1996年修订本

# 高等数学习题集

同济大学应用数学系

高等教育出版社

高等学校教学参考书

# 高等数学习题集

（1996年修订本）

同济大学应用数学系 编

高等教育出版社

（京）112 号

**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学习题集/同济大学应用数学系编．—3 版（修订本）．—北京：高等教育出版社，1998
ISBN 7-04-006400-6

Ⅰ．高… Ⅱ．同… Ⅲ．高等数学-高等教育-习题 Ⅳ．O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 02842 号

*

高等教育出版社出版
北京沙滩后街 55 号
邮政编码：100009　传真：64014048　电话：64054588
新华书店总店北京发行所发行
北京朝阳北苑印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 13.125　字数 330 000
1959 年 10 月第 1 版
1998 年 6 月第 3 版　　1998 年 6 月第 1 次印刷
印数 0 001—30 192

定价 12.70 元

# 前 言

同济大学数学教研室编写的《高等数学习题集》第一、二版相继于1959年、1965年由高等教育出版社出版以来，它作为一本高校工科高等数学的辅助教材，在我国工科高等数学教学中起到了一定的作用．几十年来，随着我国高等教育事业的发展，高等数学的教学内容和要求发生了不少变化，工科高等数学教材也已多次更新，为了能与这一情形相适应，对这本习题集进行修订已显得十分必要了．在教学中我们也积累了一批好的习题，为修订习题集准备了良好的题源条件．

这个修订本是参照国家教委审订的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》，基本上按照同济大学数学教研室主编的《高等数学》第四版的章节顺序编写的，可以与该教材配合使用．其中各节的习题分成（A）、(B)、(C）三个层次：(A）类题（约占43%）为基本题；(B）类题（约占47%）具有一定的难度，这两类题都符合教学基本要求，适合于高校学习工科高等数学的大多数专业；(C）类题（约占10%）是较难的，有的已超出教学基本要求，适合于对高等数学课程具有较高要求的专业．凡《高等数学》第四版中标有“*”号的内容，本书中相应的习题也标有“*”号（有的在节的标题前标出了“*”号，该节的每个习题就不再标明“*”号)．在这个修订本中，原习题集的习题约占30%，70%左右的习题是新编的，它们与《高等数学》第四版中的习题基本上不重复．我们希望这个修订本能更好地适合当前工科高等数学教学的需要．

这个修订本仍由西安交通大学陆庆乐教授审稿，他认真审阅了原稿，并提出了不少改进意见，对此我们表示衷心感谢．

由于编者水平所限，书中难免会有不妥之处，我们诚挚地欢迎同行们及广大使用者批评指正.

编　　者

1996年8月

# 目　　录

# 第一章　函数与极限

## 一、函　　数

### (A)

1.1.1. 设函数 $\varphi(t)=t^3+1$，求 $\varphi(t^2)$，$[\varphi(t)]^2$.

1.1.2. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，求 $f(x+\Delta x)-f(x)$.

1.1.3. 若函数 $\psi(x)=\ln x$，证明：

$$\psi(x)+\psi(x+1)=\psi[x(x+1)].$$

1.1.4. 若函数 $F(z)=a^z$ $(a>0,a\neq1)$，证明：

(1) $F(-z)\cdot F(z)-1=0$；　(2) $F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$.

1.1.5. 若函数 $\varphi(\theta)=\tan\theta$，证明：

$$\varphi(a+b)=\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{1-\varphi(a)\varphi(b)}.$$

1.1.6. 设函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0;\\ 2, & 0\leqslant x<1;\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$$

求 $\varphi(3)$，$\varphi(2)$，$\varphi(0)$，$\varphi(0.5)$，$\varphi(-0.5)$.

1.1.7. 已知函数 $f(\dfrac{1}{x})=x+\sqrt{x^2+1}$ $(x>0)$，求 $f(x)$.

1.1.8. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-1}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；

(3) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}$；　(4) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$；

(5) $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1}, & x<0;\\ x, & 0<x<1;\\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

1.1.9. 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否表示同一函数？为什么？

(1) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$，　$g(x)=\frac{1}{1+x}$；

(2) $f(x)=\sqrt{x^2}$，　$g(x)=(\sqrt{x})^2$；

(3) $f(x)=\sqrt{(1-x^2)^2}$，　$g(x)=1-x^2$；

(4) $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$，　$g(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$；

(5) $f(x)=x^2$，　$g(x)=\sqrt{x^4}$.

1.1.10. 画出下列各函数的图形：

(1) $y=x^2+cx+1$，当 $c=-2, c=0, c=2$ 时；

(2) $y=|x^2-1|$.

1.1.11. 已知函数 $f(x)$ 以 2 为周期，且在 $(-1,1]$ 上

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & -1<x<0;\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

试画出函数 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 的图形．

1.1.12. 证明函数 $f(x)=x^3+x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的．

1.1.13. 指出下列函数中哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是非奇非偶函数：

(1) $y=x^4-2x^2$；　(2) $y=x-x^2$；

(3) $y=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$；　(4) $y=\operatorname{sgn} x$.

1.1.14. 设 $f(x)$ 是偶函数，指出下列函数的奇偶性：

(1) $xf(x)$；　(2) $(x^2+1)f(x)$；

(3) $x^3+f(x)$；　　　　(4) $x^4-f(x)$.

1.1.15. 设函数 $f(x)=x-[x]$.

(1) 试问 $f(x)$是否为周期函数？(2) 作出函数 $y=f(x)$的图形．

1.1.16. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x^2+1}$；　　　　(2) $y=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ $(|x|\geqslant 1)$.

**(B)**

1.1.17. 用数学归纳法证明下列等式或不等式(其中 $n\in\mathbb{N}_+$)①：

(1) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$；

(2) $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$；

(3) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

1.1.18. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是符号相同且大于$-1$ 的数．证明伯努利(Bernoulli)不等式：

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

1.1.19. 设 $n\in\mathbb{N}$ 且 $n>1,x>-1$. 证明：

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx,$$

当且仅当 $x=0$ 时，等号成立．

1.1.20. 证明:函数 $y=\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$在它的定义域内有界．

1.1.21. 设函数 $f(x)$的定义域为 $D$,而集合 $A\subset D,B\subset D$. 证明：

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$；(2) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap$

① 国家标准规定:自然数集$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$. 除 0 的自然数集，上标星号$\mathbb{N}^*$ 或下标＋号$\mathbb{N}_+$．

$f(B)$，其中 $f(A)$表示集合$\{f(x)|x\in A\}$，$f(B)$表示集合$\{f(x)|x\in B\}$.

1.1.22. 设函数 $f(x)=x+1$，函数 $g(x)=x-2$，试解方程：

$$|f(x)+g(x)|=|f(x)|+|g(x)|.$$

1.1.23. 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，且对任意实数 $x$、$y$，有 $f(x)\neq 0$，$f(xy)=f(x)\cdot f(y)$. 求 $f(1996)$.

1.1.24. 设函数 $z=x+y+f(x-y)$，当 $y=0$ 时，$z=x^2$. 求 $f(x)$及 $z$.

1.1.25. 设函数 $f(x)$的定义域和值域均为$[0,+\infty)$. 令 $f_1(x)=f(x)$，$f_{n+1}(x)=f[f_n(x)]\quad(n=1,2,\cdots)$. 已知 $f_{n+1}(x)=[f_n(x)]^2\quad(n=1,2,\cdots)$，求 $f(x)$及 $f_n(x)$.

1.1.26. 若函数 $f(x)$对于其定义域内的一切 $x$ 恒有 $f(x)=f(2a-x)$，则称函数 $f(x)$对称于 $x=a$. 证明：如果函数 $f(x)$对称于 $x=a$ 及 $x=b$ $(b>a)$，则 $f(x)$必定是周期函数.

## (C)

1.1.27. 设 $a_k$、$b_k(k=1,2,\cdots,n)$均为实数. 证明：

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

1.1.28. 设 $a_k>0$ $(k=1,2,\cdots,n)$. 证明：

(1) $\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n}\leqslant\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$；

(2) $\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n}$.

1.1.29. 设函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$内有定义，$a>0$，$b>0$. 证明：

(1) 若$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$内单调减少，则

$$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b);$$

(2) 若$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$内单调增加,则

$$f(a+b)\geqslant f(a)+f(b).$$

1.1.30. 设$a>0,b>0$,利用上一题结论证明:

(1) 当$0<p<1$时,有$(a+b)^p\leqslant a^p+b^p$;

(2) 当$p>1$时,有$(a+b)^p\geqslant a^p+b^p$.

1.1.31. 证明:$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$在$(-\infty,-1)$及$(-1,+\infty)$内均为单调增加函数. 并由此证明对任意实数$a$、$b$,有

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

1.1.32. 设函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,且满足

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x},$$

其中$a$、$b$、$c$均为常数,$|a|\neq|b|$. 证明$f(x)$为奇函数.

## 二、初等函数

### (A)

1.2.1. 求下列各函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt{x+2}$;　　(2) $y=\log_2(\log_2 x)$;

(3) $y=\sqrt{16-x^2}+\sqrt{\sin x}$;　　(4) $y=\cot\sqrt{x}$①;

(5) $y=\arcsin(3^x+2)$;　　(6) $y=\ln(\sin x)$.

1.2.2. 验证下列各函数在区间$(0,+\infty)$内是单调增加的:

(1) $y=2^{x-1}$;　　(2) $y=x+\ln x$.

1.2.3. 指出下列函数中哪些是奇函数,哪些是偶函数,哪些

① 正切函数符号为 tan,余切函数符号为 cot.

是非奇非偶函数(其中 $a>1$):

(1) $y=2^x$;　　(2) $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$;

(3) $y=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})$;　　(4) $y=x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}$.

1.2.4. 下列函数中哪些是周期函数?对于周期函数指出其周期:

(1) $y=\sin(x^2)$;　　(2) $y=\sin\frac{1}{x}$;

(3) $y=\cos(x-2)$;　　(4) $y=\arctan(\tan x)$.

1.2.5. 求下列各个周期函数的周期:

(1) $\cos^2 x$;　　(2) $\cos^4 x+\sin^4 x$;

(3) $1+5\tan\frac{x}{5}+3\cos\frac{x}{3}$.

1.2.6. 设函数 $y=f(x)$的定义域为$[-1,0]$,求下列函数的定义域:

(1) $f(x^3)$;　　(2) $f(\sin 2x)$;

(3) $f(ax)\quad(a>0)$;　　(4) $f(x+a)+f(x-a)\quad(a>0)$.

1.2.7. 对于下列各对函数 $f(x)$与 $g(x)$,求复合函数 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$,并确定它们的定义域:

(1) $f(x)=x+1$,　　$g(x)=2x$;

(2) $f(x)=\sqrt{x+1}$,　　$g(x)=x^4$;

(3) $f(x)=\frac{x}{x+2}$,　　$g(x)=\frac{x-1}{x}$;

(4) $f(x)=|x|$,　　$g(x)=-x$;

(5) $f(x)=\sqrt{1-x}$,　　$g(x)=\sqrt{x-1}$;

(6) $f(x)=\frac{|x|}{x}$,　　$g(x)=x^2$;

(7) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$,　　$g(x)=\sqrt[4]{x-1}$.

1.2.8. 对下列函数 $f(x)$,求函数 $g(x)$,使得

$$f[g(x)]=g[f(x)]=x:$$

(1) $f(x)=-3x+2$;　　(2) $f(x)=ax+b\quad(a\neq 0)$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$.

1.2.9. 求下列各函数的反函数：

(1) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$；　　(2) $y=\dfrac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}+1$；

(3) $y=3^{2x+5}$.

1.2.10. 求下列各函数的反函数 $y=\varphi(x)$，并画出函数与反函数的图形：

(1) $y=2^x+1$；　　(2) $y=1+\log_4 x$；

(3) $y=\sin(x-1)$，$\dfrac{\pi}{2}+1\leqslant x\leqslant\dfrac{3\pi}{2}+1$；

(4) $y=x^2-2x$，$x\leqslant 0$；　(5) $y=\arcsin\dfrac{1-x}{4}$.

1.2.11. 利用 $y=\sin x$ 的图形作出下列函数的图形：

(1) $y=\sin 2x$；　　(2) $y=\sin\left(2x+\dfrac{3}{2}\right)$；

(3) $y=\dfrac{1}{2}\sin x$；　　(4) $y=\dfrac{1}{2}\sin(x)-1$.

1.2.12. 在半径为 $r$ 的球内嵌入一内接圆柱，试将圆柱的体积表为其高的函数，并求此函数的定义域．

1.2.13. 一物体受压缩弹簧的推力而沿直线方向运动．如这弹簧的一端固定于原点，原长 $2l$，压缩后长度为 $1.5l$，弹性系数为 $k$．试将物体所受之力的大小表为物体离原点的距离的函数(只考虑弹簧长度由 $1.5l$ 变到 $2l$ 的过程).

1.2.14. 把一半径为 $R$ 的圆形铁片，自中心处剪去中心角为 $\alpha$ 的一扇形后围成一无底圆锥．试将这圆锥的体积表为 $\alpha$ 的函数．

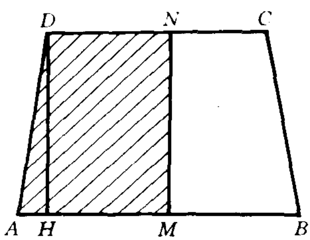


图 1-1

1.2.15. 一等腰梯形 $ABCD$ (如图 1-1)，其两底分别为 $AB=a$，$DC=b$ $(a>b)$，高为 $HD=h$．引直线段 $MN\parallel HD$，$MN$ 与顶点 $A$ 的距离 $AM=x$ $(0\leqslant x\leqslant a)$．试