

1996年修订本

高等

数学学习题集

同济大学应用数学系

高等教育出版社

高等学校教学参考书

高等数学学习题集

(1996年修订本)

同济大学应用数学系 编

高等教育出版社

(京) 112号

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学习题集/同济大学应用数学系编. —3版 (修订本). —北京: 高等教育出版社, 1998
ISBN 7-04-006400-6

I. 高… II. 同… III. 高等数学-高等教育-习题 N. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 02842 号

*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码: 100009 传真: 64014048 电话: 64054588

新华书店总店北京发行所发行

北京朝阳北苑印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 13.125 字数 330 000

1959 年 10 月第 1 版

1998 年 6 月第 3 版 1998 年 6 月第 1 次印刷

印数 0 001—30 192

定价 12.70 元

凡购买高等教育出版社的图书, 如有缺页、倒页、脱页等质量问题者, 请与当地图书销售部门联系调换

版权所有, 不得翻印

前 言

同济大学数学教研室编写的《高等数学习题集》第一、二版相继于1959年、1965年由高等教育出版社出版以来，它作为一本高校工科高等数学的辅助教材，在我国工科高等数学教学中起到了一定的作用。几十年来，随着我国高等教育事业的发展，高等数学的教学内容和要求发生了不少变化，工科高等数学教材也已多次更新，为了能与这一情形相适应，对这本习题集进行修订已显得十分必要了。在教学中我们也积累了一批好的习题，为修订习题集准备了良好的题源条件。

这个修订本是参照国家教委审订的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》，基本上按照同济大学数学教研室主编的《高等数学》第四版的章节顺序编写的，可以与该教材配合使用。其中各节的习题分成(A)、(B)、(C)三个层次：(A)类题(约占43%)为基本题；(B)类题(约占47%)具有一定的难度，这两类题都符合教学基本要求，适合于高校学习工科高等数学的大多数专业；(C)类题(约占10%)是较难的，有的已超出教学基本要求，适合于对高等数学课程具有较高要求的专业。凡《高等数学》第四版中标有“*”号的内容，本书中相应的习题也标有“*”号(有的在节的标题前标出了“*”号，该节的每个习题就不再标明“*”号)。在这个修订本中，原习题集的习题约占30%，70%左右的习题是新编的，它们与《高等数学》第四版中的习题基本上不重复。我们希望这个修订本能更好地适合当前工科高等数学教学的需要。

这个修订本仍由西安交通大学陆庆乐教授审稿，他认真审阅了原稿，并提出了不少改进意见，对此我们表示衷心感谢。

由于编者水平所限，书中难免会有不妥之处，我们诚挚地欢迎同行们及广大使用者批评指正。

编 者
1996年8月

目 录

第一章	函数与极限	(1)
	一、函数	(1)
	二、初等函数	(5)
	三、数列的极限	(10)
	四、函数的极限	(11)
	五、无穷小与无穷大	(12)
	六、极限运算法则	(13)
	七、极限存在准则 两个重要极限	(16)
	八、无穷小的比较	(19)
	九、函数的连续性与间断点	(21)
	十、连续函数的运算与初等函数的连续性	(24)
	十一、闭区间上连续函数的性质	(27)
第二章	导数与微分	(29)
	一、导数的概念	(29)
	二、函数的和、差、积、商的求导法则	(32)
	三、反函数的导数 复合函数的求导法则	(34)
	四、初等函数的导数	(37)
	五、高阶导数	(39)
	六、隐函数的导数 由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率	(42)
	七、函数的微分及其应用	(46)
	八、杂题	(49)
第三章	中值定理与导数的应用	(53)
	一、中值定理	(53)
	二、洛必达法则	(56)
	三、泰勒公式	(58)

	四、函数单调性的判定法	(61)
	五、函数的极值及其求法	(63)
	六、最大值、最小值问题	(65)
	七、曲线的凹凸与拐点	(69)
	八、函数图形的描绘	(70)
	九、曲率	(71)
	十、方程的近似解	(72)
	十一、杂题	(73)
第四章	不定积分	(77)
	一、不定积分的概念与性质	(77)
	二、换元积分法	(78)
	三、分部积分法	(80)
	四、有理函数的积分	(82)
	五、三角函数有理式的积分	(83)
	六、简单无理函数的积分	(84)
	七、杂题	(86)
第五章	定积分	(90)
	一、定积分概念	(90)
	二、定积分的性质 中值定理	(90)
	三、微积分基本公式	(93)
	四、定积分的换元法	(99)
	五、定积分的分部积分法	(103)
	六、定积分的近似计算	(104)
	七、广义积分	(105)
	八、广义积分的审敛法	(108)
第六章	定积分的应用	(110)
	一、平面图形的面积	(110)
	二、体积	(114)
	三、平面曲线的弧长	(117)
	四、功 水压力和引力	(118)
第七章	空间解析几何与向量代数	(122)

	一、空间直角坐标系	(122)
	二、向量及其加减法 向量与数的乘法	(122)
	三、向量的坐标	(125)
	四、数量积 向量积 混合积	(126)
	五、曲面及其方程	(131)
	六、空间曲线及其方程	(132)
	七、平面及其方程	(134)
	八、空间直线及其方程	(137)
	九、二次曲面	(144)
第八章	多元函数微分法及其应用	(149)
	一、多元函数的基本概念	(149)
	二、偏导数	(152)
	三、全微分及其应用	(154)
	四、多元复合函数的求导法则	(156)
	五、隐函数的求导法	(159)
	六、微分法在几何上的应用	(162)
	七、方向导数与梯度	(164)
	八、多元函数的极值及其求法	(166)
	九、二元函数的泰勒公式	(167)
	十、最小二乘法	(168)
	十一、杂题	(168)
第九章	重积分	(173)
	一、二重积分的概念与性质	(173)
	二、二重积分的计算法	(175)
	三、二重积分的应用	(181)
	四、三重积分	(185)
	五、含参变量的积分	(191)
第十章	曲线积分与曲面积分	(192)
	一、对弧长的曲线积分	(192)
	二、对坐标的曲线积分	(194)
	三、格林公式	(199)

四、对面积的曲面积分	(204)
五、对坐标的曲面积分	(206)
六、高斯公式 通量与散度	(209)
七、斯托克斯公式 环流量与旋度	(212)
第十一章 无穷级数	(216)
一、常数项级数的概念和性质	(216)
二、常数项级数的审敛法	(218)
三、幂级数	(223)
四、函数展开成幂级数	(225)
五、函数的幂级数展开式的应用	(228)
六、函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的 基本性质	(229)
七、傅里叶级数	(231)
八、正弦级数和余弦级数	(233)
九、周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数	(234)
十、傅里叶级数的复数形式	(235)
第十二章 微分方程	(236)
一、微分方程的基本概念	(236)
二、可分离变量的微分方程	(237)
三、齐次方程	(239)
四、一阶线性微分方程	(241)
五、全微分方程	(243)
六、欧拉-柯西近似法	(244)
七、可降阶的高阶微分方程	(245)
八、高阶线性微分方程	(246)
九、高阶常系数线性微分方程及常系数线性微分 方程组	(248)
十、微分方程的幂级数解法	(251)
十一、杂题	(251)
答案与提示	(257)
第一章	(257)

第二章	(269)
第三章	(281)
第四章	(292)
第五章	(306)
第六章	(314)
第七章	(317)
第八章	(328)
第九章	(340)
第十章	(348)
第十一章	(354)
第十二章	(366)
附录	(377)
I. 希腊字母	(377)
II. 代数	(377)
III. 三角	(379)
IV. 初等几何	(382)
V. 导数和微分	(383)
VI. 不定积分	(385)
VII. 初等函数的幂级数展开式	(400)
VIII. 几种常用的曲线	(403)

第一章 函数与极限

一、函 数

(A)

1.1.1. 设函数 $\varphi(t) = t^3 + 1$, 求 $\varphi(t^2)$, $[\varphi(t)]^2$.

1.1.2. 设函数 $f(x) = \frac{1}{x}$, 求 $f(x + \Delta x) - f(x)$.

1.1.3. 若函数 $\psi(x) = \ln x$, 证明:

$$\psi(x) + \psi(x+1) = \psi[x(x+1)].$$

1.1.4. 若函数 $F(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$), 证明:

(1) $F(-x) \cdot F(x) - 1 = 0$; (2) $F(x) \cdot F(y) = F(x+y)$.

1.1.5. 若函数 $\varphi(\theta) = \tan \theta$, 证明:

$$\varphi(a+b) = \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{1 - \varphi(a)\varphi(b)}.$$

1.1.6. 设函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 < x < 0; \\ 2, & 0 \leq x < 1; \\ x-1, & 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

求 $\varphi(3)$, $\varphi(2)$, $\varphi(0)$, $\varphi(0.5)$, $\varphi(-0.5)$.

1.1.7. 已知函数 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ($x > 0$), 求 $f(x)$.

1.1.8. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \sqrt{x^2 - 1}; \quad (2) y = \frac{1}{x} - \sqrt{1 - x^2};$$

$$(3) y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}; \quad (4) y = \sqrt{x^2 - 4x + 3};$$

$$(5) \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x < 0; \\ x, & 0 < x < 1; \\ 2, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

1.1.9. 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否表示同一函数? 为什么?

$$(1) f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}, \quad g(x) = \frac{1}{1+x};$$

$$(2) f(x) = \sqrt{x^2}, \quad g(x) = (\sqrt{x})^2;$$

$$(3) f(x) = \sqrt{(1-x^2)^2}, \quad g(x) = 1-x^2;$$

$$(4) f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}, \quad g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}};$$

$$(5) f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x^4}.$$

1.1.10. 画出下列各函数的图形:

$$(1) y = x^2 + cx + 1, \text{ 当 } c = -2, c = 0, c = 2 \text{ 时};$$

$$(2) y = |x^2 - 1|.$$

1.1.11. 已知函数 $f(x)$ 以 2 为周期, 且在 $(-1, 1]$ 上

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x < 0; \\ 0, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

试画出函数 $y = f(x) (-\infty < x < +\infty)$ 的图形.

1.1.12. 证明函数 $f(x) = x^3 + x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的.

1.1.13. 指出下列函数中哪些是奇函数, 哪些是偶函数, 哪些是非奇非偶函数:

$$(1) y = x^4 - 2x^2; \quad (2) y = x - x^2;$$

$$(3) y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}; \quad (4) y = \operatorname{sgn} x.$$

1.1.14. 设 $f(x)$ 是偶函数, 指出下列函数的奇偶性:

$$(1) xf(x); \quad (2) (x^2 + 1)f(x);$$

$$(3) x^3 + f(x); \quad (4) x^4 - f(x).$$

1.1.15. 设函数 $f(x) = x - [x]$.

(1) 试问 $f(x)$ 是否为周期函数? (2) 作出函数 $y = f(x)$ 的图形.

1.1.16. 求下列函数的反函数:

$$(1) y = \sqrt[3]{x^2 + 1}; \quad (2) y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \quad (|x| \geq 1).$$

(B)

1.1.17. 用数学归纳法证明下列等式或不等式(其中 $n \in \mathbb{N}_+$)^①:

$$(1) 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$(2) 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4};$$

$$(3) \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

1.1.18. 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是符号相同且大于 -1 的数. 证明伯努利(Bernoulli)不等式:

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 1+a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

1.1.19. 设 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n > 1, x > -1$. 证明:

$$(1+x)^n \geq 1+nx,$$

当且仅当 $x=0$ 时, 等号成立.

1.1.20. 证明: 函数 $y = \frac{x^2+1}{x^4+1}$ 在它的定义域内有界.

1.1.21. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 而集合 $A \subset D, B \subset D$. 证明:

$$(1) f(A \cup B) = f(A) \cup f(B); \quad (2) f(A \cap B) \subset f(A) \cap$$

^① 国家标准规定: 自然数集 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. 除 0 的自然数集, 上标星号 \mathbb{N}^* 或下标 + 号 \mathbb{N}_+ .

$f(B)$, 其中 $f(A)$ 表示集合 $\{f(x) | x \in A\}$, $f(B)$ 表示集合 $\{f(x) | x \in B\}$.

1.1.22. 设函数 $f(x) = x + 1$, 函数 $g(x) = x - 2$, 试解方程:

$$|f(x) + g(x)| = |f(x)| + |g(x)|.$$

1.1.23. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且对任意实数 x, y , 有 $f(x) \neq 0$, $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$. 求 $f(1996)$.

1.1.24. 设函数 $z = x + y + f(x - y)$, 当 $y = 0$ 时, $z = x^2$. 求 $f(x)$ 及 z .

1.1.25. 设函数 $f(x)$ 的定义域和值域均为 $[0, +\infty)$. 令 $f_1(x) = f(x)$, $f_{n+1}(x) = f[f_n(x)]$ ($n = 1, 2, \dots$). 已知 $f_{n+1}(x) = [f_n(x)]^2$ ($n = 1, 2, \dots$), 求 $f(x)$ 及 $f_n(x)$.

1.1.26. 若函数 $f(x)$ 对于其定义域内的一切 x 恒有 $f(x) = f(2a - x)$, 则称函数 $f(x)$ 对称于 $x = a$. 证明: 如果函数 $f(x)$ 对称于 $x = a$ 及 $x = b$ ($b > a$), 则 $f(x)$ 必定是周期函数.

(C)

1.1.27. 设 a_k, b_k ($k = 1, 2, \dots, n$) 均为实数. 证明:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

1.1.28. 设 $a_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$). 证明:

$$(1) \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n};$$

$$(2) \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

1.1.29. 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有定义, $a > 0, b > 0$. 证明:

(1) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少, 则

$$f(a+b) \leq f(a) + f(b);$$

(2) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加, 则

$$f(a+b) \geq f(a) + f(b).$$

1.1.30. 设 $a > 0, b > 0$, 利用上一题结论证明:

(1) 当 $0 < p < 1$ 时, 有 $(a+b)^p \leq a^p + b^p$;

(2) 当 $p > 1$ 时, 有 $(a+b)^p \geq a^p + b^p$.

1.1.31. 证明: $f(x) = \frac{x}{1+x}$ 在 $(-\infty, -1)$ 及 $(-1, +\infty)$ 内均为单调增加函数. 并由此证明对任意实数 a, b , 有

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

1.1.32. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 且满足

$$af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x},$$

其中 a, b, c 均为常数, $|a| \neq |b|$. 证明 $f(x)$ 为奇函数.

二、初等函数

(A)

1.2.1. 求下列各函数的定义域:

(1) $y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}$; (2) $y = \log_2(\log_2 x)$;

(3) $y = \sqrt{16-x^2} + \sqrt{\sin x}$; (4) $y = \cot \sqrt{x}$ ①;

(5) $y = \arcsin(3^x + 2)$; (6) $y = \ln(\sin x)$.

1.2.2. 验证下列各函数在区间 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的:

(1) $y = 2^{x-1}$; (2) $y = x + \ln x$.

1.2.3. 指出下列函数中哪些是奇函数, 哪些是偶函数, 哪些

① 正切函数符号为 \tan , 余切函数符号为 \cot .

是非奇非偶函数(其中 $a > 1$):

(1) $y = 2^x$; (2) $y = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$;

(3) $y = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$; (4) $y = x \cdot \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$.

1.2.4. 下列函数中哪些是周期函数? 对于周期函数指出其周期:

(1) $y = \sin(x^2)$; (2) $y = \sin \frac{1}{x}$;

(3) $y = \cos(x-2)$; (4) $y = \arctan(\tan x)$.

1.2.5. 求下列各个周期函数的周期:

(1) $\cos^2 x$; (2) $\cos^4 x + \sin^4 x$;

(3) $1 + 5 \tan \frac{x}{5} + 3 \cos \frac{x}{3}$.

1.2.6. 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $[-1, 0]$, 求下列函数的定义域:

(1) $f(x^3)$; (2) $f(\sin 2x)$;

(3) $f(ax)$ ($a > 0$); (4) $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$).

1.2.7. 对于下列各对函数 $f(x)$ 与 $g(x)$, 求复合函数 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$, 并确定它们的定义域:

(1) $f(x) = x+1$, $g(x) = 2x$;

(2) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = x^4$;

(3) $f(x) = \frac{x}{x+2}$, $g(x) = \frac{x-1}{x}$;

(4) $f(x) = |x|$, $g(x) = -x$;

(5) $f(x) = \sqrt{1-x}$, $g(x) = \sqrt{x-1}$;

(6) $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $g(x) = x^2$;

(7) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$, $g(x) = \sqrt{x-1}$.

1.2.8. 对下列函数 $f(x)$, 求函数 $g(x)$, 使得

$$f[g(x)] = g[f(x)] = x;$$

(1) $f(x) = -3x+2$; (2) $f(x) = ax+b$ ($a \neq 0$);

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$.

1.2.9. 求下列各函数的反函数:

(1) $y = \frac{2^x}{2^x+1}$; (2) $y = \frac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}+1$;

(3) $y = 3^{2x+5}$.

1.2.10. 求下列各函数的反函数 $y = \varphi(x)$, 并画出函数与反函数的图形:

(1) $y = 2^x+1$; (2) $y = 1 + \log_4 x$;

(3) $y = \sin(x-1)$, $\frac{\pi}{2}+1 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}+1$;

(4) $y = x^2-2x$, $x \leq 0$; (5) $y = \arcsin \frac{1-x}{4}$.

1.2.11. 利用 $y = \sin x$ 的图形作出下列函数的图形:

(1) $y = \sin 2x$; (2) $y = \sin\left(2x + \frac{3}{2}\right)$;

(3) $y = \frac{1}{2} \sin x$; (4) $y = \frac{1}{2} \sin(x) - 1$.

1.2.12. 在半径为 r 的球内嵌入一内接圆柱, 试将圆柱的体积表为其高的函数, 并求此函数的定义域.

1.2.13. 一物体受压缩弹簧的推力而沿直线方向运动. 如这弹簧的一端固定于原点, 原长 $2l$, 压缩后长度为 $1.5l$, 弹性系数为 k . 试将物体所受之力的大小表为物体离原点的距离的函数(只考虑弹簧长度由 $1.5l$ 变到 $2l$ 的过程).

1.2.14. 把一半径为 R 的圆形铁片, 自中心处剪去中心角为 α 的一扇形后围成一无底圆锥. 试将这圆锥的体积表为 α 的函数.

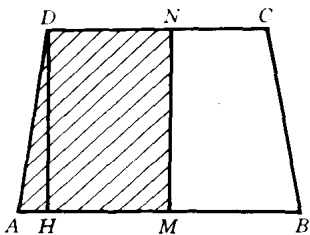


图 1-1

1.2.15. 一等腰梯形 $ABCD$ (如图 1-1), 其两底分别为 $AB = a$, $DC = b$ ($a > b$), 高为 $HD = h$. 引

直线段 $MN \parallel HD$, MN 与顶点 A 的距离 $AM = x$ ($0 \leq x \leq a$). 试