12

21世纪实用经济数学系列教材

实用概率统计

主　编　于义良　张银生
副主编　安建业　李秉林

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实用概率统计/于义良,张银生主编.
北京:中国人民大学出版社,2002
21 世纪实用经济数学系列教材

ISBN 7-300-04010-1/O·33
Ⅰ.实…
Ⅱ.①于… ②张…
Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材
Ⅳ.O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 002464 号

21 世纪实用经济数学系列教材
实用概率统计
主　编　于义良　张银生

出版发行:中国人民大学出版社
(北京中关村大街 31 号　邮编 100080)
邮购部:62515351　门市部:62514148
总编室:62511242　出版部:62511239
E-mail:rendafx@public3.bta.net.cn
经　销:新华书店
印　刷:北京东方圣雅印刷有限公司

开本:787×980 毫米 1/16　印张:14
2002 年 2 月第 1 版　2002 年 4 月第 2 次印刷
字数:252 000

定价:26.00 元

总 序

人类已经迈进了21世纪，由于科学技术的迅猛发展，数量分析已渗透到各个领域，数学的重要性已被整个社会所公认；由于计算机技术的广泛普及和提高，许多繁难的计算和抽象的推理已不再是高不可攀，数学的应用越来越深入；随着人类素质的不断提高，数学素质教育已成为全体国民的必修课程，数学的普及越来越广泛．为适应21世纪形势的发展和社会的需要，信息技术与学科课程整合已提到教育教学改革"重中之重"的地位，运用信息技术改造和优化传统学科内容是培养新世纪具有创新能力的高素质人才的必然要求．经过多年的教学研究和实践，我们组织了具有丰富教学经验的第一线教师，编写出这套实用经济数学系列教材，奉献给大家．

这套系列教材，包括《实用微积分》、《实用线性代数》、《实用概率统计》，共三册．本套教材力求体现如下特点：

第一，以实用为原则，内容体系整体优化，突出"用数学"能力的培养，使读者实现由知识向能力的转化．

第二，以实际为背景，概念阐述简明、通俗化，举例贴近生活，运用多媒体技术使内容直观化、图形化，使读者消除对数学的陌生感、抽象感、恐惧感，激活求知欲，增强学好数学、用好数学的信心．

第三，以计算机为工具，传统内容与信息技术应用融为一体，注重基本知识、基本思想、基本能力的培养，对繁、难、抽象的内容，充分利用当前极为流行的 Mathematica 软件、Excel 软件来实现，比如函数图形描绘、矩阵计算、数据分析等.

第四，每册教材均配有多媒体助学助教光盘，包括课程说明、同步辅导、习题详解、单元测试、模拟演示、电子教案、案例精选、考研试题分析、数学家简介等众多模块，信息量大，使用方便，便于读者更好地理解、掌握、巩固所学知识，有助于及时检测、拓展和提高.

这套系列教材，主要面向高等学校经济学类、管理学类的本科生，对其他学科类的学生和数学实用工作者也是很好的辅助教材.

我们期盼着这套实用经济数学系列教材能给广大读者带来学数学的轻松、用数学的快乐和效益.

编著者

2002 年 1 月

前　言

进入新世纪,人类社会逐步迈向信息化社会,这个社会所呈现出的两大特点是:计算机技术的迅速发展与广泛应用,以及由之引发的数学的应用向各个领域更为广泛和深入的渗透.这两个特点无疑对信息化社会的数学教育提出了新的要求.由于数学应用的普遍性,数学教育质量的高低就关系到国民素质的高低;由于未来高新技术从某种意义上可归结为数学技术,所以一个国家的数学教育水平在一定程度上也反映了这个国家的综合国力.

“实用概率统计”是高等学校经济学、管理学、社会学、工学等各专业本科阶段普遍开设的惟一一门处理随机性现象数量规律性的数学课程.由于随机性现象的普遍存在性、研究方法的独特性和教学内容的实用性,这门课越来越受到人们的重视.但是,长期以来,传统观念的束缚和影响以及计算技术的落后使这门课成了“空中楼阁”,理论一大堆,抽象难懂;公式一大堆,混杂难记;方法一大堆,学了难用;学生学习被动,没兴趣.这些因素使得该门课难以发挥应有的教育功能,同时也制约了学科自身的发展.在素质教育观下,如何将“数学素质教育”贯穿到“实用概率统计”课程的教学过程中,便是从事这门课教学的每个人应该研究的课题.

经过多年的教学研究实践和认真学习讨论,汲取过去的经验和教训,调查了解国内外数学教育的改革动态,我们认为“实用概率统计”课程从内容到教学方法,都

应突出这门课的两大特点,即理论联系实际和计算机技术应用,以“概率适度,统计加强,引入案例”为基本思路,真正使学生的数学实践能力(数学知识、数学建模、数值计算、数据处理)得到培养和提高.

现在奉献给大家的这本《实用概率统计》教材,力求基本知识、方法与计算机应用融为一体,统计计算全部由Excel实现,使学生感受到所学知识、方法的可用性;通过完成“现实题材——数学问题——数学建模——数学知识与方法——成果释译”的学习过程,帮助学生实现由知识向能力的转化.教学内容贴近实际,让学生边学边提出解决问题的思路和设想,引导学生运用所学知识解决实际问题,培养学生的社会责任感.

参加本书编著的有:于义良,张银生,安建业,李秉林,赵苏霞,王全文,王丽琴,梁帮助,王玉津,李美凤,滕树军.

本书编写过程中,得到了学院领导和有关部门的指导,特别是得到学院教材中心、中国人民大学出版社徐晓梅、孙景利同志的大力支持,为体现其典型性,书中部分例题引自他人著作,一并表示感谢.由于我们水平所限,书中一定会有不尽如人意的地方,敬请读者雅正.

编著者

2001年11月10日

21世纪实用经济数学系列教材

目　录

第1章

随机变量

我们生活在一个日新月异、千变万化的世界中，每个人时时刻刻都要面对生活中碰到的问题. 例如："明天是下雨还是晴天，是否可以出去旅游"；"明天的股市是上涨还是下跌，是买还是卖"；"下个月某空调器的销售量是多少，如何组织货源"；"今年夏季长江流域的降雨量有多少，怎样组织抗洪"；"在下届奥运会中我国体育健儿能拿多少块金牌，如何争取金牌总数第一"……这些问题的发生与发展是受诸多因素的影响的，因而这些问题的结果也是不确定的，不可预知的. 但是，事实证明在许多不确定问题中隐含着一种确定性的规律. 也正因为如此，人类才在不断摸索和研究中使许多以前认为不可想像的问题得到解决，人类才取得了如此辉煌的进步. 数学家维纳(N. Weiner)说："数学的伟大使命是在混沌中发现有序."

本章的目的就是从基本问题出发，引出随机事件、随机变量的概念，试图从最简单的随机现象(偶然现象)中去探求必然的规律.

第1.1节　随机事件及其概率

1. 随机事件

我们先做一个简单的试验：掷一颗质地均匀的骰子，观察出现的点数.

显然,这个试验具有如下特点:

(1) 在相同的条件下可以重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不只一个(出现 1 点,2 点,…,6 点),而究竟出现哪个结果,在试验之前不能预言;

(3) 试验之前可以预知试验中一切可能的结果(6 种结果),每次试验中出现且只出现可能结果中的一个.

我们把具有上述三个特点的试验称为**随机试验**(random experiment),简称**试验**(experiment),记为 E. 本书中所谈的试验,均为随机试验.我们就是研究随机试验中这些可能结果出现的规律.

试验中的每个可能的结果称为**样本点**(sample),用 ω 表示,全体样本点构成的空间称为**样本空间**(sample space),用 Ω 表示.从集合论的观点看,样本空间就是针对该试验的全集,而样本点就是构成样本空间的元素.样本空间 Ω 的子集称为**随机事件**(random event),简称**事件**(event),一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示.我们称一事件在一次试验中出现(发生)了是指该次试验出现的结果(样本点)属于该事件(子集),否则称该事件没有出现(发生).易见 Ω 在每次试验中均要出现,故称**必然事件**(certainty). $\varnothing$ 在每次试验中均不出现,故又称**不可能事件**(impossible event).

在上面掷骰子的试验中,我们设:

ω_i 代表出现的点数为 $i(i=1,2,\cdots,6)$,则 ω_i 为样本点.且记 $A_i=\{\omega_i\}$.

$B=$“出现的点数是 2 或者 3”

$C=$“出现的点数大于 1 小于 5”

$D=$“出现的点数是偶数”

则样本空间为:$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$

$$B=\{\omega_2,\omega_3\}$$

$$C=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$$

$$D=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$$

显然 $A_i(i=1,2,\cdots,6),B,C,D$ 均为事件.而事件“出现的点数小于 7”是必定要出现的,它就是一个必然事件.实际上它包括了所有的样本点,即为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$.而事件“出现的点数大于 6”是不可能出现的,它就是一个不可能事件.实际上它不包含任何样本点,即为一个空集 $\varnothing$.

由集合和随机事件之间的关系,可得到如下结论:

(1) $A\subset B$. A 是 B 的子集.它表示若事件 A 出现则事件 B 一定出现.

(2) $A\cup B$(或 $A+B$). A 与 B 的并(和).它表示一个新事件,即事件 A 和事

件 B 至少有一个出现.同样，$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 这 n 个事件至少有一个出现.

(3) $A \cap B$(或 AB).A 与 B 的交(积).它表示一个新的事件,即事件 A 和事件 B 同时出现.同样，$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 表示这 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时出现.

(4) $A \cap B = \varnothing$.表示事件 A 和事件 B 不可能同时出现,称 A 与 B 为互不相容，简称**互斥**(mutually exclusive events).

(5) $A \cap B = \varnothing$ 且 $A \cup B = \Omega$.表示事件 A 和事件 B 出现且只出现其中一个,称为 A 与 B 对立,并称 B 为 A(或 A 为 B)的**对立事件**(complementary event),记为 $B = \bar{A}$(或 $A = \bar{B}$).

(6) $A - B$.A 与 B 的差.它表示事件 A 出现而事件 B 不出现.显然 $A - B = A\bar{B}$,同样 $B - A = B\bar{A}$.

(7) $\overline{A \cup B}$.它是事件 A 和事件 B 至少出现一个的对立事件.显然它表示事件 A 和事件 B 都不出现,即 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$. 同样 $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i$.

(8) $\overline{A \cap B}$.它是事件 A 和事件 B 同时出现的对立事件.显然它表示事件 A 和事件 B 至少有一个不出现,即 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. 同样 $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i$.

下面用图将上面的结论直观地显示一下(如图 1.1.1).

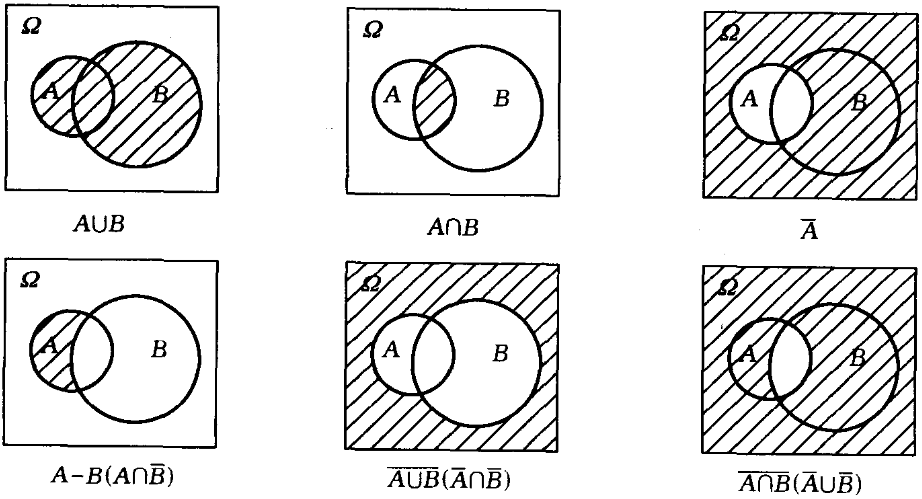

图 1.1.1

从上面的图示中,还可以得到以下一些关系:

$A\cap B\subset A$;$A-B\subset A$,且 $A-B=A-AB$,$AB\subset A$;$A\bar{B}$,$\bar{A}B$ 与 AB 两两互斥,$A=A\bar{B}\cup AB$,$A\cup B=A\bar{B}\cup B\bar{A}\cup AB=A\bar{B}\cup B=B\bar{A}\cup A=A\cup(B-A)$;$\overline{A\cap B}\neq\bar{A}\cap\bar{B}$;$\overline{A\cup B}\neq\bar{A}\cup\bar{B}$,…

结合前面的试验以及字母 $\omega_i(i=1,2,\cdots,6)$,B,C,D 表示的意义,我们有:

$B\subset C$; $C\cup D=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_6\}$;

$C\cap D=\{\omega_2,\omega_4\}$; $\bar{B}=\{\omega_1,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$;

$\overline{C\cup D}=\{\omega_1,\omega_5\}$; $\overline{C\cap D}=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_6\}$;

$C-D=\{\omega_3\}$; $D-C=\{\omega_6\}$.

大家还可以验证其他一些等式或不等式.

上面一些表示法,对我们今后处理某些复杂事件会带来很大方便.

2. 随机事件的概率

下面再回到原来的试验:掷一颗质地均匀的骰子,观察出现的点数.

显然,这个试验具有两个特点:

(1) 所有可能的试验结果是有限个(有限性);

(2) 每个可能结果在一次试验中出现的可能性相同(等可能性).

我们把具有这两个特点的试验称为**古典概型**(classical probability).

我们知道,在每次试验中出现且只出现样本空间中的一个样本点.所谓事件 A 出现,就是指试验中出现了事件 A 中包含的样本点,因此在古典概型中由于样本点出现的等可能性,事件 A 出现的可能性大小就可以用事件 A 中包含的样本点的个数占样本点总数的比例来度量.

定义 1.1.1 在古典概型中,设样本空间 Ω 中包含有 n 个样本点,则对任意事件 A,若 A 中含有 k 个样本点,那么事件 A 的概率 $P(A)$ 定义为

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 中包含的样本点数}}{\text{样本空间 }\Omega\text{ 中样本点总数}}=\frac{k}{n}$$

在掷骰子的试验中,显然有

$$P(A_i)=\frac{1}{6}\quad(i=1,2,3,4,5,6)\qquad P(B)=\frac{2}{6}$$

$$P(C)=\frac{3}{6}\qquad P(D)=\frac{3}{6}\qquad P(C\cup D)=\frac{4}{6}$$

$$P(C\cap D)=\frac{2}{6}\qquad P(\bar{B})=\frac{4}{6}\qquad P(\Omega)=\frac{6}{6}=1$$

$$P(\varnothing)=\frac{0}{6}=0$$

在计算古典概型概率中，往往要用到中学所学的排列与组合的知识.

例 1.1.1 箱中装有 10 件产品，其中 1 件是次品，在 9 件合格品中有 6 件是一等品，3 件二等品. 现从箱中任取 3 件，试求：

(1) 取得 3 件产品都是一等品的概率；

(2) 取得 3 件产品中有 1 件是一等品，2 件是二等品的概率；

(3) 取得 3 件产品中至少有 2 件是一等品的概率.

解 由于试验中是任取 3 件，显然这个试验是个古典概型. 每个样本点就是从 10 件中任取 3 件产品构成的集合，与顺序无关，故样本空间中样本点的总数为 C_{10}^3.

(1) 设 A =“取得 3 件产品都是一等品”，那么 A 中的样本点个数为 C_6^3，所以

$$P(A)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$$

(2) 设 B =“取得 3 件产品中有 1 件是一等品，2 件是二等品”，那么 B 中的样本点个数为 $C_6^1\cdot C_3^2$(这里用到了乘法原理)，所以

$$P(B)=\frac{C_6^1\cdot C_3^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{20}$$

(3) 设 C =“取得 3 件产品中至少有 2 件是一等品”，那么事件 C 显然是由“有 2 件一等品，1 件非一等品”和“3 件都是一等品”两个事件构成，所以 C 中的样本点个数为 $C_6^2\cdot C_4^1+C_6^3$(这里又用到了加法原理)，那么

$$P(C)=\frac{C_6^2C_4^1+C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{2}{3}$$

生活中还有很多问题并不具有古典概型的两个特点，例如投掷的是一颗不均匀的骰子，那么样本空间中的 6 个样本点出现的可能性就不相等了，因此计算其中的一些事件的概率时就不能再用古典概型的公式了. 如何解决这类问题呢？我们最常用也是最直接的办法就是反复掷这颗骰子(例如做了 n 次试验)，记下所关心的事件 A 在这 n 次试验中出现的次数(例如出现了 μ 次)，比值 $\frac{\mu}{n}$ 随着试验次数 n 的增大而越来越接近某个数值 p，那么我们就称数值 p 为事件 A 的概率，即 $P(A)=p$. 但是数值 p 是个理论上的数，在有限次的试验中很难求得. 一般就用 $\frac{\mu}{n}$ 作为 $P(A)$ 的近似值，即 $P(A)=\frac{\mu}{n}$.

上面我们介绍了两种计算随机事件概率的方法. 实际上由于问题的不同以及处理问题的角度不同，还有许多计算随机事件概率的方法. 但是不管用什么方法计算概率，它们都要求具有下面三个基本性质：

(1) 非负性(nonnegativity). $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

(2) 规范性(normativity). $P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$;

(3) 可加性(additivity). 若 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 是两两互不相容的事件(即 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j$),则 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

以上三个性质也被称为**概率的公理化定义**(axiomatized definition).

由此公理化定义可以推出以下一些性质:

(1) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$;

(2) $P(\bar{A})=1-P(A)$;

(3) 若 $A\supset B$,则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$;

(4) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$;

(5) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$;

(6) $P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$;

(7) 若 $A\supset B$,则 $P(A)\geqslant P(B)$.

证 我们只证(2),(3),(5). 其余几条很容易推得(在证明性质 2 时用到了性质 1).

(2) 因为 $\Omega=A\cup\bar{A}$,所以 $1=P(\Omega)=P(A\cup\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})$,故 $P(\bar{A})=1-P(A)$.

(3) 因为 $A\supset B$,所以 $A=(A-B)\cup B$,又因 $(A-B)\cap B=\varnothing$,于是得 $P(A)=P[(A-B)\cup B]=P(A-B)+P(B)$,故 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

(5) 因为 $A\cup B=A\cup(B-AB)$,而 $A\cap(B-AB)=\varnothing$,所以

$$
\begin{aligned}
P(A\cup B)&=P[A\cup(B-AB)]=P(A)+P(B-AB)\\
&=P(A)+P(B)-P(AB)
\end{aligned}
$$

在上面的证明过程中,善于把一个事件分解成互斥事件的并是一个常用的技巧.

例 1.1.2 假设 A 出现的概率为 0.6,A 与 B 都出现的概率为 0.1,A 与 B 都不出现的概率为 0.15,求:

(1) A 出现但是 B 不出现的概率;

(2) A 与 B 至少出现一个的概率.

解 依题意,$P(A)=0.6, P(AB)=0.1, P(\bar{A}\bar{B})=0.15$,于是

(1) $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.5$

(2) $P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\bar{A}\bar{B})=0.85$