高等学校教学用書

解析幾何学教程

H. M. 别斯金著

高等教育出版社

高等学校教学用書

解析幾何学教程

П. М. 别斯金著
王自楷　高鈉蘭譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯國立技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的別斯金（Н. М. Бескин）著解析幾何教程（Курс аналитической геометрии）1948年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲高等工業學校的教本。

本書由蘭州大學王自楷、高鈉蘭翻譯。在翻譯過程中曾由趙繼遊教授加以協助。

解析幾何学教程

Н. М. 別斯金著

王自楷，高鈉蘭譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

商務印書館上海廠印刷·新華書店總經售

書號583(課502)　開本850×1168 1/32　印張16　插頁4　字數461,000

一九五六年四月上海第一版

一九五六年四月上海第一次印刷

印數1—5,000　（精裝）　定價(8)￥2.20

目　次

上篇　平面解析幾何學

緒　言

第一章　坐标法的簡單应用

第二章　函數

第三章 曲線的方程

第四章 直線

第五章 極坐标．曲線的分類

第六章 橢圓、双曲線和拋物線

第九章 函數的圖象

下篇 空間解析幾何學

緒 言

第十章 空間坐标

第十一章 向量代數基礎

第十二章　坐标變換

第十三章　方程在空間的几何意义

第十四章　平面和直線

第十五章 關於曲面的一些知識

序

在高等工業學校里解析几何學教程有其特殊的任务，不应該是大學教程的縮本。大學教程的特征是：它只限制在一次及二次形象。根据所採用的方法，大學的解析几何學是与無限小量分析和微分几何無關的代數几何的一部份。

高等工業學校解析几何學教程的編著者不应忽視下列兩种情況：

1．高等工業學校中通常只研究兩种數學的知識——解析几何學与數學分析。因此一般人認为工程師所必需的數學知識应当包含在这兩个教程中之一。例如，超越曲線的研究就是这样的。凡在研究時不利用分析的方法，但本身却为分析的預备知識者，則把它包含在解析几何學教程中較为恰当。

2．工程師不僅要研究实际物体外形的曲線，而且要研究那些描繪物体运動过程的象征曲線，就是圖象。所以在高等工業學校的解析几何學教程中应当反映出兩个观點——几何的（普通的）和分析的（圖象的研究）。有了这兩个观點就要求列出各种不同的被研究的曲線。因为在其几何性質方面最有意义的曲線倒不一定是哪些最重要的函數圖解。在圖象的研究中，有这么一部份曲線，將它們放在解析几何學里比放在分析中更为恰当些［參考‘圖象的仿射變換’（第九章 §2）］。

应当指出，作者的特殊观點反映在小号字中，而不涉及於某一些新方法的列举。本書作为高等工業學校的教本之用，所以大号字符合於現行的教學大綱。同時，講授者感到对於高等工業學校的解析几何學教程有改進的必要時，可將各部份的小号字加以利用。特别是我們建議不要省略自由度的概念，沒有这个概念，便不可能对解析几何學進行

有意識的研究。

小号字中包含着比較精細的部份和例子。

为了避免因插入輔助性的知識而打断解析几何學的敍述程序，先在‘緒言’中講解了这些輔助性的知識。为了教員自行支配在‘緒言’中所敍述的問題起見，解析几何學的學習可从第一章開始。

尼·別斯金

1947年4月15日莫斯科。

上篇　平面解析几何學

緒　言

§1. 射影理論

1. 有向線段　解析几何學与初等几何學的重要差別之一就是初等几何把線段看作本質的正量，而解析几何給線段加上正負号，也就是把線段看作相对的量。

在一条直線上有兩个相反的方向，我們用箭头表出其中的一个(不論那一个)，並且把它称为正；把相反的方向称为負。在圖1中从左到右是正方向，从右到左是負方向，有正方向和負方向區別的直線称为軸。

圖1. 軸。

为了要确定軸上的一个線段，必須要給出兩个點並指明那一个作为線段的起點，那一个作为線段的終點。線段用兩个字母表示，而且把線段的起點記在第一位，終點記在第二位。位於軸上的有起點和終點的線段称为有向線段。

有向線段以相对的數表示。这个數的絕对值是線段的長度；如果線段的方向(从起點到終點的方向当作線段的方向)和軸的方向[①]一致，在这个長度的前面記以正号；如果線段的方向和軸的方向相反，就記以負号。例如，在圖1上

$$AB=13\text{毫米}^{②},\quad BA=-13\text{毫米}。$$

① 为了簡便起見，只說'軸的方向'代替'軸的正方向'。

② 正号通常省略。

顯然成立

$$BA=-AB, \tag{1}$$

即当表示線段的兩个字母調換時，線段的符号就改變，而其絕对值仍然不變。

關於有向線段有下列公式成立：

$$AB+BC=AC, \tag{2}$$

即所謂沙尔公式[①]。这个公式对於初等几何學中所研究的不帶符号的線段，只有 B 點在 AC 之間時才是正确的，对於有向線段只要 A、B 和 C 三點在一个軸上，这个公式永远是正确的。例如，在圖 2 中間的圖，線段 AB 是負的，線段 BC 是正的，而它們的和等於 AC。

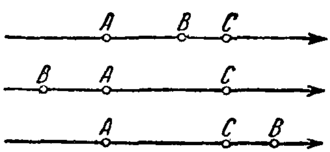

圖 2. $AB+BC=AC$。

我們以后要应用沙尔公式，記住公式的圖样，就不必每次去看圖。这个公式可以这样表述：任一有向線段 AB，可利用此線段上的任意一點 C，把它划分成为兩个線段的和。

現在研究若干个有向線段的和

$$AB+BC+CD+\cdots+KL+LM,$$

其中每一个線段的起點和前一个線段的終點重合。根据沙尔公式，首兩線段的和 $AB+BC$ 可用 AC 代替；然后 $AC+CD$ 的和可用 AD 代替，繼續下去，結果我們得到

$$AB+BC+CD+\cdots+KL+LM=AM。 \tag{3}$$

公式(3)称为沙尔的推廣公式，諸點 A、B、C、D、…、K、L、M 任意配置，只要它們在一个軸上，公式(3)總是正确的。

2. 向量 如果我們研究平面上(而不僅在一个軸上)的線段，那么这些線段有無窮多不同的方向(而不止兩个)，因而不可能用相对的數來表征它們。

① 米史里沙尔(1793—1880)——法國几何學家。

研究一些線段時，不僅注意其長度，同時又注意其方向，这种線段称为向量。向量与有向線段之間的差别在於有向線段只能在軸上研究，所以用相对的數表示。向量可以有無窮多的方向而且不要求在其所在的直線上預先規定正方向。如果我們研究一維的（僅僅在一个軸上的）几何學，有向線段和向量之間就沒有差别。

向量用兩个字母表示，其中第一个表示向量的起點，第二个表示終點；在这兩字母上画一横線代替'向量'二字。於是，記号 $\overline{AB}$ 表示起點为 A 終點为 B 的向量。在圖上，向量用箭头表示（圖 3）。因为向量的表征不僅用長度而且也用方向。所以描繪在圖 3 上的向量 AB 和 CD，虽然有同样的長度，絕不能認为是相等的[①]。

向量的長度，或者向量的模表示如：$|\overline{AB}|$；向量的長度是正量。注意，向量不能用數表示，因为數不能表示向量的長度和它的方向[②]。所以等式 $\overline{AB}=5$ 厘米是無意义；但是等式 $|\overline{AB}|=5$ 厘米是成立的。

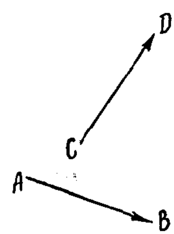

圖 3. 向量。

3. 軸之間的交角和向量之間的交角　兩条直線相交后形成四个角。确定兩条直線的交角時，我們取銳角或取鈍角都是可以的。兩个軸間的交角却是另外一回事。确定兩个軸的交角時，我們不僅要注意这兩个軸配置在那兩条直線上，而且还要注意到怎样建立这兩个軸的正方向。

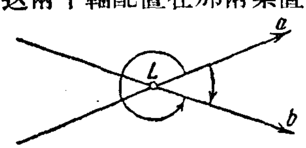

圖 4. 兩軸之間的交角。

設已知兩軸 a 和 b 相交於點 L（圖 4），第一个軸繞點 L 旋轉使它的正方向和第二軸的正方向重合所成的角度称为軸 a 和 b 之間的交角。这个角記作：(a, b)。从定义看出，兩个軸之間的交角

---

① 怎样的向量算作相等，讀者在第 154 款中可以知道。

② 我們說的是实數。在平面上用複數可以表示向量的長度和它的方向，所以在平面上用複數表示向量是可以的。

依靠於把那一軸当作第一个,那一軸当作第二个。

使軸 a 的正方向旋轉到和軸 b 的正方向重合，其方法不只一种。实际上,如果軸 a 已經被轉到了这样的角度,那么以后它还可以按順時針或逆時針的方向再轉若干轉，並且使它的正方向依然和軸 b 的正方向重合。於是，符号(a, b)不是一个值而是無窮多个值。如果用 α_0 表示軸 a 和 b 的交角的一个值,角(a, b)的所有的值就包含在公式

$$(a, b)=\alpha_0+360°\cdot n \tag{4}$$

中，n 是任意整數(正、負或零)。例如在圖 4 中可假定 $\alpha_0=-40°$ (反時針方向的角为正)。当 $n=1$ 時公式(4)得出 $(a, b)=320°$；这兩个角在圖上用弧表示。

虽然兩个軸間的交角 (a, b) 可以寫出無窮多的值，这个角的所有的三角函數却是完全确定的量，因为 $360°$ 为所有的三角函數的週期。例如,从公式(4)得到

$$\sin(a, b)=\sin(\alpha_0+360°\cdot n)=\sin\alpha_0。$$

以上我們确定了兩軸間的交角。類似地可以确定向量和軸間的交角。只須取定軸的正方向和向量的方向，向量的方向是从其起點到終點,就是箭头所指的方向。如果有必要的話,可以把向量延長直到和軸相交。向量 $\overline{AB}$ 和軸 l 的交角以$(\overline{AB}, l)$表示。

兩向量的交角用$(\overline{AB}, \overline{CD})$表示,可以類似地确定。軸的交角具有下列的性質:

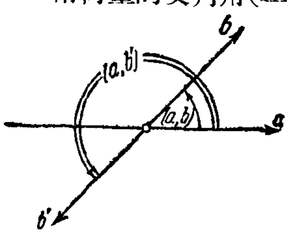

圖 5. $(a, b')=180°+(a, b)$。

1° 如果兩軸中的一个平行移動,兩軸的交角並不改變,当然,兩个軸也可以一同平行移動。

2° 如果改變兩軸之一的方向为相反的方向,那末兩軸的交角就增大 $180°$ [1]。

[1] 为了肯定,常常認定角增大 $180°$ 而不是減小 $180°$。实际上,如果 α_0 表示兩軸交角的一个值,且以 $\alpha_1=360°+\alpha_0$ 表示另一值,那末 $\alpha_0+180°=\alpha_1-180°$。

如果用 b' 表示与 b 位於同一直線上,但与 b 的方向相反的軸,那末

$$(a,\ b')=180^\circ+(a,\ b)。\qquad (5)$$

圖 5 説明了这公式。

3° 調换軸的順序時,角僅改變符号:

$$(b,\ a)=-(a,\ b)。\qquad (6)$$

註 1. 研究軸与軸的交角時,必須永远記住其交角有無窮多的值,彼此相差 360° 的整倍數。因此把任一公式当作單独的一項 (a,b),如果我們試作檢驗,在軸 a 和 b 之間的角任意选取某一值以代替 (a,b),便可証得它不正确。如果公式左右兩端相差 360° 的整倍數,我們便可完全認为它是正确的。換句話說:如果当(a,b)代換以此角的一个确定數值時公式正确,我們就認为它是正确的。例如,令 $(a,\ b)=200^\circ$。在这种情况下按公式(5)得到 $(a,b')=380^\circ$。同样可認为$(a,b')=380^\circ-360^\circ=20^\circ$。如果把 $(a,\ b)=200^\circ$,$(a,b')=20^\circ$ 代入公式(5),公式好像是不正确的,但左右兩端相差 360°。如果再把 $(a,\ b)=200^\circ$,$(a,b')=380^\circ$ 代入公式(5),那末左右兩端恰好相等。讀者用圖説明此例。

註 2. 以上所述兩軸間的交角的三个性質完全可適用於向量与軸間的交角以及兩向量間的交角。

4. 角的加法規則 設已知三个軸 a, b 和 c 通过一个點,繞这一个點旋轉軸 a 使其正方向与軸 b 的正方向重合。然后繞同一个點(从新的位置開始)再旋轉一次使其正方向与軸 c 的正方向重合。这兩次旋轉的和等於$(a,\ b)+(b,\ c)$。但因这兩次旋轉的結果,軸 a 的正方向和軸 c 的正方向重合,所以这个和等於$(a,\ c)$,卽:

$$(a,\ b)+(b,\ c)=(a,\ c)。\qquad (7)$$

公式(7)称为角的加法規則。

当这三个軸不通过同一點時,加法的規則仍是正确的,因为角的大小与这个情况無關[第 14 頁,性質 1°]。

我們可用以前沙尔的推廣公式的同一方法把公式(7)推廣到許多軸的情況,於是得到:

$$(a, b)+(b, c)+(c, d)+\cdots+(k, l)+(l, m)=(a, m)。\quad (8)$$

公式(8)称为加法的一般規則。

角的加法規則和有向線段的沙尔公式是類似的。但有一个差别,就是公式(7)和(8),不計及 $360°\cdot n$ 之差,是正确的[这須回憶第15頁註1中所說的意义]。

把这些軸換为向量時,公式(7)和(8)也可以適用。

5. 向量在軸上的射影　點 A 到軸 l 上的垂足称为點 A 在軸 l 上的射影(圖6)。

設已知軸 l 和向量 $\overline{AB}$。有向線段 $A'B'$ 称为向量 $\overline{AB}$ 在軸 l 上的射影,A' 是向量的起點在軸 l 上的射影,B' 是向量的終點在同一軸上的射影。射影用下列記号:

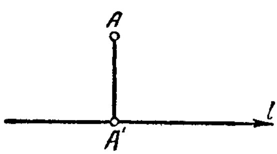

圖6. 點在軸上的射影。

$$A'B'=射影_l\,\overline{AB}。$$

在此定义中我們着重指出兩个極重要的關鍵。第一,向量在軸上的射影不是向量,而是有向線段或數①。第二,从向量起點的射影到向量終點的射影的線段称为向量的射影;如果从 A' 到 B' 的方向与軸的正方向一致,射影以正數表示,在相反的情況下射影是負的。

向量在軸上的射影依賴於(1)被投射的向量的長度,(2)这个向量与射影軸的交角。圖7上画出了向量關於軸的各种不同的配置情況。在四个圖上軸 l 和向量間的角用 $\alpha=(l, \overline{AB})$ 表示,由向量的起點引平行於軸的直線,这条直線与垂線 BB' 的交點用 C 表示。

於是有(对於四种情況):

$$AC=AB\cdot\cos\widehat{BAC}。\quad (*)$$

① 有時不在軸上研究而在直線上研究向量的射影,並且把这种射影当作向量。在本書中無論任何地方我們不研究向量在直線上的射影。