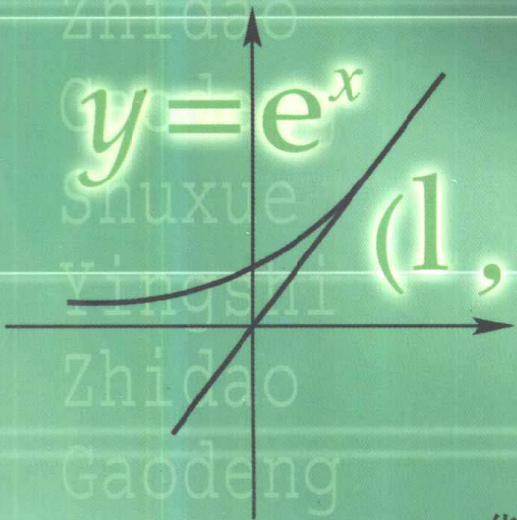


高等数学应试指导

Gaodengshuxue Yingshizhidao

林正国 黄思训 主编



A graph of the exponential function $y = e^x$ is shown on a Cartesian coordinate system. The curve passes through the point $(1, e)$, which is labeled. The equation $y = e^x$ is written in large, stylized letters to the left of the curve. The point $(1, e)$ is also written in large, stylized letters next to the curve. The background of the cover features a green gradient with faint, repeating text "GAODENG SHUXUE" and "YINGSHIZHIDAO" in a vertical orientation on the right side.

$$y = e^x$$

$(1, e)$

华东理工大学出版社

高等数学应试指导

林正国 黄思训 主编

华东理工大学出版社

内 容 提 要

本书是为参加高等数学考试的读者而编写的。这些考试包括成人高考的专升本、学历文凭、自学考及 MBA。

本书内容力求精炼,论述清晰,与考试要求接轨。

作者多年参加以上四类高等数学考试的辅导工作,相信研读本书将对你通过考试大有帮助。

本书还可作为有关教学人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学应试指导/林正国等主编. —上海:华东理工大学出版社,2002. 12

ISBN 7-5628-1313-2

I. 高... II. 林... III. 高等数学-高等学校-教学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 066395 号

高等数学应试指导		林正国 黄思训 主编	
出版	华东理工大学出版社	开本	787×960 1/16
社址	上海市梅陇路 130 号	印张	25.5
邮编	200237 电话 (021)64250306	字数	316 千字
网址	www.hdlgpress.com.cn	版次	2002 年 12 月第 1 版
经销	新华书店上海发行所	印次	2002 年 12 月第 1 次
印刷	上海市崇明县裕安印刷厂	印数	1-6050 册
ISBN 7-5628-1313-2/O·65		定价: 25.00 元	

本书编委会

- | | | |
|-----|-----|------------|
| 主 编 | 林正国 | 华东理工大学 |
| | 黄思训 | 南京解放军理工大学 |
| 编 委 | 吴珽琨 | 华东电脑学院 |
| | 王纪林 | 上海交通大学 |
| | 李绍宽 | 东华大学 |
| | 刘月英 | 上海大学 |
| | 李奕绯 | 华东理工大学 |
| | 曹恒义 | 复旦九三科技培训中心 |

前 言

高等数学的统一考试是教学上的一个热点,各种层次的考试不下十余类,其中最困难的是每年年初的全国硕士研究生的入学考试。其他考试难度略低,研读本书几乎就可应付。

本人开始学习高等数学至今已四十余载,教授高等数学约有100余遍。高等数学的学习方法似乎也可洋洋洒洒地写上数千上万句,但是我要奉献给青年学生的只有两个字:“做题”。

本书收集了极基本的1000余题,都给出了参考答案及部分解答过程。

感谢长期支持作者进行教学实践的华东电脑学院院长江敏、华东理工大学成教院副院长欧伶、MBA办公室主任韩丽清,丰富的教学实践是形成本书的基础。

本书编写力求简明扼要,例题丰富,习题具有针对性,是一本准备应试的有价值的读物。

本书由华东理工大学成人教育学院组织编写。

作 者

目 录

1	函数	(1)
2	极限与连续	(22)
3	导数与微分	(64)
4	导数的应用	(119)
5	不定积分	(174)
6	定积分及其应用	(207)
7	向量代数与空间解析几何	(258)
8	多元函数微积分	(278)
9	无穷级数	(328)
10	微分方程.....	(372)

1

函 数

1.1 内容提要

1.1.1 函数的定义

(1) 定义

设有两个变量 x 与 y , 当变量 x 在给定的某一个变域中任意取定一值时, 另一个变量 y 就按某一确定的法则有一个确定的值与 x 的这个值相对应, 那么变量 y 称为变量 x 的函数, 记作 $y = f(x)$.

(2) 定义中的两个要素

定义域: 自变量 x 的取值范围.

对应法则: 自变量 x 与因变量 y 的对应规则.

(3) 分段函数

在定义域内的不同点集上, 由不同的分析式子表示的函数称为分段函数.

1.1.2 函数的简单性质

(1) 有界、无界性

对某一区间 I 内的所有 x 值, 总有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 其中 M 是一个与 x 无关的常数, 那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 有界; 否则

称在 I 无界.

(2) 单调性

若对于区间 (a, b) 内的任意两个值 x_1 与 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内为单调增(或减)函数, 区间 (a, b) 称为 $f(x)$ 的单调区间. 单调增或单调减函数统称为单调函数.

(3) 奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域关于原点对称, 如果对属于定义域的任何 x 值恒有 $f(x) = f(-x)$, 那么称函数 $f(x)$ 为偶函数; 如果恒有 $f(-x) = -f(x)$, 那么称 $f(x)$ 为奇函数.

奇函数的图像关于原点对称, 偶函数的图像关于 y 轴是对称的.

(4) 周期性

对于函数 $y = f(x)$, 如果有正数 l 存在, 对属于定义域的任意 x , $x \pm l$, 总有等式 $f(x) = f(x \pm l)$ 成立, 那么称 $f(x)$ 为周期函数, 满足上式的最小正常数 l , 称为 $f(x)$ 的周期.

1.1.3 反函数、复合函数

(1) 反函数的定义

设 y 是 x 的函数 $y = f(x)$, 将其中的 x 解出来, $x = \varphi(y)$ 就叫做函数 $f(x)$ 的反函数. 通常总是把自变量记作 x , 函数记为 y , 因此习惯上称 $y = \varphi(x)$ 为函数 $f(x)$ 的反函数, 记作 $f^{-1}(x)$, 而 $f(x)$ 叫做直接函数, 直接函数的值域就是反函数的定义域.

反函数 $y = \varphi(x)$ 与直接函数 $y = f(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 是对称的.

(2) 复合函数的定义

设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$, 而 u 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$, 且当 x 在某一区间 I 取值时, 相应的 u 值可使 y 有定义, 则称 y 是 x 的一个定义于区间 I 的复合函数, 记作 $y = f[\varphi(x)]$.

1.1.4 基本初等函数与初等函数

(1) 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这五类函数统称为基本初等函数.

(2) 初等函数

由基本初等函数与常数经过有限次的四则运算和复合所构成的,并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

1.2 例题精法

【例 1】 确定函数 $y = \frac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域.

解: 真数要大于零, $3x-2 > 0$, $x > \frac{2}{3}$.

分母不等于零, $3x-2 \neq 1$, $x \neq 1$.

因此 $y = \frac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域为

$$D = \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty).$$

【例 2】 求函数 $y = \sqrt{x^2 - x - 6} + \arcsin \frac{2x-1}{7}$ 的定义域.

解: 要使函数有定义, x 必须满足:

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0, \\ \left| \frac{2x-1}{7} \right| \leq 1 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} (x-3)(x+2) \geq 0, \\ -1 \leq \frac{2x-1}{7} \leq 1, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -2, \\ -3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

所以,函数 y 的定义域为 $[-3, -2] \cup [3, 4]$.

【例 3】 求函数 $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16 - x^2}$ 的定义域.

解: x 必须满足

$$\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ 16 - x^2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \pi \quad (k = 0, \pm 1, \dots), \\ -4 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

取 $k = 0$, 有 $0 \leq x \leq \pi$,

取 $k = -1$, 有 $-2\pi \leq x \leq -\pi$, 考虑 $-4 \leq x \leq 4$, 有

$$-4 \leq x \leq -\pi,$$

所以,函数 y 的定义域是 $[-4, -\pi] \cup [0, \pi]$.

【例 4】 设 $y = f(x)$ 的定义域为 $(0, 1]$, 求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$; (2) $f(\sin x)$;

(3) $f(\lg x)$; (4) $f\left(x - \frac{1}{2}\right) + f(\log_2 x)$.

解: (1) $0 < x^2 \leq 1$, 即 $-1 \leq x < 0$ 或 $0 < x \leq 1$,

所以 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 1]$.

(2) $0 < \sin x \leq 1$, 即 $2k\pi < x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$,

所以 $f(\sin x)$ 的定义域为

$$\left(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right] \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

(3) $0 < \lg x \leq 1$, $10^0 < x \leq 10^1$, 即 $1 < x \leq 10$,

所以 $f(\lg x)$ 的定义域为 $(1, 10]$.

$$(4) \quad \begin{cases} 0 < x - \frac{1}{2} \leq 1, \\ 0 < \log_2 x \leq 1 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}, \\ 2^0 < x \leq 2^1, \end{cases} \quad \text{得}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}, \\ 1 < x \leq 2, \end{cases} \quad \text{推出 } 1 < x \leq \frac{3}{2},$$

所以 $f\left(x - \frac{1}{2}\right) + f(\log_2 x)$ 的定义域为 $\left(1, \frac{3}{2}\right]$.

【例 5】 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2 & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & 2 < x \leq 4 \end{cases}$

求 $f(x-1)$.

解: 在上式中以 $x-1$ 替代 x , 有

$$f(x-1) = \begin{cases} (x-1)+2 & 0 \leq x-1 \leq 2 \\ (x-1)^2 & 2 < x-1 \leq 4 \end{cases}$$

即

$$f(x-1) = \begin{cases} x+1 & 1 \leq x \leq 3 \\ (x-1)^2 & 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

【例 6】 设 $f(x+1) = x^2 + 4x - 3$, 求 $f(x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解: 令 $x+1 = t$, 得 $x = t-1$, 代入原式得:

$$f(t) = (t-1)^2 + 4(t-1) - 3 = t^2 + 2t - 6,$$

故 $f(x) = x^2 + 2x - 6$,

$$\text{而 } f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x}\right) - 6 = \frac{1}{x^2}(1 + 2x - 6x^2).$$

【例 7】 已知 $f(x) = \ln x + 1$, $g(x) = \sqrt{x} + 1$, 求 $f[g(x)]$.

$$\text{解: } f[g(x)] = f[\sqrt{x} + 1] = \ln(\sqrt{x} + 1) + 1.$$

【例 8】 判定函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的奇偶性.

$$\text{解: } f(-x) = \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1})$$

$$\begin{aligned}
&= \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\
&= \ln \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\
&= \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\
&= -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x).
\end{aligned}$$

对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$ 均有定义, 故 $f(x)$ 是奇函数.

【例 9】 设 $y = 1 + \lg(x + 2)$, 求它的反函数.

解: 移项, 得 $y - 1 = \lg(x + 2)$

有 $x + 2 = 10^{y-1}$

即 $x = 10^{y-1} - 2$

故所求的反函数为 $y = 10^{x-1} - 2$.

【例 10】 求 $y = x^2$ 的反函数.

解: 在 $(-\infty, +\infty)$ 内, $y = x^2$ 不是一一对应的函数关系, 所以它没有反函数, 而在 $[0, +\infty)$ 内, $y = x^2$ 有反函数 $y = \sqrt{x}$; 在 $(-\infty, 0]$ 内, $y = x^2$ 有反函数 $y = -\sqrt{x}$.

【例 11】 求函数 $y = -\frac{3}{5} \sqrt{25 - x^2}$ ($0 \leq x \leq 5$) 的反函数.

解: 由 $y = -\frac{3}{5} \sqrt{25 - x^2}$, 得 $25 - x^2 = \frac{25}{9} y^2$

故有 $x = \sqrt{25 - \frac{25}{9} y^2} = \frac{5}{3} \sqrt{9 - y^2}$,

所以, 所求的反函数为

$$y = \frac{5}{3} \sqrt{9 - x^2}, x \in [-3, 0].$$

【例 12】 确定函数 $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$ 的奇偶性.

$$\text{解: } f(-x) = \frac{a^{-x} + a^x}{2} = \frac{a^x + a^{-x}}{2} = f(x)$$

对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$ 成立, 故 $f(x)$ 是偶函数.

【例 13】 设 $f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{x+1}{x^2}$ ($x \neq 0$), 求 $f(x)$.

解: 设 $\frac{x+1}{x} = t$, 则 $x+1 = tx$, 有

$$x = \frac{1}{t-1}, \text{ 于是}$$

$$f(t) = \frac{\frac{1}{t-1} + 1}{\left(\frac{1}{t-1}\right)^2} = t-1 + (t-1)^2 = t^2 - t$$

$$\text{故有} \quad f(x) = x^2 - x.$$

【例 14】 若 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 6x + k$, 且

$$f[g(x)] = g[f(x)]$$

求 k .

$$\text{解: } f[g(x)] = 2(6x + k) + 3,$$

$$g[f(x)] = 6(2x + 3) + k,$$

$$\text{故有} \quad 2(6x + k) + 3 = 6(2x + 3) + k$$

$$2k + 3 = 18 + k$$

$$\text{得} \quad k = 15.$$

【例 15】 判断函数 $f(x) = \lg x^2$ 与函数 $\varphi(x) = 2\lg x$ 是否相同.

解: 由于函数 $f(x) = \lg x^2$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而函数 $\varphi(x) = 2\lg x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 故两函数不相同.

$+\infty$), 而函数 $\varphi(x) = 2 \lg x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 它们的定义域不相同, 故这两个函数不相同.

1.3 习 题

- 函数 $f(x) = \cos(x^3)$ 在 xOy 平面上的图形是[].
 A. 关于 x 轴对称 B. 关于 y 轴对称
 C. 关于坐标原点对称 D. 关于直线 $y = x$ 对称
- 二次抛物线 $y = f(x)$ 的图形如图 1.1 所示, 则 $f(x)$ 等于[].

A. $-1 + \frac{1}{4}x^2$

B. $-1 - \frac{1}{4}x^2$

C. $1 + \frac{1}{4}x^2$

D. $1 - \frac{1}{4}x^2$

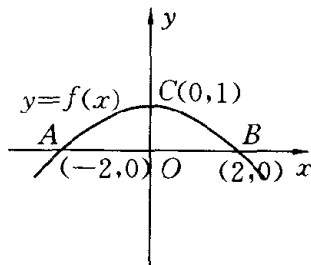


图 1.1

- 函数 $y = \frac{1}{x} \ln(2+x)$ 的定义域为[].
 A. $x \neq 0$ 且 $x \neq -2$ B. $x > 0$
 C. $x > -2$ D. $x > -2$ 且 $x \neq 0$
- 在区间 $(0, +\infty)$ 内, 下列函数中是无界函数的为[].
 A. $y = e^{-x^2}$ B. $y = \frac{1}{1+x^2}$
 C. $y = \sin x$ D. $y = x \sin x$
- 下列函数中, 图形关于 y 轴对称的是[].
 A. $y = x \cos x$ B. $y = x^3 + x + 1$
 C. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ D. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

6. 函数 $y = \frac{\ln x}{\sqrt{2-x}}$ 的定义域为[].

A. $x > 0$

B. $x \leq 2$

C. $0 < x < 2$

D. $0 < x \leq 2$

7. 函数 $y = (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 的定义域为[].

A. $[-1, 1)$

B. $[-1, 1]$

C. $(-1, 1)$

D. $(-1, 1]$

8. 函数 $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ($a > 1$) 为[].

A. 有界函数

B. 偶函数

C. 奇函数

D. 非奇非偶函数

9. 设 $f(1-x) = \frac{1+x}{2x-1}$, 则 $f(x)$ 等于[].

A. $\frac{x}{2x-1}$

B. $\frac{x-2}{1-2x}$

C. $\frac{1+x}{2x-1}$

D. $\frac{2-x}{1-2x}$

10. 设 $f(x) = \begin{cases} x-1 & -1 < x \leq 1 \\ \sqrt{2x^2-1} & 1 < x \leq 2 \\ 0 & 2 < x < 4 \end{cases}$

则 $f(2\pi)$ 等于[].

A. $2\pi-1$

B. $\sqrt{8\pi^2-1}$

C. 0

D. 无意义

11. 设 $y = f(x)$ 的定义域为 $(0, 1]$, $\varphi(x) = 1 - \ln x$, 则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域为[].

A. $(0, 1]$

B. $(0, +\infty)$

C. $(1, e]$

D. $[1, e)$

12. 函数 $f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ 是[].

- A. 奇函数
B. 偶函数
C. 非奇非偶函数
D. 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续的函数
13. 设 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数, 则复合函数 [].
A. $f[g(x)]$ 为奇函数 B. $g[f(x)]$ 为奇函数
C. $f[f(x)]$ 为奇函数 D. $g[g(x)]$ 为奇函数
14. 下列各对函数中, 相同的为 [].
A. $\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $x+1$ B. $e^{\ln(x-1)}$ 与 $x-1$
C. $\sqrt{x^2}$ 与 $|x|$ D. $\sin(\arcsin x)$ 与 x
15. 下列各对函数为相同函数的有 [].
A. $y = \ln |x+1|$ 与 $y = \ln(x+1)$
B. $y = \frac{x^2-4}{x-2}$ 与 $y = x+2$
C. $y = e^{\ln 2x}$ 与 $y = 2x$
D. $y = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ 与 $y = \sqrt{x^2}$
16. 下列各函数为偶函数的是 [].
A. $\arctan(\sin x)$ B. $\frac{1}{2}(2^x + 2^{-x})\cos x$
C. $\frac{e^{-x}-1}{e^x+1}$ D. $x^3 + |\sin x|$
17. 下列各函数中, 不是周期函数的是 [].
A. $y = 1 + \cos \pi x$ B. $y = \arctan(\tan x)$
C. $y = x \sin \frac{1}{x}$ D. $y = \sin \pi x + \cos \pi x$
18. 设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 则 $f(x+1)$ 的定义域是 [].
A. $[-2, -1]$ B. $[-1, 0]$

C. $[0, 1]$

D. $[1, 2]$

19. 函数 $y = \sqrt{\ln(\ln x)}$ 的定义域是[].

A. $(1, +\infty)$

B. $[1, +\infty)$

C. $(e, +\infty)$

D. $[e, +\infty)$

20. $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x}$ $x \in (-\infty, +\infty)$ 是[].

A. 有界函数

B. 单调函数

C. 周期函数

D. 偶函数

21. 函数 $y = \sqrt{3} \sin 3x \cos 3x$ 是[].

A. 周期为 $\frac{\pi}{3}$ 的奇函数

B. 周期为 $\frac{\pi}{3}$ 的偶函数

C. 周期为 $\frac{2\pi}{3}$ 的奇函数

D. 周期为 $\frac{2\pi}{3}$ 的偶函数

22. 函数 $y = \sin x - \cos x$ 是[].

A. 奇函数

B. 偶函数

C. 非奇非偶函数

D. 既是偶函数又是奇函数

23. 若 $f(x) = |1-x| + \frac{|2x-3|}{3|x|-2x}$, 则 $f(-1) = []$.

A. -3

B. 3

C. -1

D. 1

24. 曲线 $y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 在同一直角坐标系中, 它们的图形[].

A. 关于 x 轴对称

B. 关于 y 轴对称

C. 关于直线 $y = x$ 对称

D. 关于原点对称

25. 函数

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & -2 < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x^2+2 & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

的定义域是[].

A. $(-2, 2)$

B. $(-2, 0)$