材料和结构的不稳定性

中国力学学会办公室
中国科学院力学研究所 LNM开放实验室 编

科学出版社

材料和结构的不稳定性

中 国 力 学 学 会 办 公 室
中国科学院
力学研究所 LNM 开放实验室

科 学 出 版 社

1993 · 北 京

(京) 新登字 092 号

内 容 简 介

本书根据 1991 年 8 月“材料和结构的不稳定性”研讨会上的报告编纂而成，共收集 16 篇综述文章，涉及非线性固体力学，特别是不稳定问题的前沿及发展方向. 文章深入浅出，对教学、科学研究和新产品设计，尤其是对青年力学家的成长会有一定的指导和参考意义.

材料和结构的不稳定性

中国力学学会办公室
中国科学院力学研究所 LNM 开放实验室 编

执行编辑 胡淑敏
责任编辑 朴玉芬

科学出版社 出 版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717

中国力学学会办公室微机排印小组 排版
北京大学印刷厂 印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

* * *

1993 年 10 月第 一 版 开本：787 × 1092 1/16
1993 年 10 月第一次印刷 印张：12 1/2
印数：1—1200 字数：270 000

ISBN 7-03-003703-0/O · 657

定价：15.00 元

前　言

近年来，非线性科学引起了全世界各个领域中的学者的注目,而其中从稳定平衡到不稳定性的系统的转变，即分叉现象尤其受到重视．固体力学做为力学学科和自然科学的一个分支，对于这一课题的研究，不仅历史悠久，而且在近代有其新的内容和特点．为了回顾、总结和展望这一领域的进展，中国力学学会和中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放实验室认为有必要组织一次学术讨论会．

1991 年 8 月 28 日到 30 日，在清华大学举行了材料和结构的不稳定性研讨会．会议成立的组织委员会安排先期的筹备工作，具体的组织工作由常务组委：中国科学院力学研究所朱兆祥教授、李国琛教授、清华大学余寿文教授、北京大学武际可教授四人负责．会议邀请了 16 位专家进行报告．来自全国各地的 70 余人出席了会议，并展开了讨论和交流．中国力学学会前任理事长和中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放实验室主任郑哲敏教授、中国力学学会现任理事长王仁教授、北京航空航天大学王俊奎教授到会并讲了话．

这本文集共收集了在会上发表的 16 篇邀请报告．它们概括了固体力学中不稳定性的一般理论及其在材料、结构和其它领域应用的研究进展．这些文章基本上反映了我国学者在这一领域的研究水平，而且也反映了当前国外学者近年的研究动向．对于有志进入这一研究领域的青年学者来说，它们可以做为入门的良好导引．对于在这一领域中多年从事研究的学者来说，它们无疑也具有参考价值．

本文集的出版受到国家自然科学基金委员会、中国力学学会、中国科学院力学研究所 LNM 开放实验室以及每一位撰稿人的热情支持和资助,在此一并致谢．

朱兆祥　武际可

材料和结构的不稳定性研讨会

(1991, 8 · 北京)

组织委员会

王　仁	白以龙	余寿文
余同希	朱兆祥	李国琛
武际可	郑哲敏	段祝平

常务委员

朱兆祥（主席）	余寿文（会务）
李国琛（程序）	武际可（编辑）

目　录

CONTENTS

材料和结构失稳现象研究的历史和现状
(会议开幕词)

朱兆祥
(中国科学院力学研究所，北京　100080)

一、研讨会的特点和目的

这个研讨会是由中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放实验室和中国力学学会联合主办的. 一年多之前就开始了筹备工作，当时的背景是国家自然科学基金委员会正在推动非线性科学的研究，一时在数学、物理、力学各界出现了一个讨论非线性科学的热潮. 两个主办单位决定在流体力学和固体力学两方面各办一个有关稳定性的讨论会. 固体力学方面，经邀集北京的十来位专家进行筹备，大家觉得举行一个带有战略决策性的研讨会非常必要，并且强调会议研讨的内容应该有两个特色：

(1) 材料和结构在外界条件的变化之下丧失稳定性，问题本质上是一个非线性问题，在失稳之后到整体失效之前材料或结构的承载能力的开发和储能潜力的发挥是当前工程界十分关心的事，因此会议应该强调的不是稳定性问题，而是不稳定性问题，即强调从失稳到失效的全过程的演变，强调非线性问题.

(2) 就材料和结构的不稳定性而言，结构屈曲和屈曲后的研究有较长久的历史和较成熟的理论基础，现在的问题是深入和扩大，例如跨越分叉点后的计算，二次或多次分叉及其深入演化，动态屈曲和塑性屈曲等. 而材料的不稳定性问题，诸如软化、相变、变形局部化、脆韧转变、裂纹起裂传播和分叉，空洞形成、扩大和联合等等问题. 目前是百家争鸣各显神通的时期，是否存在统一的理论基础、与微观结构的关联、以及近代非线性科学中诸如分形几何、逾渗理论、重整化群方法的深入应用等等，都是面临急待开发的问题，固体力学工作者十分必要对材料不稳性问题加以重点的关注.

按照以上两点认识，我们把会议的名称正式定为“材料和结构的不稳性”研讨会. 后来我们发现将于 1992 年在以色列举行的第 18 届国际理论和应用力学会议所定的重点议题之一也是材料和结构的不稳定性，这完全是一种巧合，说明这是国际力学界的一种共识.

参加筹备工作的专家们确定了研讨会的三个目的：

(1) 借“非线性科学”的热潮，推动固体力学中非线性问题的研究，特别是材料和结构不稳性问题的研究.

(2) 总结评述固体力学中不稳定性问题的研究进展，提出重点发展的方向. 希望在不久的将来，固体力学工作者能在扩大非线性科学武库中在普适性方法和原理方面作出自己的贡献.

(3) 培养和鼓励青年力学家进入非线性固体力学特别是不稳定性问题的研究阵地. 现在在固体力学的阵地上出现了明显的人才断层，三、四十岁的固体力学家特别缺少. 希望研讨会和讲演集能起到培养力学干部的作用.

二、我国古代文献的启示

结构的失稳即屈曲现象在我国有非常古老的历史记载. 长杆的屈曲最早在《周礼考工记》中就有记载. 《考工记》成于春秋末朝，据考证是齐国人所著，距今有 2500 年了. 这是一部工艺技术百科全书，记载了许多有价值的科学技术资料. 例如在 “弓人” 一章中记下了测量弓力的问题. 因为正文太简单，后来东汉时的郑玄 (127—200) 作了注解 [1], 说到： “假令弓力胜三石，引之中三尺. 弛其弦，以绳缓擐之，每加物一石，则张一尺. ” 这段话非常明确地表达了弹性体的变形和载荷成正比的弹性定律，比通常所说的虎克定律早提出 1500 年. 关于屈曲现象的记载是在《考工记》的 “庐人” 一章中 [2]:

“凡试庐事，置 (树) 而摇之，以 (视) 其 也. 灸 (拄) 诸墙， 以 其桡之均也. 横而摇之，以眡其劲也. ”

这里的 “庐” 是戈杆戟杆，就是长杆. 文章说到试验杆的时候，树起来摇摇，看它端部的蠕动 (蜎); 横着摇摇，看全杆的劲. 中间一句最重要，句中的 “灸” 是久字的古文，意思是拄. “桡” 字后来假借为 “挠”, 是弯曲和屈服的意思. 整句的意思是，在两墙之间试验长杆，使杆长略长于两墙间距，把长杆拄 (撑) 在两墙间，看杆的弯曲在全杆的分布是否均匀. 后来清代学者戴震 (1724—1777) 注解说 [3]:

“眡其桡之均，审察屈势也. 皆欲通体无胜负. 苟材有胜负，必自负处动析 ”.

这段注解说得很清楚. 意思是审察屈势是否均匀，就是审察杆材有无缺陷或薄弱环节 (即所谓 “负 ”), 避免应用时在薄弱处折断.

可见我国在距今 2500 年前就认识了长杆受轴向力作用时发生屈曲的现象，名之曰 “桡 ”, 而且应用屈曲现象来检验材料.

关于动态屈曲现象之一的参数共振现象的发现，至少在距今一千年前的唐末或五代后晋 (936—946) 期间 [4]. 现在国内许多博物馆中收藏的 “鱼洗 ” 或 “ 龙洗 ”, 多半是宋朝铸造的，可以演示参数共振现象的铜器. 这种铜器大小形状和脸盆相似，但在盆口有左右一对固定的铜环. 注水入盆，用双手往复搓动铜环，到一定频率时可以看到水面开始发生离面振荡，到后来愈振愈烈，水面驻波破裂，使水珠跳向空中，高度可以达到盆深两倍的地步. 水平方向的摩擦运动产生竖立方向的强烈振动，这是典型的参数共振动态失稳现象.

北宋的何薳在他的《春渚纪闻》中撰述了一段关于鱼洗的故事.

“余又记《虏廷杂记》所载，晋出帝既迁黄龙府. 虏主新立，召与相见,帝因以金盆、

鱼盆为献. ……鱼盆则一木素盆也，方圆二尺，中有木纹，成二鱼状，鳞鬣毕俱，长五寸许. 若贮水用，则双鱼隐然涌起，顷之，遂成真鱼覆水，则宛然木纹之鱼也. 至今句容人铸铜为洗，名双鱼者，用其遗制也. ”

文中没有记双手摩擦耳环的动作，却出现了真鱼现形的神话，这是传闻失真. 但所记为参数共振器则可无疑. 南宋王明清 (1136-?) 的《挥尘前录》中也有类似记载，似非同一来源，但都说到了是后晋少主被辽所俘后献出的宝物. 史载后晋少主出帝于 946 年被契丹虏至黄龙，晋亡. 次年，辽世宗即位. 就是文章中所说新立的“虏主”. 所以这段记载比较可信. 因此，至少可以说，唐末五代之间已经发现参数共振现象，而且在掌握此规律之后，已经可以复制成供玩赏和实用的器物.

西方发现参数共振较晚. 据 Rayleigh 的名著《声学理论》所载 [5],Faraday 在 1831 年发表了一个实验，他用弓弦摩擦水杯壁使水面发生振动. 这实验和鱼洗的功用如出一辙，但比中国的记载晚了 900 年.

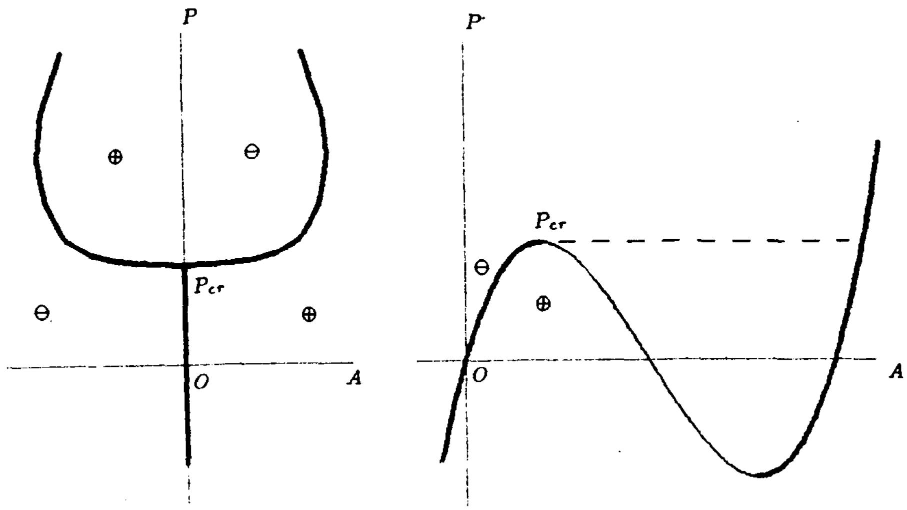
面对这两段历史文献，一静一动，记述了两种结构屈曲行为，我们都会慨叹古人的非凡智慧，惊异于他们的不可思议的思维方式. 从这里也看到我们的民族是重视技术和应用的，但不重视理论思考，喜欢综合思维而不喜欢分析思维. 也许这种传统的思考方式还对我们今天用近代科学方法研究材料和结构不稳定性问题时有遗留的影响.

三、里程碑和通向未来的道路

举世公认，在近代科学出现之后，弹性稳定理论是从 Euler 在 1774 年发表关于所谓“弹性曲线” (Elastica) 的研究 [6] 开始的. 这不但是弹性稳定问题的第一篇文章，也是弹性不稳定问题的第一篇文章，它从非线性的梁弯曲方程出发研究了直杆在轴力作用下屈曲和屈曲后变形的全过程. 在线性弹性理论建立之前，就揭示了非线性弹性力学问题解的非唯一性，这就是将近一个半世纪之后 Poincare 提出的所谓“分叉的平衡”问题. 因此，以分叉和浑纯为重要标志的现代非线性科学总是溯源到 Euler.

Euler 的解是一个解析解，这是非线性的弹性不稳定问题中仅有的解析解之一（另一个是圆板在径向均匀载荷作用下的屈曲后问题). 可能由于非线性问题的数学困难，自 Euler 之后的两个世纪中，固体力学界解决的大量的结构屈曲问题都是线性化了的弹性稳定问题，所用的稳定性准则常常使问题归结为使能量泛函为极值，或者是解决一个本征值问题. 直到 20 世纪 30 年代，人们发现圆柱壳临界载荷的实验结果和线性理论所预测的不符，才开始转向用非线性理论来讨论屈曲和屈曲后问题. 这期间冯卡门和钱学森发表了关于扁球壳和圆柱壳屈曲的非线性解法的系列论文 [7]. 钱学森先生在 50 年代返回祖国时曾告诉过我：“这些论文的观点是新的，但在概念和分析上都出了一些错. ”尽管如此，国际力学界迄今认为：在结构屈曲问题上的非线性分析是 Karman 和钱学森要所重新开辟的. 有了非线性分析，才开始有“屈曲后”和“不稳定”等新概念. Hutchinson 和 Bndiansky 还认为 [8] 用有限自由度的非线性简化模型来研究复杂结构中非线性几何因素和初始缺陷对屈曲行为的影响，这一方法也来自 Karman 和钱学森.

用现代分叉理论的语言来述说上述相隔两个世纪所研究的结构非线性失稳的形态，Euler 研究的是分叉点失稳，冯卡门 - 钱学森研究的是极值点失稳 (如图)，正是两种基本形态.



Euler (1744): 分叉点失稳　　　　Karman· 钱学森 (1939): 极值点失稳

P: 控制参量　A: 状态参量　P_{cr}: 临界点　粗线为稳定　细线为不稳定

荷兰的 Koiter 也在二次大战期间研究了屈曲后问题，建立了保守力作用下弹性结构稳定性的一般理论 [9]，解决了分叉点邻近的初始屈曲后模态和后继的平衡路径问题，也解决了结构初始缺陷对屈曲的影响. 这一重要结果直到 60 年代才在英语国家发表而为世人所知，引起轰动.

从 60 年代到 70 年代可能是固体力学中不稳性问题研究蓬勃发展的年代，力学本身、物理、数学，或者提出新概念新思想，或者发掘前辈学者思想加以弘扬创新，经过不断深入不断扩大，終至八十年代汇成非线性科学的大川，其中和材料及结构不稳定性紧密相关的可以举出几个要点：

(1)Poincare 的分叉理论 (1885)[10] 的发展，加深了对弹性稳定理论的认识 [11]，提供了屈曲后研究的分析和计算方法. 对于初始条件敏感的系统，多次分叉导致浑纯，这是就时间分布而言的. 在空间分布上则导致分形 (分维几何). 目前在固体力学中只对连续统结构的有限维简化非线性模型作过浑纯分析，数学的困难还未能处理无限维结构的动态屈曲中必然蕴含的浑纯现象. 分形方法有希望研究固体中裂纹、空洞、剪切带问题，目前还处于探索阶段. 分叉问题的核心是奇异点的性质的研究，目前国内还处于极少人问津的阶段.

(2)Lyapunov 的动力系统稳定性概念 (1892)[12] 开始被固体力学界所接受，应用于连续系统 [13]，使得动态屈曲问题的研究有很大的发展. 突加载荷系统，参数共振系统，非保守静力系统的许多实例得到了充分的研究. 动态失稳准则的复杂性被认识到了. 最重要的结果是开始用统一的观点来研究静态失稳和动态失稳问题 [14]，建立统一的理论，

建立统一的失稳准则成为共同关注的问题.

(3) 塑性屈曲问题可能是固体力学所独有的特异的问题，因为要区别弹性应变和塑性应变，区别加载过程和卸载过程，塑性材料又具有能量耗散性质，使得问题特别复杂. 50 年代末期 Hill 关于弹塑性体在有限变形下解的唯一性和稳定性的讨论[15]成为这方面的奠基性工作. 这里的原则不仅应用到结构塑性屈曲问题中，而且应用到软化、颈缩、剪切带形成和损伤影响等材料失稳有关的问题.

(4) 断裂力学和损伤力学的建立给固体力学稳定性研究提出了新问题. 裂纹的起裂、传播和分叉，空洞的萌生、扩大和联合，从本质上说属于稳定性问题，是否可以从这个角度建立断裂或损伤的新理论？

(5) 非平衡态的非线性热力学的建立. 可能为固体力学不稳定性问题开辟新的道路. 能量的观点向来是建立稳定性准则或不稳性准则的路径之一. 失稳过程是一种临界现象，或者说是一种转变过程、过渡过程、跃迁过程、弛豫过程，在过程中有能量存在形式的急剧转变. 在结构屈曲问题中主要只是力学能量形式的转变，而在材料失稳问题中还包括非力学能量形式的转变，诸如热能（耗散的能量）、物理或化学的能量转变. 在此时热力学的定律或方法将给我们指引. 经典热力学解释了复杂体系自发趋于平衡和趋于无序的一类规律，但自然界存在的另一类现象，如在非平衡条件下通过和外界环境间的能量交换而达到的宏观范围的时空有序，即所谓自组织现象，只有非平衡态非线性热力学才能解释. Prigogine 的耗散结构理论 (1971)[16] 开辟了道路，有希望在材料不稳定性问题中另辟溪径.

"材料和结构的不稳定性" 研讨会的组织者们曾经企图组织反映上述几个方面最新进展的较为全面的讲演，但是十分遗憾的是，这个任务未能全面完成. 尽管如此，从这次会议报名的踊跃程度来看，说明这些报告的内容还是颇受欢迎的. 这次会议把材料和结构不稳定性问题这两个看起来不相同的方面组织在一起是一次尝试. 我们希望通过这次会议，能吸引广大力学工作者特别是青年力学工作者，做出更深入的工作.

参 考 文 献

[1] 老亮. 我国古代早就有了关于力和变形成正比关系的记载. 力学与实践, 1987, 9：61-62

[2] 戴念祖. 中国力学史. 河北教育出版社, 1988:141-142

[3] 戴震. 考工记图. 商务印书馆, 1955: 96

[4] 戴念祖. 中国力学史. 河北教育出版社, 1988:567-572

[5] Rayleigh B. Theory of sound. 1894: 182

[6] Euler L. Methodus invenivendi lineas curves maximi mininive proprietate gaudentes. Appemdix:De curvis clasticis, 1744. 英译见 1933, Isis 20 (58):1

[7] Karman TV, Tsien HS. Buckling of spherical shells by exfernal pressure. *J. Aero. Sci.*, 1939, 7:43-50

Karman TV. Dunn LG, Tsien HS. The influence of curvature on the buakling characteristic of structures. *J. Aero. Sci.*, 1940, 7:276-289

Karman TV, Tsien HS. The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. *J. Aero. Sci.*, 1941, 8

Tsien HS. A theory for the buckling of thin shells. *J. Aero. Sci.*, 1941, 8

[8] Hutchinson J, Budiansky B. Dynamic buckling estimates. *AIAA J.*, 1966, 4: 525–530

[9] Koiter WT. On the stability of elastic equilibrium. 1945 (英译本见 AD–704124)

[10] Poincaré H. Sur léquilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. *Acta Math.*, 1885, 7:259–380

[11] Thompson JMT, Hunt GW. General theory of elastic stability. 1973

[12] Lyapunov AM. Probléme général de la stabilité du mouvement. 1892

[13] Bolotin VV. Dynamic stability of elastic systems. 1956
Lyapunov, Nonconservative Problems of the Theory of Elasticity. 1961

[14] ZIegler H. Principles of structural stability., 1968

[15] Hill R. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids.*, 1958, 6:236–249

[16] Glansdorff P, Prigogine I. Themodynamic theory of structure. Stability and Flucturations, 1971

有限变形弹塑性问题中解的唯一性和稳定性[1)]

黄 筑 平

(北京大学力学系，北京 100871)

提要 本文仅限于对有限变形弹塑性问题中解的唯一性和稳定性的 Hill 理论进行系统的讨论，并就其中某些关键性问题提出作者自已的观点.

关键词 弹塑性理论，唯一性，稳定性

一、引 言

经历了自 Engesser, Jasinski 和 Kármán 等人对弹塑性压杆临界载荷的计算到 Shanley 模型的提出这半个多世纪的漫长过程之后，弹塑性结构的稳定性问题一直是固体力学中一个十分活跃的研究领域. 其中，Hill 曾在这方面作出了重要贡献[1-5]. 他的关于弹塑性问题中解的唯一性和稳定性的充分条件的讨论已成为这一领域中的奠基性工作. 为此，本文将对 Hill 的工作进行较为详细的介绍，并对其中某些要点作出必要的说明. 可以相信，当对 Hill 的工作有了较为深入的了解之后再去阅读有关弹塑性结构中分叉与稳定性的那些专门性问题以及具体解法的文献时，将会是很方便的.

二、守恒定律以及相应的基本关系式

现设想原来具有体积 τ_0 和表面积 S_0 的物体在三维欧氏空间中对应于初始构形 B_0. 经过变形后其体积和表面积分别为 τ 和 S, 而相应的构形为 B. 利用质量守恒定律，可将动量守恒定律写为

$$\int_\tau \rho\, \boldsymbol{a} d\tau = \int_\tau \rho\, \boldsymbol{b} d\tau + \int_S \sigma \cdot \boldsymbol{N} dS \tag{1}$$

其中 ρ 为当前构形中的密度，$\boldsymbol{b}$ 为体力，$\boldsymbol{a}$ 为质点的加速度，σ 为 Cauchy 应力 (利用动量矩守恒定律后可知它是对称的二阶张量), $\boldsymbol{N}$ 为当前构形 B 中表面 S 的单位外法向量. (1) 式还可在初始构形中等价地写为

$$\int_{\tau_0} \rho_0 \boldsymbol{a} d\tau_0 = \int_{\tau_0} \rho_0 \boldsymbol{b} d\tau_0 + \int_{S_0} \mathrm{S} \cdot {}_0\boldsymbol{N} dS_0 \tag{2}$$

1) 国家自然科学基金资助课题.

上式中 ρ_0 为初始构形中的密度， $\mathbf{F}$ 为变形梯度张量， $g=\det\mathbf{F}$,

$$\mathbf{S}=g\sigma\cdot\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \tag{3}$$

通常称为第一 Piola-Kirchhoff 应力 (有的文献称上式的转置为第一 Piola-Kirchhoff 应力)，而 ${}_o\boldsymbol{N}$ 为初始构形中表面 S_0 上的单位处法向量．对 (2) 式求物质导数，则有

$$\int_{\tau_0}\rho_0\,\dot{\boldsymbol{a}}d\tau_0=\int_{\tau_0}\rho_0\,\dot{\boldsymbol{b}}d\tau_0+\int_{S_0}\dot{\mathbf{S}}\cdot\ {}_o\boldsymbol{N}dS_0 \tag{4}$$

上式中

$$\dot{\mathbf{S}}=g\dot{\sigma}\cdot\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \tag{5}$$

$$\dot{\sigma}=\dot{\sigma}+\sigma\mathrm{div}\boldsymbol{v}-\sigma\cdot\Gamma^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

$\boldsymbol{v}$ 为质点的速度，速度梯度可写为

$$\Gamma=\boldsymbol{v}\nabla=\dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{F}^{-1}$$

其中算子 ∇ 是定义在当前构形上的．再对 (4) 式利用散度定理，便得到对应于初始构形的率型运动方程

$$\rho_0\dot{\boldsymbol{a}}=\rho_0\dot{\boldsymbol{b}}+\dot{\mathbf{S}}\cdot\nabla_0 \tag{7}$$

其中算子 ∇_0 是定义在初始构形上的．显然，在当前构形中， (7) 式应改为

$$\rho\,\dot{\boldsymbol{a}}=\rho\,\dot{\boldsymbol{b}}+\dot{\sigma}\dot{\nabla} \tag{8}$$

以下我们仅限于对准静态过程的讨论，故可令物体中质点的加速度恒为零 ($\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{a}}=0$)，而真实的时间可用与其成单调递增关系的任意参数代替．这时 (7) 式将退化为

$$\dot{\mathbf{S}}\cdot\nabla_0+\rho_0\dot{\boldsymbol{b}}=0 \tag{9}$$

对于一个弹塑性力学的边值问题来说，相应的体力、应力边界 S_{0T} 上的面力和位移边界 S_{0u} 上的位移 (以及它们的变化率) 是要事先给定的．然而，在有限变形弹塑性理论中，物体当前时刻的构形是在不断变化的．因此，如何对 "给定体力和应力边界上的面力" 予以正确的描述就显得十分重要了．相应于初始构形的描述，其体力率和面力率可假定具有以下的形式，对相当广泛的一类载荷它们都是适用的：

$$\rho_0\dot{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2(\boldsymbol{v}),\qquad(\tau_0\ \ 内) \tag{10}$$

$${}_o\dot{\boldsymbol{t}}=\dot{\boldsymbol{S}}\cdot\ {}_o\boldsymbol{N}=\boldsymbol{t}_1+\boldsymbol{t}_2(\boldsymbol{v})+\boldsymbol{t}_3(\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}})\cdot\boldsymbol{N},\quad(S_{0T}\ \ 上) \tag{11}$$

而在位移边界上有

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1\qquad(S_{0u}\ \ 上) \tag{12}$$

上式中 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 和 $\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3$ 可以是当前时刻物体中质点的位置，变形梯度以及应力状态的已知函数，但 $\boldsymbol{b}_2$ 和 $\boldsymbol{t}_2$ 还线性地依赖于速度 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{t}_3$ 还线性地依赖于速度梯度 Γ(当然，

由于 $\boldsymbol{v}$ 和 Γ 仍是待求的量，故 (10) 式和 (11) 式的左端并不是完全确定的). 另外，不难看出 (11) 式的左端还可表示为

$$ {}_o\dot{\boldsymbol{t}} = \left(\frac{dS}{dS_0}\right)\sigma\cdot\boldsymbol{N} \tag{13}$$

其中 $\quad \dfrac{dS}{dS_0} = g(\ {}_o\boldsymbol{N}\cdot\mathrm{F}^{-1}\cdot\mathrm{F}^{-\mathrm{T}}\cdot\ {}_o\boldsymbol{N})^{1/2}$

特别地，在静水压力 P 的作用下，由 (13) 式或由

$$ {}_o\boldsymbol{t} = \mathrm{S}\cdot\ {}_o\boldsymbol{N} = \left(\frac{dS}{dS_0}\right)\sigma\cdot\boldsymbol{N} = -\left(\frac{dS}{dS_0}\right)\rho\boldsymbol{N}$$

以及 $\quad \dot{\boldsymbol{N}} = (\boldsymbol{N}\cdot\mathrm{D}\cdot\boldsymbol{N})\boldsymbol{N} - \Gamma^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{N}$

和 $\quad \dot{\overline{dS}} = (\mathrm{div}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{N}\cdot\mathrm{D}\cdot\boldsymbol{N})dS$

可知

$$ {}_o\dot{\boldsymbol{t}} = -\left(\frac{dS}{dS_0}\right)\left[\dot{P}\boldsymbol{N} + P(\mathrm{div}\boldsymbol{v})\boldsymbol{N} - P\Gamma^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{N}\right] \tag{14}$$

这说明上式具有 (11) 式所假定的那种形式 (在 (14) 式的推导中符号 $\mathrm{D} = \dfrac{1}{2}(\Gamma + \Gamma^{\mathrm{T}})$ 为变形率).

现假定当前时刻物体中各质点的位置、变形梯度以及应力分布已经求出. 要考察当这一时刻所给定的体力率、面力率和位移边界上的速度分布具有 (10)—(12) 式的形式时，物体中各质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 和应力率 $\dot{\mathrm{S}}$ 是否会有两组不同的值. 如设这时存在两组不同的解：$\boldsymbol{v}^{(1)}, \dot{\mathrm{S}}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{v}^{(2)}, \dot{\mathrm{S}}^{(2)}$, 并记

$$\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{(2)} - \boldsymbol{v}^{(1)}, \qquad \Delta\dot{\mathrm{S}} = \dot{\mathrm{S}}^{(2)} - \dot{\mathrm{S}}^{(1)} \tag{15}$$

则可计算以下的积分

$$\begin{aligned}\int_{S_0}\Delta\boldsymbol{v}\cdot\Delta\ {}_o\dot{\boldsymbol{t}}dS_0 &= \int_{\tau_0}(\Delta\boldsymbol{v}\cdot\Delta\dot{\mathrm{S}})\cdot\nabla_0 d\tau_0 \\ &= \int_{\tau_0} g(\Delta\Gamma:\Delta\boldsymbol{\sigma})d\tau_0 - \int_{\tau_0}\rho_0\Delta\boldsymbol{v}\cdot\Delta\dot{\boldsymbol{b}}d\tau_0\end{aligned} \tag{16}$$

由于在 S_{0u} 上 $\Delta\boldsymbol{v} = 0$, 故 (16) 式的积分还可写为

$$\int_{S_{0T}}\Delta\boldsymbol{v}\cdot[\boldsymbol{t}_2(\Delta\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{t}_3\cdot(\Delta\Gamma^{\mathrm{T}})\cdot\boldsymbol{N}]dS_0 \tag{17}$$

注意到 $P_0\Delta\dot{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b}_2(\Delta\boldsymbol{v})$, 因此有

$$\begin{aligned} I \equiv &\int_{\tau_0} g(\Delta\Gamma:\Delta\boldsymbol{\sigma})d\tau_0 - \int_{\tau_0}\Delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b}_2(\Delta\boldsymbol{v})d\tau_0 \\ &- \int_{S_{0T}}\Delta\boldsymbol{v}\cdot[\boldsymbol{t}_2(\Delta\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{t}_3\cdot(\Delta\Gamma^{\mathrm{T}})\cdot\boldsymbol{N}]dS_0 = 0\end{aligned} \tag{18}$$

以上积分是在初始构形上进行的，但其中的 $\boldsymbol{N}$ 则是当前构形中物体表面的单位外法向量 (当然，这里已假定 $\boldsymbol{N}$ 是已知的).

需要说明，以上讨论并未涉及到材料的本构关系，故表达式 (18) 式可应用于具有任何材料性质的结构之中. 一旦给出了材料的率型本构方程，则 σ 可通过 $\boldsymbol{v}\nabla$ 表示出来，这时的 I 将是关于 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的泛函. 显然，对于一切可能的 $\Delta\boldsymbol{v}$, 如果恒有

$$I > 0 \tag{19}$$

那么以上边值问题的解将一定是唯一的 (即不可能出现分叉).

三、本构方程

为简单计，这里我们仅考虑等温过程中率无关材料的本构方程. 假定在应变空间中加载面

$$g(\mathbf{E}, \xi_\beta) = 0 \tag{20}$$

是存在的. 上式中 $\mathbf{E}$ 为 Hill 所定义的 Lagrangian 型应变度量， $\xi_\beta(\beta = 1, 2, \cdots)$ 为一组内变量. 另外，我们还假定广义 **Ильющин** 公设成立. 这时，相应的率型本构方程可写为

$$\dot{\mathbf{T}} = \left[\mathbf{L} - \left(\frac{\alpha}{H+h}\right)\frac{\partial g}{\partial \mathbf{E}} \otimes \frac{\partial g}{\partial \mathbf{E}}\right] : \dot{\mathbf{E}} \tag{21}$$

上式中 $\mathbf{T}$ 为与 $\mathbf{E}$ 相功共轭的应力， $\mathbf{L}$ 为具有正定对称性质的四阶弹性张量. 如记 $\mathbf{L}$ 的逆为 $\mathbf{M}$, 则上式中的 H 可表为

$$H = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{E}} : \mathbf{M} : \frac{\partial g}{\partial \mathbf{E}}$$

而 h 为表征材料强化特性的参数， α 为加卸载指数，

$$\alpha = \begin{cases} 1, \text{当 } g = 0 \text{ 且 } \dfrac{\partial g}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} > 0 \\ 0, \text{其他情形} \end{cases} \tag{22}$$

需要强调的是， (21) 式中 $\mathbf{E}$ 所对应的参考构形并不一定要求是初始构形. 它可以是任何一个固定的构形. 而应变度量的选取也可以有无穷多种. 当改变参考构形和 (或) 应变度量时，本构方程中的参量 (例如 $\mathbf{L}$, $\dfrac{\partial g}{\partial \mathbf{E}}, \cdots$) 也应作相应的改变. 例如，对于 Green 应变，其功共轭的应力为第二 Piola-Kirchhoff 应力. 如果将初始构形 B_0 到某一构形 B' 的变换张量记为 $\mathbf{A}$, 那么，以 B' 作为参考构形的应变度量就可写为

$$\mathbf{E}' = \mathbf{A}^{-\mathrm{T}} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}^{-1} + \frac{1}{2}(\mathbf{A}^{-\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{I}) \tag{23}$$

上式中 $\mathbf{I}$ 为单位张量. 对应于 $\mathbf{E}'$ 的本构方程中的各个参量可通过对 (21) 式作相应的变换求得. 其中需要用到的四阶张量为

$$\mathcal{A}_{AB}^{\cdot\cdot MN} = \frac{\partial E'_{AB}}{\partial E_{MN}} = \frac{1}{2}(A^{-1M}_{\cdot A} A^{-1N}_{\cdot B} + A^{-1N}_{\cdot A} A^{-1M}_{\cdot B})$$