力学丛书

多自由度结构固有振动理论

胡海昌 著

科学出版社

力 学 丛 书

多自由度结构固有振动理论

胡 海 昌 著

科 学 出 版 社

1 9 8 7

内 容 简 介

本书系统论述了多自由度结构固有振动理论中近年来发展较快、应用较广的四个方面. 内容包括: (1) 小参数法和局部修改法; (2) 本征值的包含定理和计数定理; (3) 动态子结构法; (4) 链式结构和迴转对称结构分析法.

本书可供从事固体力学、结构振动工作的科学研究人员、工程技术人员、高等院校教师及研究生阅读、参考.

力 学 丛 书

多自由度结构固有振动理论

胡 海 昌 著

责任编辑 李成香

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1987 年 5 月第 一 版　开本: 850×1168 1/32

1987 年 5 月第一次印刷　印张: 4 1/2

印数: 0001—3,100　字数: 113,000

统一书号: 13031・3593

本社书号: 5396・13—2

定 价: 1.35 元

序　言

结构和机械的振动问题是宇航、交通、机械、土建、水利等工业部门经常遇到的问题．随着产品的更新换代和对提高经济效益的重视，振动问题愈来愈受到广泛的关注．可以说，当前在我国力学界和部分工程技术人员中正在形成一个学习、研究和应用振动技术和理论的热潮．相应地，近年来出版了几本我国学者自编自写的振动专著，国外有关的名著也大都有了中译本．

本书不再对结构振动作全面的叙述，而着重介绍四个专题，因此可以说本书是一个"小四色拼盘"．这四个专题在理论上和实用上都有重要意义，但是有关的资料目前仍大都散见于各种原始文献．本书将其中比较重要的一些成果归纳整理各成一章，由于这几方面的文献甚多，我只能在力所能及的范围内做些整理和发展工作．

本书按理论上从易到难排顺序，即"小参数法和局部修改法"，"本征值的包含定理和计数定理"，"动态子结构法"和"链式结构和迴转对称结构"．在将这些成果应用于处理实际问题时，需改变一下上述顺序．即给定一个结构后，最好先看看是否有对称性，如有对称性就利用对称性把原有问题分解为一系列的小问题．其次考虑一下是否可用小参数法或局部修改法求解，能用就用，不能用再考虑选择一种子结构法．至于本征值的包含定理和计数定理常作为迭代法的一种补充手段，或在得到近似解后再用它们去估计本征值的误差．

本书缺点和错误在所难免，欢迎读者指正．

胡海昌

1986年10月

目　　录

第一章　预 备 知 识

§1.1　本征值的变分式

考虑线性结构的固有振动问题．设结构已按某种方式离散化了．因此这里我们只考虑有限个（N 个）自由度的系统．命 $\boldsymbol{x}$ 是由全部广义坐标组成的列阵，$\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 为与 $\boldsymbol{x}$ 相应的刚度矩阵和质量矩阵．命 ω 是频率．为了以后书写方便起见，再命

$$\lambda = \omega^2. \tag{1.1.1}$$

λ 称为频率参数．这样，在忽略机械能的损耗后，固有振动的方程可写成为

$$\boldsymbol{Kx} - \lambda \boldsymbol{Mx} = \boldsymbol{0}. \tag{1.1.2}$$

这里 $\boldsymbol{x}$ 代表振幅．在振动过程中，结构中贮存的应变能（势能）和动能不断互相转化．应变能的幅值 Π 和动能的幅值 E 分别为

$$\Pi = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Kx}, \tag{1.1.3}$$

$$E = \frac{1}{2}\lambda \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Mx}. \tag{1.1.4}$$

在作分析计算时，比 E 更重要的一个量是

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Mx}. \tag{1.1.5}$$

T 称为动能系数．

如果所考虑的结构没有刚体和机构自由度（以下简称刚体自由度），那末对应于任一非零位移 $\boldsymbol{x}$ 都有

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Kx} > 0.$$

这时的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是正定的．如果该结构有刚体位移 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}_0$（$\boldsymbol{\varphi}_0$ 可能是不止一列的高矩阵），那末

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}_0 = \boldsymbol{0}, \text{ 因而 } \boldsymbol{\varphi}_0^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}_0 = 0.$$

这时 $\boldsymbol{K}$ 是半正定的. 与刚体位移相应的本征值是 $\lambda = 0$.

对于许多结构,有了振动必然会有动能,即对于任意的非零 $\boldsymbol{x}$ 都有

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} > 0.$$

这时质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是正定的. 不过,有些结构的有些自由度可能没有质量[1), 这时就存在非零的位移 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}_\infty$ ($\boldsymbol{\varphi}_\infty$ 可能是不止一列的高矩阵),能使

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_\infty = \boldsymbol{0}, \text{ 因而 } \boldsymbol{\varphi}_\infty^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_\infty = 0.$$

这些没有质量的自由度可以叫做纯静态自由度. 对于工程结构而言,刚体位移 $\boldsymbol{\varphi}_0$ 和纯静态位移 $\boldsymbol{\varphi}_\infty$ 决不重合, 所以后面的讨论, 如无特殊说明, 恒假定矩阵束 ($\boldsymbol{K}, \boldsymbol{M}$) 不仅是非负的, 并且是确定的,即对于任意的 $\boldsymbol{x}$ 都有

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} \geqslant 0, \quad \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} \geqslant 0, \tag{1.1.6}$$

而如果

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = 0, \text{ 同时 } \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} = 0, \tag{1.1.7a}$$

那末必有

$$\boldsymbol{x} = 0. \tag{1.1.7b}$$

对于这类系统,本征值是离散的,并且是非负的.

忽略机械能的损耗之后,机械能便守恒了. 这样便有

$$\lambda = \frac{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}}. \tag{1.1.8}$$

此式的右端称为瑞利商. 当 $\boldsymbol{x}$ 为某一固有振型的精确解时, 瑞利商给出相应的本征值.

从 (1.1.8) 式出发可得到本征值的变分式

$$\lambda = \operatorname*{st}_{\boldsymbol{x}} \frac{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}}, \tag{1.1.9}$$

---

1) 在有限单元法中, 用分项插入法求得的非一致质量矩阵常常存在无质量的广义位移, 即使在弹簧质点系统中, 如果在弹簧中间设一结点, 那末此结点也无质量.

而对于最小的本征值 $\lambda_{\min}$ 和最大的本征值 $\lambda_{\max}$ 分别有

$$\lambda_{\min} = \min_{x} \frac{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}}, \quad \lambda_{\max} = \max_{x} \frac{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}}. \tag{1.1.10}$$

事实上 (1.1.9) 式取驻值的充要条件是

$$\delta\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}) = 0.$$

由此可见代数本征值问题(1.1.2)与瑞利商的驻值问题(1.1.9)完全等价. 但是在求近似解和推导一般性的定理时，从变分式 (1.1.9) 出发常常比从代数方程出发方便得多.

如果 $\boldsymbol{x}$ 是某一本征列阵的近似解，那末将此 $\boldsymbol{x}$ 代入 (1.1.8)便得到相应的近似的本征值. 这种求近似的本征值的方法叫做瑞利法. 本征值既然是瑞利商的驻值，那末当所设的 $\boldsymbol{x}$ 有一阶小量的误差时，由瑞利商得到的近似的本征值就只有二阶小量的误差了. 事实上如果命 λ, $\boldsymbol{\varphi}$ 为一对精确的本征解，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi} + \delta\boldsymbol{\varphi}$$

为一近似解，其中 $\delta\boldsymbol{\varphi}$ 为一小量，那末瑞利商给出

$$\begin{aligned}\lambda_R &= \frac{(\boldsymbol{\varphi} + \delta\boldsymbol{\varphi})^T\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\varphi} + \delta\boldsymbol{\varphi})}{(\boldsymbol{\varphi} + \delta\boldsymbol{\varphi})^T\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\varphi} + \delta\boldsymbol{\varphi})} \\ &= \frac{\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi} + 2\delta\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi} + \delta\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{K}\delta\boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi} + 2\delta\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi} + \delta\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{M}\delta\boldsymbol{\varphi}} \\ &= \frac{\lambda\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi} + 2\lambda\delta\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi} + \delta\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{K}\delta\boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi} + 2\delta\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi} + \delta\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{M}\delta\boldsymbol{\varphi}} \\ &= \frac{\lambda + \dfrac{\delta\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{K}\delta\boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi} + 2\delta\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}}}{1 + \dfrac{\delta\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{M}\delta\boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi} + 2\delta\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}}}.\end{aligned} \tag{1.1.11}$$

瑞利商对本征列阵误差的不敏感性，正是用瑞利 (里兹) 法求本征值常常能得到满意结果的根本原因.

在近似计算中更常用的方法是里兹法. 在里兹法中，先把待求的本征列阵近似地表示为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}_1 y_1 + \boldsymbol{\Phi}_2 y_2 + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_n y_n = \boldsymbol{\Phi} y, \tag{1.1.12}$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi} = [\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n],$$
$$y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T, \tag{1.1.13}$$

而$\boldsymbol{\Phi}_i$是n个(n常远小于N)适当选定的列阵，y_i是n个待定的常数．将(1.1.12)式代入变分式(1.1.9)，得到

$$\lambda = \underset{y}{\mathrm{st}} \frac{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}}, \tag{1.1.14}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Phi},\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi}. \tag{1.1.15}$$

将变分式(1.1.14)转换成代数方程，得到

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} - \lambda\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}. \tag{1.1.16}$$

这样在应用里兹法后，人们可以把原来维数(N)较高的问题近似地简化为维数(n)较低的问题．矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是用里兹法降维后得到的刚度矩阵和质量矩阵，以后分别简称为里兹减缩刚度矩阵和里兹减缩质量矩阵．如果$n = N$，那末公式(1.12)—(1.16)便是坐标转换公式．

本征列阵的正交性是一个很重要的特性．这个特性通常是从代数方程(1.1.2)推导出来的．从变分式(1.1.9)推导正交关系相当方便，并且便于推广到连续系统的情况去(例如见文献[1] §2.18)．命$(\lambda_i, \boldsymbol{\varphi}_i)$和$(\lambda_j, \boldsymbol{\varphi}_j)$为两组本征解：

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}_l - \lambda_l\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_l = \boldsymbol{0},\ l = i, j. \tag{1.1.17}$$

因而有

$$\lambda_l = \frac{\boldsymbol{\varphi}_l^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}_l}{\boldsymbol{\varphi}_l^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_l},\ l = i, j. \tag{1.1.18}$$

现在取

$$\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{\varphi}_i + \beta\boldsymbol{\varphi}_j, \tag{1.1.19}$$

而用里兹法来求本征值，将(1.1.19)式代入(1.1.9)式，得到

$$\lambda = \underset{\alpha,\beta}{\mathrm{st}} \frac{{}_iK_i\alpha^2 + 2{}_iK_j\alpha\beta + {}_jK_j\beta^2}{{}_iM_i\alpha^2 + 2{}_iM_j\alpha\beta + {}_jM_j\beta^2}, \tag{1.1.20}$$

其中

$${}_lK_m = \boldsymbol{\varphi}_l^TK\boldsymbol{\varphi}_m,\ {}_lM_m = \boldsymbol{\varphi}_l^TM\boldsymbol{\varphi}_m,\ l, m = i, j. \tag{1.1.21}$$

将 (1.1.20) 式化为代数方程，得到

$$
\begin{aligned}
{}_iK_i\alpha + {}_iK_j\beta - \lambda({}_iM_i\alpha + {}_iM_j\beta) = 0,\\
{}_jK_i\alpha + {}_jK_j\beta - \lambda({}_jM_i\alpha + {}_jM_j\beta) = 0.
\end{aligned}
\tag{1.1.22}
$$

根据题设，

$$
\begin{aligned}
\lambda = \lambda_i,\ \alpha = 1,\ \beta = 0;\\
\lambda = \lambda_j,\ \alpha = 0,\ \beta = 1
\end{aligned}
$$

是方程 (1.1.22) 的两组解，即

$$
\begin{aligned}
{}_iK_i - \lambda_{ii}M_i = 0,\ {}_jK_i - \lambda_{ij}M_i = 0,\\
{}_jK_j - \lambda_{jj}M_j = 0,\ {}_iK_j - \lambda_{ji}M_j = 0.
\end{aligned}
\tag{1.1.23}
$$

由此可知，如果 $\lambda_i \neq \lambda_j$，那末必有

$$
{}_iK_j = 0,\ {}_iM_j = 0, \tag{1.1.24a}
$$

即

$$
\boldsymbol{\varphi}_i^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}_j = 0,\ \boldsymbol{\varphi}_i^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_j = 0. \tag{1.1.24b}
$$

如果某本征值 λ 是特征方程的 m 重根，那末齐次方程 (1.1.2) 便有 m 个独立的解. 设它们是

$$
\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \cdots \boldsymbol{\phi}_m] = \boldsymbol{\phi}. \tag{1.1.25}
$$

$\boldsymbol{\phi}$ 张成的空间是与 λ 对应的本征空间. 一般说来，$\boldsymbol{\phi}$ 中的各列并不一定正交. 不过在这种情况下只要 $\boldsymbol{\alpha}$ 是一个 $m\times m$ 阶的非奇异矩阵，

$$
\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\alpha} \tag{1.1.26}
$$

仍然张成与 $\boldsymbol{\phi}$ 相同的本征空间. 适当地选取 $\boldsymbol{\alpha}$ 我们总能够使

$$
\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi} = \text{对角阵},\ \boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi} = \text{对角阵}. \tag{1.1.27}
$$

这样 $\boldsymbol{\varphi}$ 中的各列便构成本征空间中的正交基. 正交基显然不止一组[1].

下面再证明一下，任何一个本征列阵(或空间) $\boldsymbol{\varphi}_i$ 都与纯静态位移 $\boldsymbol{\varphi}_\infty$ 正交. 这是因为

$$
\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}_i - \lambda_i\boldsymbol{M}\boldsymbol{\varphi}_i = \boldsymbol{0},
$$

所以有

---

1) 在文献 [6] 中提到了本征空间正交基的存在和求法的一些历史文献.

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\varphi}_\infty = \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\varphi}_\infty = 0. \tag{1.1.28}$$

对于任取的一组独立的纯静态位移，其中的各列也未必正交。但和重根的情况类似，通过适当的矩阵变换，我们能够使 $\boldsymbol{\varphi}_\infty$ 中的各列正交，即

$$\boldsymbol{\varphi}_\infty^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\varphi}_\infty = \text{对角阵}, \quad \boldsymbol{\varphi}_\infty^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\varphi}_\infty = 0. \tag{1.1.29}$$

这样 $\boldsymbol{\varphi}_\infty$ 中的各列便构成纯静态位移空间中的一组正交基。这样的正交基也不止一组。

到这里我们介绍了本征列阵、本征空间中的正交基和纯静态位移空间中的正交基等三种列阵。现在约定一个统一的记法。本征列阵和本征空间中的正交基列阵一概记为 $\boldsymbol{\varphi}_i$，与 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 对应的本征值记为 λ_i。下标 i 从 1 开始编号，并按 λ_i 从小到大的顺序排列，即

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \cdots \leqslant \lambda_u. \tag{1.1.30}$$

同一本征空间中的两个基列阵 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_j$ 对应于相等的本征值 $\lambda_i = \lambda_j$，它们的先后顺序可任意排定。纯静态位移空间中的一组正交基记为 $\boldsymbol{\varphi}_\infty$，其中的各列记为 $\boldsymbol{\varphi}_\infty^1, \boldsymbol{\varphi}_\infty^2, \cdots, \boldsymbol{\varphi}_\infty^{(N-u)}$，即

$$\boldsymbol{\varphi}_\infty = [\boldsymbol{\varphi}_\infty^1, \boldsymbol{\varphi}_\infty^2, \cdots, \boldsymbol{\varphi}_\infty^{(N-u)}]. \tag{1.1.31}$$

下面再约定一个归一准则。对于 $\boldsymbol{\varphi}_i (i \neq \infty$, 以下同)，一概按动能系数归一，于是有

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\varphi}_i = \lambda_i, \quad \boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\varphi}_i = 1. \tag{1.1.32}$$

对于纯静态位移 $\boldsymbol{\varphi}_\infty$，由于没有动能，只能按应变能归一，于是有

$$\boldsymbol{\varphi}_\infty^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\varphi}_\infty = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{\varphi}_\infty^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\varphi}_\infty = \boldsymbol{0}. \tag{1.1.33}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。这样 $\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \cdots, \boldsymbol{\varphi}_u, \boldsymbol{\varphi}_\infty$ 便构成一组完备的正交双归一基[1)]。由这个基构成的矩阵

$$\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \cdots, \boldsymbol{\varphi}_u, \boldsymbol{\varphi}_\infty] \tag{1.1.34}$$

称为（广义）振型矩阵，又称正则模态矩阵。振型矩阵能同时使 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 对角化

$$\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\Phi} = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_u, 1, \cdots, 1], \tag{1.1.35a}$$

1) 双归一是指 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 按动能归一，$\boldsymbol{\varphi}_\infty$ 按应变能归一。

$$\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi}=\mathrm{diag}\,[\underbrace{1,1,\cdots,1}_{u\text{个}},\underbrace{0,\cdots,0}_{(N-u)\text{个}}],\tag{1.1.35b}$$

此外，任意一个列阵 $\boldsymbol{x}$ 都可以按正交基 $\boldsymbol{\Phi}$ 展开

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\varphi}_1\xi_1+\boldsymbol{\varphi}_2\xi_2+\cdots+\boldsymbol{\varphi}_u\xi_u+\boldsymbol{\varphi}_\infty\xi_\infty\tag{1.1.36}$$

系数 $\boldsymbol{\xi}$ 可按下式决定

$$\xi_i=\boldsymbol{\varphi}_i^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x},\ i=1,\cdots,u,\tag{1.1.37a}$$

$$\xi_\infty=\boldsymbol{\varphi}_\infty^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}.\tag{1.1.37b}$$

应变能和动能系数是坐标列阵 $\boldsymbol{x}$ 的二次函数，因此一般说来叠加原理不适用．但如果把 $\boldsymbol{x}$ 表示为正交双归一基的线性组合，如 (1.1.36) 式，那末应变能和动能系数便可叠加，即

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{u}\lambda_i\xi_i^2+\xi_\infty^T\xi_\infty,\tag{1.1.38a}$$

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{u}\xi_i^2.\tag{1.1.38b}$$

正是由于应变能和动能系数的可叠加性，才使得对正交双归一基的展开式 (1.1.36) 在许多问题中显得特别有用．

§ 1.2 简谐载荷作用下的强迫振动

考虑多自由度系统在简谐载荷作用下的强迫振动问题．命外载荷为 $\boldsymbol{f}e^{i\omega t}$，响应为 $\boldsymbol{x}e^{i\omega t}$．振幅 $\boldsymbol{x}$ 满足下列代数方程

$$(\boldsymbol{K}-\lambda\boldsymbol{M})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f},\ (\lambda=\omega^2).\tag{1.2.1}$$

由此立即得到形式解

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{R}(\lambda)\boldsymbol{f},\tag{1.2.2}$$

其中

$$\boldsymbol{R}(\lambda)=(\boldsymbol{K}-\lambda\boldsymbol{M})^{-1}.\tag{1.2.3}$$

矩阵 $(\boldsymbol{K}-\lambda\boldsymbol{M})$ 有时叫做动刚度矩阵，矩阵 $\boldsymbol{R}(\lambda)$ 是动影响系数矩阵，$\boldsymbol{R}$ 中的元 R_{ij} 是编号为 j 的单位力所产生的编号为 i 的位移．$\boldsymbol{R}(\lambda)$ 又叫做动柔度矩阵．在数学上 $\boldsymbol{R}(\lambda)$ 叫做预解式．

如果我们的问题是只要计算少数几个 λ 值时的响应，那末通常用解联立方程的办法或用求逆矩阵的办法便可以了．但如果我们需要分析计算 λ 对 $\boldsymbol{x}$ 的影响，那末对许多个 λ 值分别进行计算就不胜其繁了．这时需要把 $\boldsymbol{R}(\lambda)$ 表示成便于计算的函数式．这样的函数式是

$$\boldsymbol{R}(\lambda)=\sum_{i=1}^{u}\frac{\boldsymbol{\varphi}_i\boldsymbol{\varphi}_i^T}{\lambda_i-\lambda}+\boldsymbol{\varphi}_\infty\boldsymbol{\varphi}_\infty^T. \tag{1.2.4}$$

这个公式可利用振型矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 的特性 (1.1.35) 证明如下．先用 $\boldsymbol{\Phi}^T(\quad)\boldsymbol{\Phi}$ 来乘

$$\boldsymbol{R}^{-1}=\boldsymbol{K}-\lambda\boldsymbol{M},$$

得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{\Phi}&=\boldsymbol{\Phi}^T(\boldsymbol{K}-\lambda\boldsymbol{M})\boldsymbol{\Phi}\\&=\operatorname{diag}[\lambda_1-\lambda,\lambda_2-\lambda,\cdots,\lambda_u-\lambda,1,\cdots,1].\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

求逆，有

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\Phi}^T)^{-1}=\operatorname{diag}\left[\frac{1}{\lambda_1-\lambda},\cdots,\frac{1}{\lambda_u-\lambda},1,\cdots,1\right].$$

消去 $\boldsymbol{\Phi}$，最后得到

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{\Phi}\operatorname{diag}\left[\frac{1}{\lambda_1-\lambda},\cdots,\frac{1}{\lambda_u-\lambda},1,\cdots,1\right]\boldsymbol{\Phi}^T. \tag{1.2.6}$$

此即公式 (1.2.4)．

将公式 (1.2.4) 代入 (1.2.2)，得到响应的表达式

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{u}\frac{\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{\varphi}_i^T\boldsymbol{f})}{\lambda_i-\lambda}+\boldsymbol{\varphi}_\infty(\boldsymbol{\varphi}_\infty^T\boldsymbol{f}). \tag{1.2.7}$$

此式把动响应表达为各个固有振动的动响应与纯静态位移的静响应的叠加．所以利用此式求响应的办法常叫做模态叠加法．

当

$$\lambda=\lambda_r\ \text{且}\ \boldsymbol{\varphi}_r^T\boldsymbol{f}\neq 0 \tag{1.2.8}$$

时，由于 (1.2.7) 式中有一个分数等于 ∞，因而 $\boldsymbol{x}$ 也等于 ∞．这种情况在力学上叫做共振．按照代数学中严格的说法，应该说这

时的响应 $\boldsymbol{x}$ 不存在.

外加频率等于固有频率不一定发生共振. 设 λ_r 是特征方程的单根. 如果

$$\lambda = \lambda_r \text{ 且 } \boldsymbol{\varphi}_r^T \boldsymbol{f} = 0, \tag{1.2.9}$$

那末共振不会发生. 这是因为 0/0 是一个不确定的量,公式 (2.7) 变为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}_r \xi_r + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{u} \frac{\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{f})}{\lambda_i - \lambda_r} + \boldsymbol{\varphi}_\infty(\boldsymbol{\varphi}_\infty^T \boldsymbol{f}), \tag{1.2.10}$$

式中 ξ_r 是一个不确定的常数. 此式的第一项是齐次方程

$$(\boldsymbol{K} - \lambda_r \boldsymbol{M})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{1.2.11}$$

的通解,而后面几项是方程 (1.2.1) 的一个特解.

再设 λ_r 是特征方程的重根. 命 $\lambda_l, \cdots, \lambda_m$ 都与 λ_r 相等,而其余的 λ_i 与 λ_r 不相等. 这时如果

$$\lambda = \lambda_r \text{ 且 } [\boldsymbol{\varphi}_l, \cdots, \boldsymbol{\varphi}_m]^T \boldsymbol{f} \neq 0, \tag{1.2.12}$$

那末便要发生共振. 但如果

$$\lambda = \lambda_r \text{ 且 } [\boldsymbol{\varphi}_l, \cdots, \boldsymbol{\varphi}_m]^T \boldsymbol{f} = 0, \tag{1.2.13}$$

那末共振不会发生,而有

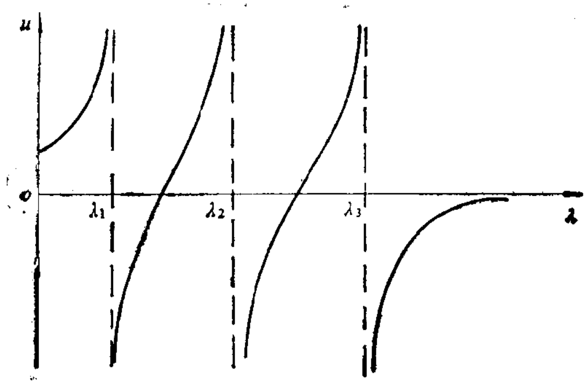
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}_l \xi_l + \cdots + \boldsymbol{\varphi}_m \xi_m + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l \cdots m}}^{u} \frac{\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{f})}{\lambda_i - \lambda_r} + \boldsymbol{\varphi}_\infty(\boldsymbol{\varphi}_\infty^T \boldsymbol{f}), \tag{1.2.14}$$

式中 $\xi_l, \cdots, \xi_m$ 是不定常数. 公式 (1.2.14) 中的前几项是齐次方程 (1.2.11) 的通解,而其余的项是方程 (1.2.1) 的一个特解.

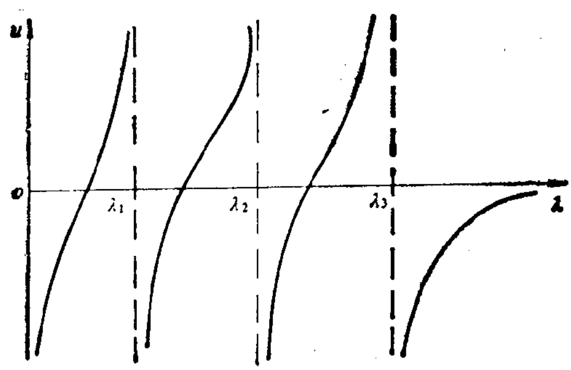
现在进一步考虑分布情况与 $\boldsymbol{f}$ 相同的一类外载荷 $p\boldsymbol{f}$, 其中 p 是一个可变的参数,参数 p 可看作是一个广义力,而 $\boldsymbol{f}$ 规定了它的分布情况. 与 $p = 1$ 对应的广义位移 u (也就是与 p 对应的动柔度)定义为

$$u = \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{x}. \tag{1.2.15}$$

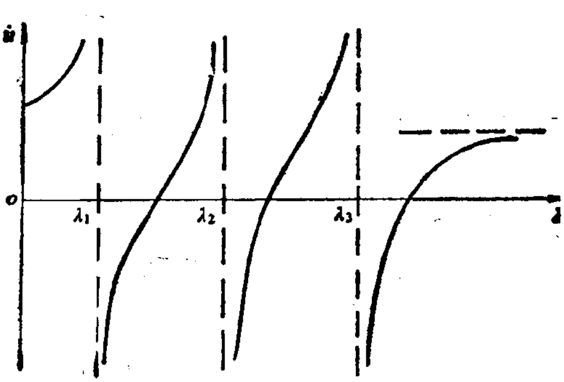
u 的展开式是



(a) 无刚体自由度,无纯静态自由度



(b) 有刚体自由度,无纯静态自由度



(c) 无刚体自由度,有纯静态自由度

图 1.2.1 典型的频率响应曲线