线性系统理论

赵 玖 编

XXXTLL

西南交通大学出版社

线性系统理论

赵玖　编

西南交通大学出版社
1988年·四川 峨眉

内 容 简 介

本书介绍了线性系统的基本理论，所用方法是状态空间法。全书共分六章：线性连续定常系统；线性离散定常系统；线性定常系统的稳定性；线性定常系统的能控性和能观测性；线性时变系统；线性系统方程的数值解法。每章末均有简短总结并附有一定数量的习题。为便于读者学习，某些定理或数学基础知识，书中以附录形式给出较系统而详尽的证明。

本书主要对象是电工技术方面的专业的研究生和高年级学生，也可供有关工程技术人员、教师和研究人员参考。

线 性 系 统 理 论

XIANXING XITONG LILUN

赵 玖 编

*

西南交通大学出版社出版

（四川 峨眉）

四川省新华书店发行

西南交通大学出版社印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/16 印张：17.875

字数：454千字 印数：1～3000册

1988年12月第一版 1988年12月第一次印刷

ISBN 7-81022-041-1/TP 005

定价：3.90元

前　言

线性系统理论是控制系统理论特别是其中的现代控制理论的基础。近30年来它的研究和应用取得了丰富的成果，已被广泛地应用于自动控制、电路与系统、力学机械工程、生物学、社会学、经济学等许多学科领域，受到了人们的普遍重视，随着系统工程、电子技术、集成电路和计算机科学与技术的飞速发展，线性系统理论的研究和应用必将得到进一步的推动和发展。

线性系统理论主要是研究线性系统的概念、特性、方法以及规律，目的是据此来更好地分析、应用和设计各种不同的系统。本书中研究线性系统理论所用的工具是60年代开始发展起来的现代控制理论中所用的状态空间法。这种方法是用系统的状态变量来表征系统的内部特性，较之古典控制理论所用的传递函数的方法，它的主要优点是：

（1）它不仅适用于线性系统而且也适用于非线性系统；

（2）它不仅适用于定常系统而且也适用于时变系统；

（3）它不仅适用于单输入单输出系统而且也适用于多输入多输出系统；

（4）理论上它有统一的数学表达式，因而它不仅适用于解析法求解而且也适用于数值法求解；

（5）状态空间法是用状态变量反映系统内部特性的内部法，因而这种方法可以在不必求出解的情况下来很好地分析系统的特性，如稳定性、能控性和能观测性等。

全书共六章，第一章线性连续定常系统，主要讨论如何建立系统的状态方程及其解，重点是时域解（因为频域解在有关的其他课程中已讨论），以及用初始条件和输入控制输出模式的方法。第二章讨论线性离散定常系统，这是第一章所讨论的主要问题在离散系统时的情况，这里时域解和频域解是并重的，对离散系统研究时的一个重要数学工具——z变换作了较系统的介绍。第三章讨论线性系统的稳定性问题，着重研究了渐近稳定(AS)、Lyapunov意义下的稳定（SIsL）、有界输入有界输出稳定（BIBO)以及有界输入有界状态稳定(BIBS)，此外还介绍了可用于一切系统（包括非线性系统）的Lyapunov函数法，第四章研究了在现代控制理论中占重要地位的能控性和能观测性，主要内容包括两者的定义，判别方法，标准形以及典范分解。第五章简要讨论时变系统，重点研究状态转移矩阵$\Phi(t, t_0)$的问题。最后一章第六章讨论线性系统方程的数值解法，主要内容是介绍状态方程和线性方程组两者数值解的误差分析和各种算法，包括前者的正向、反向欧拉算法和梯形算法（FE，BE和TP算法），算法数值稳定性和步长的选定，以及后者的Gauss消去法，Cholesky法，Gauss-Siedal迭代法和LU法。

本书是作者1985年在美国Purdue大学进修一年返国后在1986年西南交通大学、1987年北方交通大学电气工程系研究生授课和编写的同名讲义的基础上参照国内外的教学和各种教材而编写的，可作为研究生和高年级大学生的教材或教学参考书，也可供工程技术人员、科研人员自学用。

本书突出基本概念、基本定理和相应的计算方法，力求论证严谨，叙述简明易懂，论述每一问题，尽量给出来龙去脉。为不影响正文的连贯性，某些原理和数学公式的证明或推导在各章后面的附录中给出。为便于读者学习，书中给出较多的例题和习题。

西南交通大学计算机科学系边孝林副教授参加了本书的习题编写工作，特致谢意。北方交通大学电气工程系魏绍芬副教授在全部完成本书的工作中做了不少的具体工作，作者也特此致谢。

由于作者学识水平有限，编写时间较紧促，书中难免会有错误和不妥之处，热切希望读者批评指正。

作　者

1988 年 7 月于北京

北方交通大学

目　录

第一章　线性连续定常系统

研究线性系统理论，主要的问题是如何建立能反映实际物理系统特性的数学模型，对此模型求解，进行对模型的分析，掌握系统的各种性能参数，从而达到能更好地分析、应用和设计系统的目的。

§1—1　概　　论

一个物理系统的动态特性可以用有限的一组微分方程来表征。用状态空间法表征一个系统时，系统方程的最一般标准形式（这就是说，系统可以是线性或非线性、定常或时变连续系统）为

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}[\mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t),\ t] \tag{1.1—1}$$

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{g}[\mathbf{x}(t),\ \mathbf{u}(t),\ t] \tag{1.1—2}$$

其中，$\mathbf{x}(t)$、$\mathbf{y}(t)$ 和 $\mathbf{u}(t)$ 分别是系统的状态变量，输出和输入的列向量，即

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \tag{1.1—3}$$

$$\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} \tag{1.1—4}$$

$$\mathbf{u}(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \tag{1.1—5}$$

$\dot{\mathbf{x}}(t)$ 是 $\mathbf{x}(t)$ 的一阶导数，即

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t) \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_n(t) \end{pmatrix} \tag{1.1—6}$$

f，g 是 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{u}(t)$ 的向量函数。

在线性时变连续系统的情况下，式（1.1—1）和式（1.1—2）变为

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \tag{1.1—7}$$

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \tag{1.1—8}$$

其中，$\mathbf{A}(t)$、$\mathbf{B}(t)$、$\mathbf{C}(t)$ 和 $\mathbf{D}(t)$ 是与时间有关，表征系统特性的参数矩阵。

在线性定常连续系统的情况下，式（1.1—1）和式（1.1—2）就变为

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{1.1—9}$$

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{1.1—10}$$

其中，**A**、**B**、**C** 和 **D** 是常数矩阵，它们是与时间无关但与系统的结构和参数有关的参数矩阵。

式（1.1—1）、式（1.1—7）和式（1.1—9）所示的方程称之为状态方程，式（1.1—2）、式（1.1—8）和式（1.1—10）所示方程称之为输出方程，两者合在一起统称之为系统方程。式（1.1—9）和式（1.1—10）所示的系统方程，即线性定常连续系统的状态方程和输出方程是本章中要讨论的问题，这也是本书中要着重讨论的问题，理由是：首先它能较准确地描述许多实际物理系统，反映系统的特征，因而是一种较好的数学模型；其次对于要进一步解决其他各种更复杂而困难的系统理论问题，例如离散系统、非线性系统和时变系统等问题，它也是一个基础。因此我们有必要首先集中精力研究线性定常连续系统的问题。

现在我们对式（1.1—9）和式（1.1—10）所示标准形式的系统方程（状态方程和输出方程）强调说明几点：

(1) $\mathbf{x}(t)$ 是状态变量的列向量（$n\times1$），它是由表征系统全部特性的 n 个状态变量标量组成，如式（1.1—3）所示。它通常是未知而待求解的变量。$\mathbf{u}(t)$ 是输入时间函数，它是一个（$m\times1$）列向量，它是由 m 个作用于系统的输入标量时间函数组成，如式（1.1—5）所示。它通常是已知量。$\mathbf{y}(t)$ 是输出时间函数，它是一个（$p\times1$）列向量，它是由 p 个系统输出标量时间函数组成，如式（1.1—4）所示。它通常也是待求变量，事实上只要一旦 $\mathbf{x}(t)$ 求得，它就迎刃而解。

由此可见，上述系统方程反映了系统的多个输入和多个输出间的关系以及它们与状态变量的关系。

(2) **A** 名叫系统矩阵，它是由系统参数决定的一个（$n\times n$）矩阵。**B** 和 **C** 分别名叫输入矩阵和输出矩阵，它们的大小分别是（$n\times m$）和（$p\times n$）。**D** 是反映输入和输出直接联系的系数矩阵，其大小是（$p\times m$）。**B**、**C** 和 **D** 矩阵都是反映输入、输出和状态变量三者关系的系数矩阵。

(3) 状态变量标量 x_1，x_2，…，x_n 的个数 n 就是系统的阶数。这样的状态方程如果转换成只含一个状态变量的微分方程，其阶数为 n。

(4) 式（1.1—10）输出方程中的 $\mathbf{D}\mathbf{u}(t)$ 是表示输出中与输入成正比的那部分，因此是与系统的动态特性无关的，在讨论问题时常可省略，只要记住必要时补上这一项即可，所以有时我们常用系统（**A**、**B**、**C**）〔代替系统（**A**、**B**、**C**、**D**）〕来代表式（1.1—9）和式（1.1—10）所表示的系统。

下面将讨论如何建立数学模型，即如何求得系统的状态方程和输出方程的问题。

§1—2 由物理系统直接建立状态方程

这种方法适用于线性和非线性系统，当遇到非线性系统时我们常可用分段线性化的方法将问题变成线性系统的问题来处理。

方法是：由物理系统的结构，根据不同的物理系统所具有的规律和定理，可以直接得出状态方程，为此我们还常利用各种不同的物理模拟（如下表）使之能从一种物理系统的状态方程迅速求得另一系统的状态方程。

下面用几个例子来说明这种方法。

物 理 模 拟 表

串联电路	并联电路	机械平移系统	机械旋转系统	热力系统	水力系统	风动系统
电压	电流	力	力矩	温度差	压力差	压力差
电荷	磁链	位移	角位移	热量	液量	风量
电流	电压	速度	角速度	热通量	液流量	风流量
电感	电容	质量	转动惯量		液惯量	
电阻	电导	粘性摩擦系数	粘性摩擦系数	热阻	液阻	风阻
电容	电感	弹簧系数倒数	扭转弹簧系数倒数	热容量	液容量	风容量

【例 1—1】 试求如图 1—1(*a*) 所示机械系统的状态方程。

解 图 1—1(*a*) 中所示 M 为一机车的质量，z 为机车位移，K 和 D 为机车的弹簧系数和阻尼粘性摩擦系数，f 为作用于机车上的牵引力。现考察作用于机车上所有的力，根据牛顿定律可列出方程

$$M\ddot{z}=f-Kz-D\dot{z} \tag{1.2—1}$$

即

$$\ddot{z}=\frac{1}{M}f-\frac{K}{M}z-\frac{D}{M}\dot{z} \tag{1.2—2}$$

现令状态变量为 $x_1\triangleq z$，$x_2\triangleq\dot{z}=w$，令输入为 $u\triangleq f$，输出为 $y\triangleq z$。我们可求得标准形式的状态方程和输出方程

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{K}{M} & -\frac{D}{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix}u \tag{1.2—3}$$

$$y=[1\quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \tag{1.2—4}$$

由上表所示的物理模拟，我们可立即求得这个系统的等效电路如图 1—1(*b*) 和图 1—1(*c*)所示，这两个电路是互为对偶的电路。

上面这个例子是单输入单输出（即只有一个输入和一个输出）系统（这种系统有时简写

为 SISO 系统）的情况，下面讨论两个多输入多输出系统（常简写为 MIMO 系统）的例子。

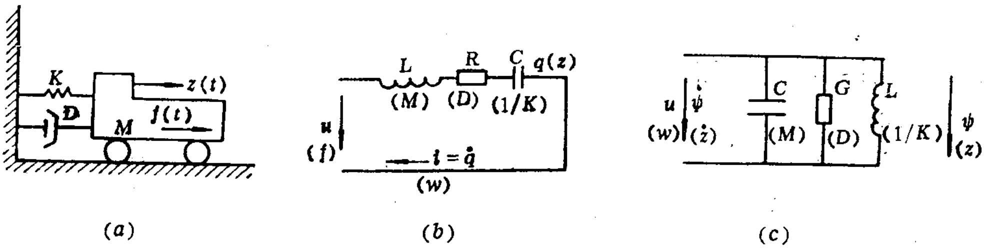


图 1—1 简单机械系统及其等效电路

【例 1—2】 两机车起动一列车辆如图 1—2(a) 所示，试求此系统的状态方程。

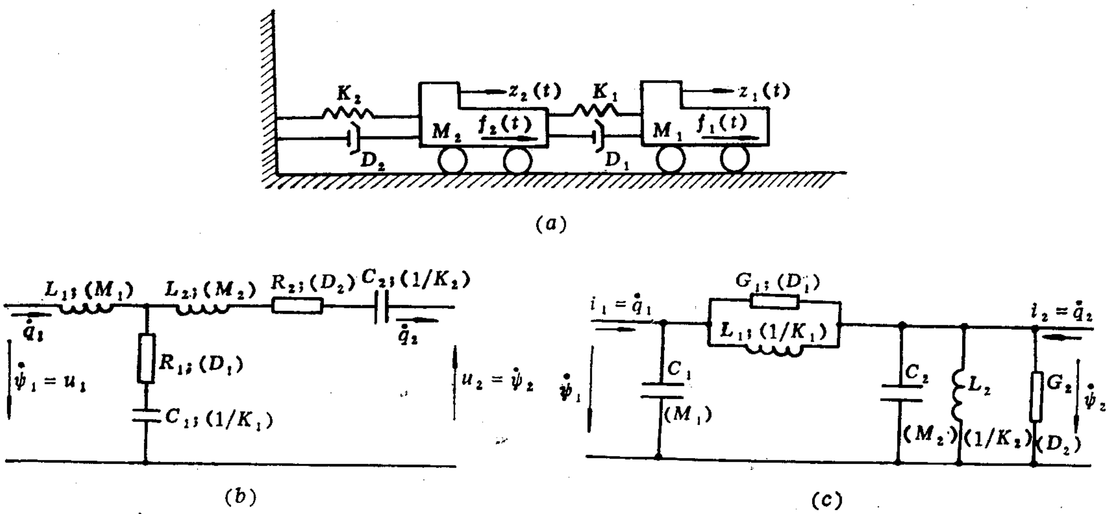


图 1—2 一个多变量机械系统及其等效电路

解 图 1—2(a) 中所示 M_1 和 M_2 为两机车的质量，z_1 和 z_2 为两机车的位移，K_1、K_2 和 D_1、D_2 为与两机车相应的弹簧系数和阻尼粘性摩擦系数，f_1、f_2 为作用于两机车上的力。根据牛顿定律我们可列出方程

$$M_1\ddot{z}_1 = f_1 - k_1(z_1 - z_2) - D_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) \tag{1.2—5}$$

$$M_2\ddot{z}_2 = f_2 - K_1(z_2 - z_1) - K_2 z_2 - D_1(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - D_2\dot{z}_2 \tag{1.2—6}$$

式 (1.2—5)、式 (1.2—6) 中都分别在等式左右除以质量 M_1 和 M_2，再选择状态变量为 $x_1 \triangleq z_1$，$x_2 \triangleq \dot{z}_1$，$x_3 \triangleq z_2$，$x_4 \triangleq \dot{z}_2$，令输入为 $u_1 \triangleq f_1$，$u_2 \triangleq f_2$，输出为 $y_1 \triangleq z_1$，$y_2 \triangleq z_2$。便可得出标准形式的状态方程和输出方程，其系数矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{K_1}{M_1} & -\dfrac{D_1}{M_1} & \dfrac{K_1}{M_1} & \dfrac{D_1}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{K_1}{M_1} & \dfrac{D_1}{M_2} & -\dfrac{K_1 + K_2}{M_2} & -\dfrac{D_1 + D_2}{M_2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{M_2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.2\text{—}7)$$

图 1—2(*b*)、(*c*) 所示为与此机械系统相对应的串联和并联的等效电路图。

【例 1—3】 试求如图 1—3 所示用电枢电压控制的他激电动机的状态方程。

解 令电动机的他激激磁保持不变，我们可分两种情况来讨论。

情况 1 电动机在线性模式下运行，即其转动惯量 J_M 为常数。

图中 u_a、i_a——他激电动机的外加电压和电流；

R_a、L_a——他激电动机的电枢绕组的电阻和电感；

u_f、i_f——激磁绕组的电压（本例中为常数）和电流；

R_f、L_f——激磁绕组的电阻和电感；

m_l——负载力矩；

J_M——电动机的转动惯量；

θ_m——电动机轴旋转的角度；

$\dot{\theta}_m$——电动机轴转速。

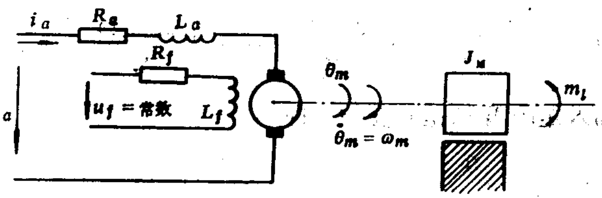


图 1—3 激磁为常数的他激电动机图

下面写出电动机的电压方程及其运动方程

$$u_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K_v \frac{d\theta_m}{dt} \qquad (1.2\text{—}8)$$

$$K_M i_a = J_M \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + D_M \frac{d\theta_m}{dt} + m_l \qquad (1.2\text{—}9)$$

式中，K_v 是电动机的电压对转速之比，K_M 是力矩对电流之比，D_M 是阻尼系数，这三个数都是常数。

现令输入为 $u_1 = u_a$，$u_2 = m_l$，输出为 $y_1 = \theta_m$，$y_2 = i_a$，并选状态变量为

$$x_1 = \theta_m,\ x_2 = \dot{\theta}_m = \omega_m,\ x_3 = q_a,\ x_4 = \dot{q}_a = i_a$$

式中，q_a 为构成电流 i_a 的电荷。这样就得到以下的状态方程和输出方程

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 \\
\dot{x}_2 = -\dfrac{D_M}{J_M}x_2 + \dfrac{K_M}{J_M}x_4 - \dfrac{1}{J_M}u_2 \\
\dot{x}_3 = x_4 \\
\dot{x}_4 = -\dfrac{K_v}{L_a}x_2 - \dfrac{R_a}{L_a}x_4 + \dfrac{1}{L_a}u_1
\end{cases}
\tag{1.2—10}
$$

$$
\begin{cases}
y_1 = x_1 \\
y_2 = x_4
\end{cases}
\tag{1.2—11}
$$

显然，如果写成如式（1.1—9）和式（1.1—10）那样的标准形式状态方程和输出方程，则其系数矩阵为

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{D_M}{J_M} & 0 & \dfrac{K_M}{J_M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{K_v}{L_a} & 0 & -\dfrac{R_a}{L_a} \end{bmatrix}
\qquad
\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{J_M} \\ 0 & 0 \\ \dfrac{1}{L_a} & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\tag{1.2—12}
$$

实际上，上面的状态方程中 x_3 是可省去的，这不会影响系统性能的分析。

情况 2　转动惯量是时变的，即 $J_M = J_M(t)$。

这时力矩方程式（1.2—5）有某些修改，变成

$$
K_M i_a(t) = J_M(t)\frac{\mathrm{d}^2\theta_m(t)}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\mathrm{d}J_M(t)}{\mathrm{d}t} + D_M\right)\frac{\mathrm{d}\theta_m(t)}{\mathrm{d}t} + m_l(t)
\tag{1.2—13}
$$

这时系统矩阵 **A** 和输入矩阵 **B** 都是时变的，即

$$
\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{D_M + \dot{J}_M(t)}{J_M(t)} & 0 & \dfrac{K_M}{J_M(t)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{K_v}{L_a} & 0 & -\dfrac{R_a}{L_a} \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{J_M(t)} \\ 0 & 0 \\ \dfrac{1}{L_a} & 0 \end{bmatrix}
\tag{1.2—14}
$$

则所得系统方程将是如式（1.1—7）、式（1.1—8）所表示的线性时变连续系统的方程。

§1—3 由电路图求状态方程

根据已知电路图可求得相应的状态方程。状态变量（标量）的选择有许多方法，因此如何选择状态变量就成为首先要解决的问题。根据状态变量的定义，这些变量应该是：

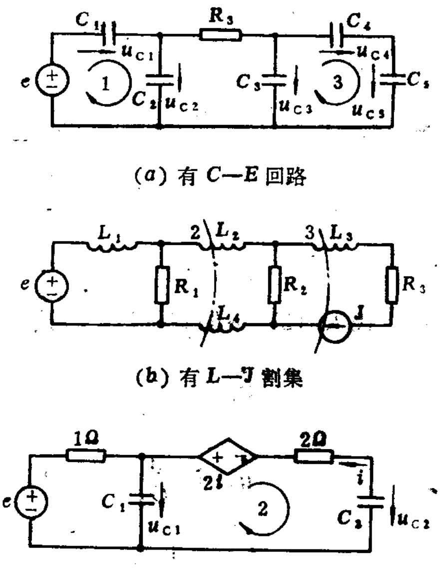
(1) 通过这些变量能够表征电路的全部特性；

(2) 都是独立的变量；

(3) 数量是最少的。

在许多选择状态变量的方法中，我们常采用的一种最简便的方法是选用电路中所有独立的电感电流和电容电压，这里说的“独立的”意思是当出现 C—E 回路（由电容或电容和独立电压源构成的回路）和 L—J 割集（由电感或由独立电流源构成的割集）时以及出现某些情况下的受控源或负阻元件时，不是所有的电感电流和电容电压都是独立变量，例如图 1—4(a)、(b)、(c) 中分别表示了上述情况。

图 1—4(a) 中回路 1 和 3 就是 $C-E$ 回路，此时有 $u_{C2}=e-u_{C1}$ 和 $u_{C3}=u_{C5}+u_{C4}$ 的关系成立，因此 u_{C1}、u_{C2} 中有一个，u_{C3}、u_{C4}、u_{C5} 中也有一个就不是独立变量。图 1—4(b) 中割集 2 和割集 3，就是 L—J 割集，此时有 $i_2=i_4$ 和 $i_3=J$ 的关系成立，因此 i_2、i_4 中的一个以及 i_3 就不是独立变量。图 1—3(c) 的情况稍隐晦些，在回路 2 中电阻上的电压降与受控源的电压刚好相互抵消，从而有 $u_{C1}=u_{C2}$ 的关系成立，因此 u_{C1}、u_{C2} 中有一个就不是独立变量。



(a) 有 C—E 回路

(b) 有 L—J 割集

(c) 有特殊情况的受控源

图 1—4 出现非独立的 i_L 和 u_C 的电路

下面我们来讨论选择电路中所有的独立的 i_L 和 u_C 后建立状态方程的方法。此法的步骤是：

(1) 选所有的电感电流 i_L 和电容电压 u_C（当然都应该是独立变量）作为状态变量 x_i $(i=1, 2, \cdots, n)$；

(2) 写出所有的 $\dot{u}_C=C^{-1}i_C$ 和 $\dot{i}_L=L^{-1}u_L$ 的关系式，式中 i_C 为电容 C 的电流，u_L 是电感 L 的电压；

(3) 用电压源 E_C 代换 C，用电流源 J_L 代换 L（电路此时变成一纯电阻网络）；

(4) 解出 i_C 和 u_L（用 i_L、u_C，电路参数和电源表示）；

(5) 代入 (2) 中的各式，即得待求的状态方程。利用此法可把问题简化为计算电阻网络的问题。

【例 1—4】 试求如图 1—5 所示振荡器电路的状态方程。

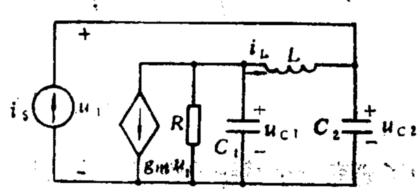


图 1—5 振荡器电路

解 按上述步骤解题。

(1) 选择所有的 i_L 和 u_C 为状态变量，即令

$$x=\begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \\ i_L \end{bmatrix} \tag{1.3—1}$$

(2) 写出 $\dot{u}_C=C^{-1}i_C$ 和 $\dot{i}_L=L^{-1}u_L$，即

$$\dot{u}_{C1}=\frac{1}{C_1}i_{C1} \tag{1.3—2}$$

$$\dot{u}_{C2}=\frac{1}{C_2}i_{C2} \tag{1.3—3}$$

$$\dot{i}_L=\frac{1}{L}u_L \tag{1.3—4}$$

(3) 用电压源代换 C，电流源代换 L 后得如图 1—6 所示的电路。

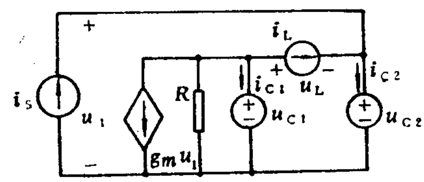


图 1—6 用电压源，电流源替换 C、L 后的电路

(4) 解 i_{C1}，i_{C2} 和 u_L 得

$$i_{C1}=-i_L-\frac{u_{C1}}{R}-g_m u_1 \tag{1.3—5}$$

$$i_{C2}=i_L+i_s \tag{1.3—6}$$

$$u_L=u_{C1}-u_{C2} \tag{1.3—7}$$

(5) 代入 (2) 中的式 (1.3—2)、式 (1.3—3) 和式 (1.3—4) 得

$$\dot{u}_{C1}=\frac{1}{C_1}\left(-i_L-\frac{u_{C1}}{R}-g_m u_{C2}\right) \tag{1.3—8}$$

$$\dot{u}_C=\frac{1}{C_2}(i_L+i_S) \tag{1.3—9}$$

$$\dot{i}_L=\frac{1}{L}(u_{C1}-u_{C2}) \tag{1.3—10}$$

故得如下状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{C1} \\ \dot{u}_{C2} \\ \dot{i}_L \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & -\frac{g_m}{C_1} & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \\ i_L \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_2} \\ 0 \end{bmatrix} i_S \tag{1.3—11}$$

§1—4 由系统模拟图求状态方程

为了研究一个系统的性能，我们常用若干部件的连接来模拟此系统，模拟是指从数学上来模拟，即系统模拟图与实际系统具有相同的方程式，而不是在具体细节上与实际系统完全