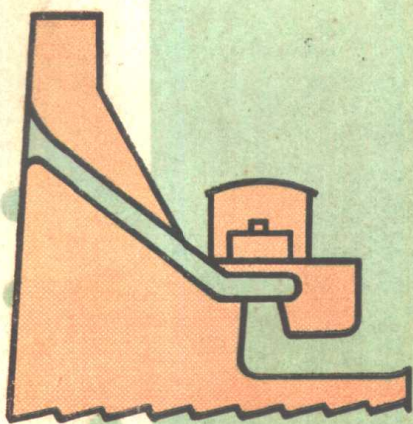




水利水电工程
应用电子计算机
资料选编

水 利 水 电 工 程

应 用 电 子 计 算 机 资 料 选 编

《水利水电工程应用电子计算机资料选编》审编小组

水 利 电 力 出 版 社

内 容 提 要

本书是由1974年召开的“水利水电建设中应用电子计算机经验交流会”的资料选编而成。内容包括水工结构、混凝土温度应力、地基地质、水轮机蜗壳、水文及调洪等25篇文章。书中对上述各专题在不同范围内建立了公式和方程，并列出了少量程序和计算框图。

本书可供水利水电工程单位、有关高等院校从事电子计算机计算的工作同志参考。

水利水电工程应用电子计算机资料选编

《水利水电工程应用电子计算机资料选编》审编小组

*

水利电力出版社出版

(北京德胜门外六铺炕)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力出版社印刷厂印刷

*

1977年11月北京第一版

1977年11月北京第一次印刷

印数 00001—5920 册 每册 2.20 元

书号 15143·3216

限 国 内 发 行

毛主席语录

阶级斗争是纲，其余都是目。

鼓足干劲，力争上游，多快好省地建设社会主义。

独立自主，自力更生，艰苦奋斗，勤俭建国

我们必须打破常规，尽量采用先进技术，在一个不太长的历史时期内，把我国建设成为一个社会主义的现代化的强国。

出版者的话

建国以来，在毛主席革命路线指引下，我国水利水电建设事业取得了巨大成就，特别是无产阶级文化大革命以来，水电战线广大职工，以阶级斗争为纲，坚持党的基本路线，狠批刘少奇、林彪的反革命修正主义路线，有力地促进了水利水电建设的蓬勃发展。

随着水利水电事业的发展，建设工程规模越来越大，设计施工条件越来越复杂，新的坝型和新的结构型式不断出现，计算工作量成倍增加，对计算的要求也越来越高。遵照毛主席关于“**我们必须打破常规，尽量采用先进技术**”的教导，各单位在水利水电建设中日益广泛地应用电子计算机，并积累了一定经验。

为了总结和交流应用电子计算机的经验，水利电力部科技司、水利电力部科学研究所和华东水利学院在南京召开了“水利水电建设中应用电子计算机经验交流会”。到会同志认真座谈和交流了经验，研究了存在问题和今后发展方向，大家认为电子计算机已成为水利水电工程设计和科学研究中不可缺少的工具，应用电子计算机并不神秘，也不是高不可攀或只有少数专家才能掌握的尖端技术，只要遵循毛主席“**自力更生，艰苦奋斗，破除迷信，解放思想**”的教导，认真实行“三结合”，依靠群众，大打人民战争，就一定能使电子计算机的应用得到更加迅速的发展。

根据与会代表的要求，我社决定将会议选编的资料编辑出版，以供从事电子计算机应用的水利工程设计人员、工农兵学员参考，对本书有何意见，可直接寄到水利电力出版社，以便再版时更正。

1976年5月

目 录

出版者的话

混凝土温度场及温度徐变应力的有限单元分析

.....水利电力部第十一工程局勘测设计研究院(1)

三维有限元法及其在拱坝计算中的应用

.....湖南省水利电力设计院 湖南省计算技术研究所(27)

在电子计算机上应用试载法计算拱坝

.....吉林大学数学系计算服务站 水利电力部东北勘测设计院一室(41)

有限单元法解混凝土坝缝隙和基础软弱夹层问题.....华东水利学院(65)

用有限单元法对有软弱夹层的地基和坝体应力的分析

.....水利电力部第十三工程局勘测设计院
北京大学汉中分校固体力学教研组(77)
河北省朱庄水库工程指挥部

关于弹性接触问题的分析方法

.....中国科学院计算所三室 水利电力部第七工程局
成都工学院水利系 水利电力部成都勘测设计院科试所(87)

蜗壳的三向有限单元法分析.....水利电力部第十二工程局勘测设计院(104)

二维有限单元法对空腹重力坝坝踵角缘区应力计算方法的探讨及应力计算

.....水利电力部第四工程局石泉分局设计室(123)

混凝土坝的动力计算

.....水利电力部水利调度研究所 北京大学数学系计算数学专业(138)
中国科学院工程力学研究所 广东地震大队 中国科学院计算所三室

拱坝计算的拱冠梁法程序.....陕西省水电勘测设计院 西北农学院水利系(162)

五一五大坝原体观测资料整理分析

.....水利电力部第七工程局 四川省计算站(169)
成都工学院 水利电力部成都勘测设计院科试所

混凝土坝应变计组测值的应力计算.....桓仁发电厂 辽宁大学数学系(190)

串联水库的双库调洪计算.....云南省电力局勘测设计院水能组(197)

编制暴雨洪水预报电子计算机程序

.....水利电力部科学研究所 华东水利学院(215)

水库冲淤过程的计算方法及电子计算机的应用

.....长江流域规划办公室 长江水利水电科学研究院河流研究室(227)

钱塘江潮汐水力计算

.....浙江大学应用数学教研组 浙江省钱塘江工程管理局规划研究室(245)

装设调压阀的水轮机组甩负荷时水锤计算分析

.....水利电力部科研所水利研究室 湖南省水利电力勘测设计院(258)

水文计算中参数估计方法的统计试验研究

..... 华东水利学院水文系 水利电力部第四工程局设计院 (265)
水利电力部第十一工程局设计院 上海计算技术研究所

有限单元法在心墙土坝稳定渗流计算中的应用

..... 水利电力部、交通部南京水利科学研究所 (282)
水利电力部黄委会水利科学研究所 上海计算技术研究所

有限单元法在不稳定渗流中的初步应用

..... 南京大学 水利电力部 交通部南京水利科学研究所 (290)

用电子计算机进行土坝稳定分析

..... 吉林省水利勘测设计院规划设计室 吉林大学数学系 (302)

用电子计算机计算土坝施工期的孔隙水压力

..... 武汉水利电力学院水工水电站电子计算组 (310)

沥青混凝土心墙土坝的有限单元计算.....甘肃省水电局勘测二队 华东水利学院农水系 (318)

混凝土温度场及温度徐变应力的有限单元分析

水利电力部第十一工程局勘测设计研究院

一、前 言

在大体积混凝土结构中，温度应力具有重要意义。如某坝原型观测资料表明，大坝底孔周围的应力状态实际上受温度应力控制，温度应力在数值上超过了自重和水压力引起的应力。在混凝土坝施工中，温度应力的合理解决关系到能否多快好省地建设一座混凝土高坝。因此，在大体积混凝土结构设计中，正确地计算温度场和温度应力具有重要意义。

由于温度应力随着时间而急剧地变化，而且混凝土的水化热、弹性模量、徐变度等基本参数都随混凝土龄期而变化，人工计算温度应力，工作量十分庞大，实际上很难进行精确计算。工程界习惯于进行一些近似计算，并且简单地用基础温差和内外温差去判断温度应力的变化，从而决定相应的技术措施。经验表明，这样做是不够的。例如往往内外温差大的坝块未裂缝，内外温差小的坝块反而裂缝了。事实上，在整个施工过程中，混凝土温度应力并不是静止的，而是不断变化的，其变化过程及影响因素是相当复杂的，只有正确地分析温度应力的变化过程，掌握其发展规律，然后才可能决定合理而有效的技术措施。

我们建立了在电子计算机上利用有限单元法计算二维稳定温度场、不稳定温度场及温度徐变应力的通用程序，不但可以分别计算各种混凝土结构的温度场和应力场，而且可以由几个程序联合运算，一次算出不同时间的温度场和温度徐变应力，从而大大加快了计算速度。

除了加快计算速度外，计算精度也大为提高。以往在工程设计中，对温度应力只能进行近似计算，计算条件与实际情况相差较远。利用有限单元法，在电子计算机上可以按照工程中分层浇筑的实际情况进行计算，计算条件比较接近实际，温度和应力在时间和空间上的变化一目了然，使我们对温度应力的认识有所深化。

由于温度应力对水工混凝土结构具有重要影响，正确地分析温度应力，有利于多快好省地完成水电建设任务。例如，在某工程中正是由于掌握了温度应力的变化规律，利用了温度应力的有利因素，节约了投资，加快了工程进度。

参加此项工作的，除我院有关同志外，尚有水利电力部第八工程局设计院的部分同志。

二、温 度 场 计 算

如图 1 所示，设混凝土坝构成区域 R ，在区域 R 内温度 T 必须满足下列热传导方程：

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{\partial T}{\partial \tau} \right) = 0 \quad (1)$$

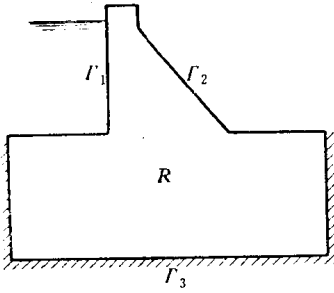


图 1

式中 a 为导温系数, θ 为绝热温升。

在初始瞬时, 温度 T 必须满足初始条件:

$$\text{当 } \tau = 0 \text{ 时, } T = T_0(x, y). \quad (2)$$

在边界 Γ_1 上, 混凝土与水接触, 混凝土温度等于已知的水温:

$$\text{在 } \Gamma_1 \text{ 上, } T = T_b, \quad (3)$$

在边界 Γ_2 上, 混凝土与空气接触, 应满足下列边界条件:

$$\text{在 } \Gamma_2 \text{ 上, } \lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \beta(T - T_a) = 0, \quad (4)$$

式中 λ 为导热系数, β 为表面放热系数, T_a 为空气温度, n 为边界的法线。

当基础边界 Γ_3 取得足够大时, 可采用如下的边界条件:

$$\text{在 } \Gamma_3 \text{ 上, } \frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad (5)$$

式 (5) 可以看成是式 (4) 的特殊情况, 即 $\beta = 0$ 。

今取泛函如下:

$$I = \iint_R \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right) T \right\} dx dy + \int_{\Gamma_2} \bar{\beta} \left(\frac{T}{2} - T_a \right) T d\Gamma, \quad (6)$$

式中 $\bar{\beta} = \beta/\lambda$, 并要求 T 满足下列条件:

$$\text{在边界 } \Gamma_1 \text{ 上, } T = T_b, \quad (7)$$

$$\text{当 } \tau = 0 \text{ 时, } T = T_0(x, y). \quad (8)$$

根据变分原理, 当泛函 I 取极小值时, 温度 T 必然满足热传导方程 (1) 并在边界 Γ_2 上满足式 (4), 即 T 是我们所求的温度场。因此, 利用变分原理, 求解不稳定温度场的问题转变成求泛函 (6) 的极小值问题。

将区域 R 划分为 n 个三角形单元, 设单元 e 占据的子域为 ΔR , 并占据边界 Γ_2 的一部分 $\Delta \Gamma_2$, 由式 (6), 相应的积分为

$$I^e = \iint_{\Delta R} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right) T \right\} dx dy + \int_{\Delta \Gamma_2} \bar{\beta} \left(\frac{T}{2} - T_a \right) T d\Gamma, \quad (9)$$

如果单元 e 不与边界 Γ_2 接触, 上式中即不包括第二项线积分。将各单元的积分值 I^e 累加

起来, 得到泛函 I , 即

$$I = \Sigma I^e. \quad (10)$$

如图 2 所示, 设单元 e 的结点为 i, j, m , 结点温度为 T_i, T_j, T_m , 在单元划分得足够小时, 单元内任一点的温度可用结点温度表示如下:

$$T = N_i T_i + N_j T_j + N_m T_m. \quad (11)$$

$$\text{式中} \quad N_k = \frac{1}{2A} (a_k + b_k x + c_k y), \quad (k=i, j, m); \quad (12)$$

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j, \quad b_i = y_j - y_m, \quad c_i = x_m - x_j, \quad (13)$$

依 i, j, m 次序置换, 可得到 a_j, b_j, c_j 及 a_m, b_m, c_m , A 为单元 e 的面积。将式 (11) 代入式 (9) 可求出 I^e , 再由式 (10) 可求出 I , 因此泛函 I 的数值决定于结点温度 T_i 等。由泛函取极小值的条件可知:

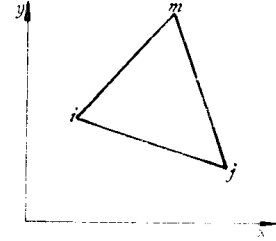


图 2 单元 e

$$\frac{\partial I}{\partial T_i} = \Sigma \frac{\partial I^e}{\partial T_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (14)$$

由此得到 n 个线性方程, 解之可求出结点温度。

(1) 温度场显式计算

式 (9) 可改写如下:

$$I^e = I_1^e + I_2^e, \quad (15)$$

$$I_1^e = \iint_{\Delta R} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right) T \right\} dx dy, \quad (16)$$

$$I_2^e = \int_{\Delta \Gamma_2} \left[-\beta \left(\frac{T}{2} - T_a \right) T \right] d\Gamma. \quad (17)$$

式中 I_2^e 只在 Γ_2 上取值, 对于内点来说, 只须考虑 I_1^e 。利用在积分号内求微商可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1^e}{\partial T_i} = & \iint_{\Delta R} \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T_i} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial}{\partial T_i} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right) \frac{\partial T}{\partial T_i} \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (18)$$

由式 (11)、(12) 可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{1}{2A} (b_i T_i + b_j T_j + b_m T_m), & \frac{\partial}{\partial T_i} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) &= \frac{b_i}{2A}, \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{2A} (c_i T_i + c_j T_j + c_m T_m), & \frac{\partial}{\partial T_i} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \frac{c_i}{2A}, \\ \frac{\partial T}{\partial T_i} &= N_i. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

又取

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\Delta \theta}{\Delta \tau}, \quad \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{T_{i, \tau + \Delta \tau} - T_{i, \tau}}{\Delta \tau}, \quad (20)$$

式中 $\Delta \tau$ 为时间步长, 将以上各式代入 (18) 式, 再代入 (14) 式, 得到内点温度算式如下:

$$T_{i, \tau + \Delta \tau} = \frac{1}{\Omega} \Sigma \frac{\Delta}{a} (T_{i, \tau} + \Delta \theta) - \frac{3\Delta\tau}{4\Omega} \Sigma (f_i T_{i, \tau} + f_j T_{j, \tau} + f_m T_{m, \tau}), \quad (21)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \Sigma \frac{\Delta}{a}, \quad f_i = (b_i^2 + c_i^2) / \Delta, \\ f_j &= (b_i b_j + c_i c_j) / \Delta, \quad f_m = (b_i b_m + c_i c_m) / \Delta, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

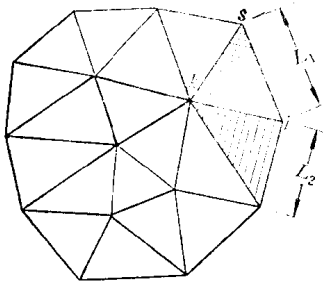


图 3 边界 Γ_2 上结点

式 (21) 右端各项都是已知的, 因此, 可直接算出下一步的温度, 不必求解联立方程。

下面考虑图 3 所示单元 isk , 其中 is 是在边界 Γ_2 上, 其长度为 L_1 , 当单元充分小时, 可近似假定靠近 i 点一半边界, 即 $\Delta \Gamma_2 = L_1 / 2$ 范围内温度为常数, 即

$$T = T_i,$$

由式 (17) 可得

$$\frac{\partial I_2^e}{\partial T_i} = \bar{B}_1 L_1 (T_i - T_a) / 2.$$

由式 (14) 和 (15) 可得边界 Γ_2 上结点温度算式如下:

$$T_{i, \tau + \Delta \tau} = \frac{1}{\Omega_1} \Sigma \frac{\Delta}{a} (T_{i, \tau} + \Delta \theta) + \frac{3B_i \Delta \tau}{\Omega_1} T_a - \frac{3\Delta\tau}{4\Omega_1} \Sigma (f_i T_{i, \tau} + f_j T_{j, \tau} + f_m T_{m, \tau}) \quad (23)$$

式中

$$\Omega_1 = \Sigma \frac{\Delta}{a} + 3 B_i \Delta \tau, \quad B_i = \frac{\bar{B}_1 L_1 + \bar{B}_2 L_2}{2} \quad (24)$$

按照式 (21)、(23) 二式计算温度场时, 时间步长 $\Delta \tau$ 不能任意选取, 必须受下式限制:

$$\Delta \tau \leq \frac{4\Omega}{3\Sigma f_i} \quad (25)$$

否则, 计算结果将是不稳定的。由式 (25) 求出的 $\Delta \tau$ 大体与单元面积成正比, 计算前必须根据网格最密处的单元尺寸, 由式 (25) 计算 $\Delta \tau$ 上限, 然后采用一个小于此值的时间步长, 以保证计算的稳定性。

(2) 温度场隐式计算

在(18)式中假定 $\partial T/\partial \tau$ 是均匀的,从而得到了简单的显式。为了提高计算精度,今取

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = N_i \frac{\partial T_i}{\partial \tau} + N_j \frac{\partial T_j}{\partial \tau} + N_m \frac{\partial T_m}{\partial \tau} \quad (26)$$

代入(18)式得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1^e}{\partial T_i} = \iint_{\Delta R} \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T_i} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial}{\partial T_i} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{1}{a} \left(N_i \frac{\partial T_i}{\partial \tau} \right. \right. \\ \left. \left. + N_j \frac{\partial T_j}{\partial \tau} + N_m \frac{\partial T_m}{\partial \tau} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right) N_i \right\} dx dy \end{aligned} \quad (27)$$

根据形函数 N_i 的特点,存在下列关系:

$$\left. \begin{aligned} \iint_{\Delta R} N_i dx dy &= \frac{\Delta}{3}, \\ \iint_{\Delta R} N_i N_j dx dy &= \begin{cases} \frac{\Delta}{6}, & \text{当 } i=j, \\ \frac{\Delta}{12}, & \text{当 } i \neq j, \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

将式(19)、(28)代入式(27),得到

$$\frac{\partial I_1^e}{\partial T_i} = [h_{ii}, h_{ij}, h_{im}] \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_m \end{Bmatrix} + [r_{ii}, r_{ij}, r_{im}] \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_m \end{Bmatrix} + f_i \frac{\partial \theta}{\partial \tau}. \quad (29)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} h_{ii} &= \frac{b_i^2 + c_i^2}{4\Delta}, \quad h_{ij} = \frac{b_i b_j + c_i c_j}{4\Delta}, \quad h_{im} = \frac{b_i b_m + c_i c_m}{4\Delta}, \\ r_{ii} &= \frac{\Delta}{6a}, \quad r_{ij} = r_{im} = \frac{\Delta}{12a}, \quad f_i = -\frac{\Delta}{3a}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

如果结点 i 落在边界 Γ_2 上,还须计算下列线积分:

$$\begin{aligned} g_i &= \frac{\partial I_2^e}{\partial T_i} = \int_{\Gamma_2} \bar{\beta} (T - T_a) \frac{\partial T}{\partial T_i} d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_2} \bar{\beta} (N_i T_i + N_j T_j + N_m T_m - T_a) N_i d\Gamma \end{aligned} \quad (31)$$

$$\int_{\Gamma_2} N_i N_j d\Gamma = \begin{cases} \frac{L}{3}, & \text{当 } i=j, \\ \frac{L}{6}, & \text{当 } i \neq j. \end{cases} \quad (32)$$

代入式(31)可得

$$g_i = \begin{cases} \bar{\beta} L_1 (2T_i + T_j - 3T_a)/6, & \text{当 } ij \text{边在 } \Gamma_2 \text{上}, \\ \bar{\beta} L_2 (2T_i + T_m - 3T_a)/6, & \text{当 } im \text{边在 } \Gamma_2 \text{上}. \end{cases} \quad (33)$$

式中 L_1, L_2 分别为 ij, im 边的长度。因此, 对于在 Γ_2 上的结点 i , 有

$$\frac{\partial I_1^e}{\partial T_i} + \frac{\partial I_2^e}{\partial T_i} = [h_{ii}, h_{ij}, h_{im}] \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_m \end{Bmatrix} + [r_{ii}, r_{ij}, r_{im}] \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_m \end{Bmatrix} + f_i \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + g_i \quad (34)$$

将有关单元加以集合后, 得到关于结点 i 的方程, 如(14)式, 对于全部结点, 得到方程组如下:

$$[H] \{T\} + [R] \left\{ \frac{\partial T}{\partial \tau} \right\} + \{F\} = 0 \quad (35)$$

式中

$$H_{ij} = \sum h_{ij}, \quad R_{ij} = \sum r_{ij}, \quad F_i = \sum f_i \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \sum g_i. \quad (36)$$

对于边界 Γ_1 上的结点, 因温度已给出, 不必列出方程。对于靠近 Γ_1 的结点 i , 如图4所示, 可列出方程如下:

$$(H_{ii}T_i + H_{i1}T_1 + H_{i2}T_2 + H_{i3}T_3) + \left(R_{ii} \frac{\partial T_i}{\partial \tau} + R_{i1} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} + R_{i2} \frac{\partial T_2}{\partial \tau} + R_{i3} \frac{\partial T_3}{\partial \tau} \right) + \left(F_i + H_{i4}T_4 + H_{i5}T_5 + H_{i6}T_6 + R_{i4} \frac{\partial T_4}{\partial \tau} + R_{i5} \frac{\partial T_5}{\partial \tau} + R_{i6} \frac{\partial T_6}{\partial \tau} \right) = 0 \quad (37)$$

式中 $F_i = -\sum \frac{A}{3a} \frac{\partial \theta}{\partial \tau}$, 由于4, 5, 6三点都在 Γ_1 上, 其温度已知, $H_{i4}T_4$ 和 $R_{i4} \frac{\partial T_4}{\partial \tau}$ 等项都是已知的, 所以归并到已知的自由项中。

参照文献[1], 假定 $\partial T / \partial \tau$ 随时间 τ 而线性变化, 取

$$\left\{ \frac{\partial T}{\partial \tau} \right\}_\tau = - \left\{ \frac{\partial T}{\partial \tau} \right\}_{\tau-\Delta\tau} + \frac{2}{\Delta\tau} (\{T\}_\tau - \{T\}_{\tau-\Delta\tau}) \quad (38)$$

代入式(35)得到

$$\left[H + \frac{2}{\Delta\tau} R \right] \{T\}_\tau - [R] \left\{ \frac{\partial T}{\partial \tau} \right\}_{\tau-\Delta\tau} - \frac{2}{\Delta\tau} [R] \{T\}_{\tau-\Delta\tau} + \{F\}_\tau = 0. \quad (39)$$

但由式(35)可知

$$-[R] \left\{ \frac{\partial T}{\partial \tau} \right\}_{\tau-\Delta\tau} = [H] \{T\}_{\tau-\Delta\tau} + \{F\}_{\tau-\Delta\tau}.$$

代入(39)式, 最后得到

$$\left[H + \frac{2}{\Delta\tau} R \right] \{T\}_\tau + \left[H - \frac{2}{\Delta\tau} R \right] \{T\}_{\tau-\Delta\tau} + \{F\}_{\tau-\Delta\tau} + \{F\}_\tau = 0. \quad (40)$$

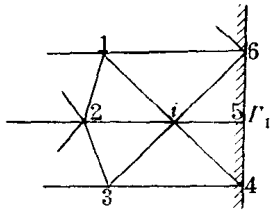


图4 边界 Γ_1 附近的结点

用直接解法, 例如修正乔列斯基方法, 由上列方程组可解出结点温度。时间步长不受稳定条件的限制, 但在选取 $\Delta\tau$ 时应考虑到混凝土水化温升 $\partial\theta/\partial\tau$ 及边界水温和气温的变化速率。当 $\partial\theta/\partial\tau$ 及水温和气温变化较快时, 应采用较小的时间步长, 反之, 可采用较大的时间步长。

(3) 显式与隐式的比较

显式计算具有程序简单、占内存少等优点，但时间步长受稳定条件的限制。隐式计算占内存较多、程序较复杂，但时间步长不受稳定条件的限制。实际经验表明，两种方法都能给出满意的计算结果。究竟采用显式还是隐式，应结合应力和徐变计算，根据机器内存容量，加以统一考虑。如果机器内存容量足够大，在满足应力和徐变计算对内存的需要后，还有充分的内存能把分解后的 $\left[H + \frac{2}{\Delta\tau}R\right]$ 矩阵全部存下，那么采用隐式较好，因为每步计算温度场时只须进行简单的回代。反之，则采用显式将得到较快的计算速度。

三、应 力 计 算

在温度场算出以后，即可用有限单元法计算应力。根据混凝土变形特性，可分为以下两种情况。

(1) 晚期混凝土温度应力

晚期混凝土的弹性模量可视为常量。用有限单元法离散后，按位移求解的基本方程如下：

$$[K]\{\delta\} = \{P\} - \{F_t\} - \{F_{e0}\}. \quad (41)$$

式中 $[K]$ 为刚度矩阵， $\{\delta\}$ 为结点位移向量， $\{P\}$ 为结点上作用的外力， $\{F_t\}$ 为温度变化引起的结点荷载， $\{F_{e0}\}$ 为初应变引起的结点荷载。求出位移及相应的应变后，可按下列式计算应力：

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_t\} - \{\varepsilon_0\}). \quad (42)$$

式中 $[D]$ 为弹性矩阵， $\{\varepsilon\}$ 为应变， $\{\varepsilon_t\}$ 为温度变形， $\{\varepsilon_0\}$ 为初应变。

(2) 早期混凝土温度应力

如图 5 所示，早期混凝土的弹性模量 $E(\tau)$ 随着龄期 τ 而急剧变化。弹性模量的变化对温度应力有很大影响。为了考虑这一因素，可将龄期分为若干时段，每一时段取一平均弹性模量

$$E_i = \frac{E(\tau_{i-1}) + E(\tau_i)}{2}. \quad (43)$$

该时段内产生的温度增量为

$$\Delta T_i = T(\tau_i) - T(\tau_{i-1}). \quad (44)$$

然后由下式计算第 i 时段内产生的位移增量 $\{\Delta\delta_i\}$

$$[K_i]\{\Delta\delta_i\} = \{\Delta P_i\} - \{\Delta F_t\}_i - \{\Delta F_{e0}\}_i. \quad (45)$$

式中 $[K_i]$ 为依 E_i 计算的刚度矩阵， $\{\Delta F_t\}_i$ 为依 ΔT_i 计算有温度荷载。第 i 时段内产生的应力增量由

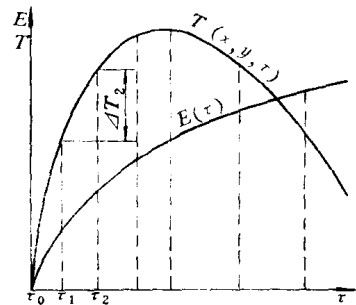


图 5 温度增量 ΔT

下式计算：

$$\{\Delta\sigma_i\} = [D_i](\{\Delta\varepsilon_i\} - \{\Delta\varepsilon_i\}_i - \{\Delta\varepsilon_0\}_i). \quad (46)$$

将应力增量加以累积，得到应力如下：

$$\{\sigma\} = \Sigma \{\Delta\sigma_i\}. \quad (47)$$

四、徐 变 效 应

混凝土温度应力属于缓慢加荷，在温度应力作用下，混凝土将产生显著的徐变变形。在计算混凝土温度应力时必须考虑徐变效应。

(1) 徐 变 变 形 计 算

实验资料表明^[7]，混凝土徐变变形的泊松比可视为常量。如图 6 所示，设在龄期 $\tau = \tau_i$ 时受到应力增量 $\Delta\sigma_x(\tau_i)$ ， $\Delta\sigma_y(\tau_i)$ ， $\Delta\sigma_z(\tau_i)$ 及 $\Delta\tau_{xy}(\tau_i)$ 的作用，根据线性徐变理论，混凝土产生的徐变变形为

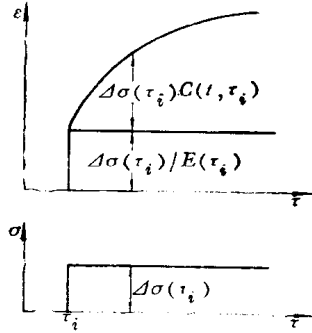


图 6 徐变变形

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varepsilon_x^c(t, \tau_i) &= \Delta\bar{\sigma}_x(\tau_i)C(t, \tau_i), \\ \Delta\varepsilon_y^c(t, \tau_i) &= \Delta\bar{\sigma}_y(\tau_i)C(t, \tau_i), \\ \Delta\varepsilon_z^c(t, \tau_i) &= \Delta\bar{\sigma}_z(\tau_i)C(t, \tau_i), \\ \Delta\gamma_{xy}^c(t, \tau_i) &= \Delta\bar{\tau}_{xy}(\tau_i)C(t, \tau_i). \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta\bar{\sigma}_x(\tau_i) &= \Delta\sigma_x(\tau_i) - \mu\Delta\sigma_y(\tau_i) - \mu\Delta\sigma_z(\tau_i), \\ \Delta\bar{\sigma}_y(\tau_i) &= \Delta\sigma_y(\tau_i) - \mu\Delta\sigma_z(\tau_i) - \mu\Delta\sigma_x(\tau_i), \\ \Delta\bar{\sigma}_z(\tau_i) &= \Delta\sigma_z(\tau_i) - \mu\Delta\sigma_x(\tau_i) - \mu\Delta\sigma_y(\tau_i), \\ \Delta\bar{\tau}_{xy}(\tau_i) &= 2(1 + \mu)\Delta\tau_{xy}(\tau_i). \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

式中 μ 为泊松比， $C(t, \tau)$ 为徐变度。

(2) 初 应 变 的 计 算

平面应力问题，初应变按下式计算：

$$\{\Delta\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{x0} \\ \Delta\varepsilon_{y0} \\ \Delta\gamma_{xy0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x^c \\ \Delta\varepsilon_y^c \\ \Delta\gamma_{xy}^c \end{Bmatrix} \quad (50)$$

其中 $\Delta \varepsilon_x^c$, $\Delta \varepsilon_y^c$, $\Delta \gamma_{xy}^c$ 是按 (48) 式计算的徐变变形。

平面应变问题, 根据平面应变条件, 推知初应变应按下式计算:

$$\{\Delta \varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{x0} \\ \Delta \varepsilon_{y0} \\ \Delta \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_x^c + \mu \varepsilon_z^c \\ \Delta \varepsilon_y^c + \mu \Delta \varepsilon_z^c \\ \Delta \gamma_{xy}^c \end{Bmatrix} \quad (51)$$

(3) 存贮量的压缩

徐变变形不但与当时的应力状态有关, 而且与应力历史有关, 为了计算徐变变形, 必须记录整个应力变化过程, 这在理论上虽无困难, 但却要占机器的大量内存, 即使是大型机器, 利用内存也难以记录整个应力变化过程。如果利用外存, 则会因反复取数而影响运算速度。因此在计算徐变变形时, 如何压缩存贮量是关键所在。

文献[3]曾建议用一组串联的开尔文模型描述徐变, 可压缩存贮量。但我们发现这一方法只适用于变形特性(参数)与龄期无关的材料, 混凝土徐变特性与龄期密切相关, 不能采用这一方法。

文献[4]曾建议采用等步长 $\Delta \tau$, 利用指数函数的特点, 压缩存贮量, 徐变参数可随龄期而变化。由于刚浇筑的混凝土温度上升很快, 弹性模量变化也很快, 据我们的经验, 第一个时段以不超过 0.3 天为宜, 如采用等步长, 计算三个月的温度徐变应力需要计算 300 步, 将耗费太长的机器时间。我们改进了这个方法, 使之适用于变步长的情况。由于混凝土变形参数的变化随着龄期的增长而很快趋于平缓, 采用变步长 $\Delta \tau$, 一般不超过 20 步即可计算三个月的温度徐变应力。

设混凝土的徐变度为

$$C(t, \tau) = C(\tau) [1 - e^{-p(t-\tau)}]. \quad (52)$$

$$\text{记} \quad C(\tau_i) = C(\tau_i), \quad (53)$$

$$\text{令} \quad \eta = t - \tau. \quad (54)$$

如图 7 所示, 考虑三个相邻时间 $t - \Delta \tau_1$, t , $t + \Delta \tau_2$, 根据线性徐变理论, 三个相邻时间的徐变变形分别为

$$\begin{aligned} \varepsilon_{t-\Delta \tau_1}^c &= \Delta \sigma_0 C_0 [1 - e^{-p(\eta_0 - \Delta \tau_1)}] + \Delta \sigma_1 C_1 [1 - e^{-p(\eta_1 - \Delta \tau_1)}] \\ &+ \dots + \Delta \sigma_{n-2} C_{n-2} [1 - e^{-p(\eta_{n-2} - \Delta \tau_1)}], \end{aligned} \quad (a)$$

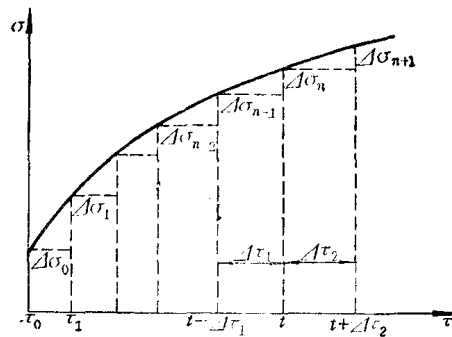


图 7

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t^c &= \Delta\sigma_0 C_0 [1 - e^{-p\eta_0}] + \Delta\sigma_1 C_1 [1 - e^{-p\eta_1}] + \dots \\
&\quad + \Delta\sigma_{n-2} C_{n-2} [1 - e^{-p\eta_{n-2}}] + \Delta\sigma_{n-1} C_{n-1} [1 - e^{-p\Delta\tau_1}], \quad (b) \\
\varepsilon_{t+\Delta\tau_2}^c &= \Delta\sigma_0 C_0 [1 - e^{-p(\eta_0 + \Delta\tau_2)}] + \Delta\sigma_1 C_1 [1 - e^{-p(\eta_1 + \Delta\tau_2)}] \\
&\quad + \dots + \Delta\sigma_{n-2} C_{n-2} [1 - e^{-p(\eta_{n-2} + \Delta\tau_2)}] \\
&\quad + \Delta\sigma_{n-1} C_{n-1} [1 - e^{-p(\Delta\tau_1 + \Delta\tau_2)}] + \Delta\sigma_n C_n [1 - e^{-p\Delta\tau_2}]. \quad (c)
\end{aligned}$$

由式 (c) 减去式 (b), 整理后得到

$$\Delta\varepsilon_{n+1}^c = \varepsilon_{t+\Delta\tau_2}^c - \varepsilon_t^c = \omega_{n+1}(1 - e^{-p\Delta\tau_2}), \quad (55)$$

$$\begin{aligned}
\omega_{n+1} &= \Delta\sigma_0 C_0 e^{-p\eta_0} + \Delta\sigma_1 C_1 e^{-p\eta_1} + \dots + \Delta\sigma_{n-2} C_{n-2} e^{-p\eta_{n-2}} \\
&\quad + \Delta\sigma_{n-1} C_{n-1} e^{-p\Delta\tau_1} + \Delta\sigma_n C_n. \quad (56)
\end{aligned}$$

再由式 (b) 减去式 (a), 整理后得到

$$\Delta\varepsilon_n^c = \varepsilon_t^c - \varepsilon_{t-\Delta\tau_1}^c = \omega_n(1 - e^{-p\Delta\tau_1}), \quad (57)$$

$$\begin{aligned}
\omega_n &= \Delta\sigma_0 C_0 e^{-p(\eta_0 - \Delta\tau_1)} + \Delta\sigma_1 C_1 e^{-p(\eta_1 - \Delta\tau_1)} + \dots \\
&\quad + \Delta\sigma_{n-2} C_{n-2} e^{-p(\eta_{n-2} - \Delta\tau_1)} + \Delta\sigma_{n-1} C_{n-1}. \quad (58)
\end{aligned}$$

比较 (56)、(58) 二式, 可知

$$\omega_{n+1} = \omega_n e^{-p\Delta\tau_1} + \Delta\sigma_n C_n. \quad (59)$$

由递推关系得到

$$\omega_1 = \Delta\sigma_0 C_0. \quad (60)$$

因此在计算徐变变形时, 不必记录整个应力历史, 只要记录 ω_n , 根据递推关系 (59) 式, 可计算下一步的 ω_{n+1} , 从而可以节省大量内存。 ω_n 与应力增量有关, 因而它是向量。对于平面应变问题, 须引进四个向量 $\omega_n^x, \omega_n^y, \omega_n^z, \omega_n^{xy}$, 分别与 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}$ 相对应。

为了更好地符合试验曲线, 徐变度 $C(t, \tau)$ 的表达式可采用组合的指数函数, 一般采用两项已足够, 即

$$C(t, \tau) = C(\tau)[1 - e^{-p(t-\tau)}] + D(\tau)[1 - e^{-q(t-\tau)}], \quad (61)$$

记

$$C_i = C(\tau_i), \quad D_i = D(\tau_i). \quad (62)$$

于是徐变变形可计算如下:

$$\{\Delta\varepsilon_{n+1}^c\} = \{\omega_{n+1}\}(1 - e^{-p\Delta\tau_{n+1}}) + \{\rho_{n+1}\}(1 - e^{-q\Delta\tau_{n+1}}), \quad (63)$$

$$\left. \begin{aligned} \{\omega_{n+1}\} &= \{\omega_n\} e^{-p\Delta\tau_n} + \{\Delta\bar{\sigma}_n\} C_n \\ \{\rho_{n+1}\} &= \{\rho_n\} e^{-q\Delta\tau_n} + \{\Delta\bar{\sigma}_n\} D_n \end{aligned} \right\}, \quad (64)$$

$$\{\omega_1\} = \{\Delta\bar{\sigma}_0\} C_0, \quad \{\rho_1\} = \{\Delta\bar{\sigma}_0\} D_0. \quad (65)$$

式中 $\{\Delta\varepsilon_{n+1}^c\}^T = [\Delta\varepsilon_{x,n+1}^c, \Delta\varepsilon_{y,n+1}^c, \Delta\varepsilon_{z,n+1}^c, \Delta\gamma_{xy,n+1}^c]$,