方法写入教材付出了艰巨的

劳动。由于很快就要来美访问，未能细读。想不到半年之后，书稿就被接受并将付梓了。我想借此机会，向作者、编辑及出版此书的贵州教育出版社的同志致以衷心的感谢。也向准备使用此书作为教材的老师预致谢意。

千里之行，始于足下。ε语言占领微积分课堂已有百年之久，改革它谈何容易。这本书也许是一个开始。习惯的力量是巨大的。但如果非ε语言确能使学生用更少的时间进入微积分之门，确能使教师用更少的血汗换来教学成功的喜悦，那么，时间会支持它。书的作者，更多的老师，会实践它，改进它，完善它。自己提出的一些极不成熟的想法，也算起到了抛砖引玉的作用了。

张景中　　一九九二年十一月

于美国·威奇托

致读者

本书的内容安排主要依据中学教师进修高等师范专科数学教育专业《数学分析教学大纲》，并参照了中学教师专业合格证书文化专业知识考试和二年制师范专科学校的《数学分析教学大纲》内容。

本书旨在对柯西的传统微积分教程进行改革，采用了中科院成都分院数理室张景中教授在其著作《从数学教育到教育数学》中提出的新方法。

1. 用非 ϵ 语言（与 ϵ 语言等价，证明见本书附录Ⅰ）引入极限概念，用这套极限定义讲解极限理论，逻辑结构简单、明快，学生易于接受，易于掌握。

2. 用“连续归纳法”（与实数连续的戴德金公理等价，证明见本书第五章）用同一种模式证明一系列有关实数及连续函数的性质定理，这使学生更便于理解和掌握。

本书各章节都附有适量的习题，它有助于深入理解概念，巩固所学理论，书末附录Ⅱ给出了全部习题的解答或答案。

本书可作为一元微积分试用教材，也可作为国内及国际同行的教改交流资料或教学参考书。

本书在成稿过程中，自始至终得到张景中教授与四川都

江教育学院数学系孟季和副教授的关心、帮助、支持，本书在初稿写成后，又先后经张景中教授、孟季和副教授、四川师范大学数学系赵明方副教授、贵州教育出版社陈天华编辑等认真审阅，并提出了许多宝贵的意见和建议，他们的辛勤劳动使书稿的质量有了明显的提高，本人对他们严格的科学态度和高度负责的精神深感敬佩，在此向他们表示衷心的感谢。

由于本人水平有限，书中一定还存在不少缺点，殷切期待读者给予批评指正。

刘宗贵

1992.8. 于四川都江教育学院

责任编辑 陈天华
封面设计 陈庆中
技术设计 田亚民

目　录

第一章　函　数

§1.1　实数的理论

一、有理数集的性质

从中学教材内我们已经知道有理数集 Q 具有如下一些性质(下面的字母 a、b、c 均表示有理数)：

1. 有理数的有序性

(i)(三歧性)对任意的 a,b，有且仅有下列关系之一成立：$a<b$，$a=b$，$a>b$，

(ii)(传递性)若 $a<b$，$b<c$，则 $a<c$。

(iii)(稠密性)若 $a<b$，则存在 c，使 $a<c<b$。

2. 有理数的四则运算性

(i)加法　若 $a,b\in Q$，则 $a+b\in Q$

(1)加法交换律：$a+b=b+a$

(2)加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$

(3)加法保序性：若 $a<b$，则 $a+c<b+c$

(ii)减法　若 $a,b\in Q$，则 $a-b=a+(-b)\in Q$。

(iii)乘法　若 $a,b\in Q$，则 $a\cdot b\in Q$

(1)乘法交换律：$a\cdot b=b\cdot a$

(2)乘法结合律：$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

(3)加乘分配律:$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

(4)乘正保序性:若 $a<b$ 且 $c>0$,$a\cdot c<b\cdot c$。

(iv)除法　若 $a,b\in Q$,且 $b\neq 0$,则 $a/b\in Q$。

3.阿基米德公理　若 $a,b\in Q,a>0,b>0$,则存在自然数 n,使 $na>b$

由上可知,有理数集 Q 对四则运算封闭,并且是满足阿基米德公理的有序集,但是,如果我们仅停留在有理数的范围内,那么即使是自然数的根,例如 $\sqrt{2}$,也常常不存在,就是说,没有这样的有理数 $\frac{p}{q}$(式中 p 及 q 均是自然数),其平方能等于 2,对于此命题,我们用反证法给出证明,设有分数 $\frac{p}{q}$(其中 p 与 q 是既约分数),其平方为 $(\frac{p}{q})^2=2$,则 $p^2=2q^2$,故 p 为偶数:$p=2r$(r 为整数),于是 q 为奇数,用 p 的式子代入得 $(2r)^2=(2q)^2$,即 $q^2=2r^2$ 由此又推得 q 为偶数,所得的矛盾便证明了我们的命题,因此,有必要在有理数集中添入新数——无理数,以扩大有理数集的范围。

二、无理数的引入

引入无理数有各种不同的方法,我们这里采用戴德金($R\cdot Dedekind$)分划的方法引入无理数,设有理数集及其上述一中列举的性质都是已给的。

定义 1.1.1　　设 A,A' 都是有理数集 Q 的子集,且满足

(i)$A\cup A'=Q$,且 $A\neq\varnothing,A'\neq\varnothing$.

(ii)对任意的 $a\in A$,任意的 $a'\in A'$,有 $a<a'$,则称集 A 与 A' 为有理数集 Q 的一个分划,简称有理分划,记为 $A|A'$,称集 A 为分划的下组,集 A' 为分划的上组。

注：由分划的定义容易推得，小于下组内的数 a 的一切有理数也都属于下组，仿此，大于上组内的数 a' 的一切有理数亦都属于上组。

例 1.1.1　设 $A=\{r|r\in Q, r<2\}$ 与 $A'=\{r'|r'\in Q, r'\geqslant 2\}$，则 $A|A'$ 是 Q 的一个分划，且上组 A' 有最小数 2。而下组 A 内无最大数，因为对任意 $r\in A$，由有理数的稠密性，存在 $r_1\in A$，使 $r<r_1$。

例 1.1.2　设 $A=\{r|r\in Q, r\leqslant 2\}$ 与 $A'=\{r'|r'\in Q, r'>2\}$，则 $A|A'$ 是 Q 的一个分划，且下组 A 内有最大数 2，而在上组 A' 内无最小数。

例 1.1.3　设 $A=\{r|r\in Q, r\leqslant 0 \text{ 或 } r^2<2\}$

$$A'=\{r'|r'\in Q, r'>0, \text{且 } r'^2>2\},$$

证明，$A|A'$ 是一个有理分划。

证：(i) 显然有 $A\cup A'=Q$，且 $A\neq\varnothing$，$A'\neq\varnothing$。

(ii) 对任意 $r\in A$，当 $r\leqslant 0$ 时，对任意 $r'\in A'$，有 $r<r'$；当 $r^2<2$ 时，对任意 $r'\in A'$，由于 $r'^2>2$，，故有 $r^2<r'^2$，从而有 $r<r'$，由 (i)，(ii) 知 $A|A'$ 是一个有理分划，得证。

此例中下组 A 内既无最大数，上组 A' 内也无最小数，这是因为对任意 $r\in A$，若 $r\leqslant 0$，则 r 显然不是 A 的最大数；设 $r>0$，则 $r^2<2$，我们证明存在自然数 n，使 $(r+\frac{1}{n})^2<2$，即总存在比 r 大的有理数 $r+\frac{1}{n}\in A$：

据阿基米德公理，总存在自然数 n，使

$$n>\frac{2r+1}{2-r^2} \text{或} \frac{2r+1}{n}<2-r^2$$

对这样的自然数 n，有

$$\frac{2r}{n}+\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{2r+1}{n}<2-r^2$$

或 $r^2+\frac{2r}{n}+\frac{1}{n^2}<2$ 即 $(r+\frac{1}{n})^2<2$，于是我们证得了下组 A 内无最大数，类似地可证上组 A' 内无最小数。

由有理数的稠密性容易证明，不可能有这样的分划存在，在它的下组内有最大数，同时在上组内又有最小数，于是，有理分划仅能有三种类型：

(1)在下组 A 内无最大数，而在上组 A' 内有最小数 r（如例 1.1.1）；

(2)在下组 A 内有最大数 r，而在上组 A' 内无最小数（如例 1.1.2）

(3)在下组 A 内既无最大数，在上组 A' 内亦无最小数。

在前两种情况，我们说，分划由有理数 r 产生（r 成为 A 与 A' 之间的界数）；在第三种情形，界数并不存在，即分划 $A|A'$ 不定义任何有理数，今引入新的对象——无理数，即有下面的定义。

定义 1.1.2　对 Q 的任意分划 $A|A'$，若下组 A 内既无最大数，在上组 A' 内亦无最小数，则称分划 $A|A'$ 是一个无理数，记为 α，即 $\alpha=A|A'$。

由定义，任一(3)型的有理分划定义某一无理数 α，这个数 α 便代替缺少的界数，我们好象把它插入在 A 组的一切数 a 与 A' 组的一切数 a' 中间，在例 1.1.3 的 α 即是 $\sqrt{2}$

为一致起见，我们说有理数 r 也是由 Q 的分划得到的，但对于任一有理数 r，存在着确定它的两种分划，在两种情形中，数 $a<r$ 总是属于下组，数 $a'>r$ 总是属于上组，而数 r 可

以包含在下组(这时 r 为下组的最大数),也可以包含在上组(这时 r 为上组的最小数)。为了确定起见,我们约定:凡说到确定有理数 r 的分划时,常把这数放在上组内。

定义 1.1.3　有理数集与无理数集的并集称为实数集,记为 R。

于是,实数集 R 与有理数集 Q 的分划集成一一对应,任意实数 α 都对应 Q 的一个分划 $A|A'$,即 $\alpha=A|A'$。

若上组 A' 内有最小数,则 α 是有理数。

若上组 A' 内无最小数,则 α 是无理数。

三、实数集的有序性

定义 1.1.4　设 $\alpha=A|A'$,$\beta=B|B'$ 是两个实数,如果 $A=B$,称 α 与 β 相等,记为 $\alpha=\beta$;如果存在 $b\in B$,且 $b\notin A$,称 α 小于 β(或 β 大于 α),记为 $\alpha<\beta$(或 $\beta>\alpha$)

由定义可得,$\alpha<\beta$ 的充分必要条件是,A 是 B 的真子集,即 $A\subsetneq B$

不难验证,当实数 α 与 β 都是有理数时,上述定义与有理数集原有序的定义是一致的。

实数集具有与有理数类似的一些性质,首先,实数集具有性质:

(i)(三歧性)对任意二实数 $\alpha=A|A'$ 与 $\beta=B|B'$,有且仅有下列关系之一成立:

$\alpha=\beta,\alpha<\beta,\alpha>\beta$

证:若 $A=B$,则 $\alpha=\beta$;;若 $A\neq B$,则有下面两种可能:

1)存在 $b\in B$,且 $b\notin A$,这时 $\alpha<\beta$。

2)存在 $a\in A$,且 $a\notin B$,这时 $\beta<\alpha$ 或 $\alpha>\beta$ 由定义知,$\alpha=\beta,\alpha<\beta,\alpha>\beta$ 三种关系是互相排斥的,不可能有两种关系同