

587

0343-43
M59

弹性力学

米海珍 李春燕 编著

重庆大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

弹性力学/米海珍, 李春燕编著. —重庆: 重庆大学出版社, 2001.8

土木工程专业本科系列教材

ISBN 7-5624-2367-9

I. 弹 ... II. ①米 ... ②李 ... III. 弹性力学—高等学校—教材 IV. 0343

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 055027 号

弹性力学

米海珍 李春燕 编著

责任编辑 周立 彭宁

*

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

重庆华林印务有限公司印刷

*

开本: 787 × 1092 1/16 印张: 9 字数: 200 千

2001 年 10 月第 1 版 2001 年 10 月第 1 次印刷

印数: 1—5000

ISBN 7-5624-2367-9/O·197 定价: 15.00 元

前 言

经过 10 多所院校土木工程专业教师的酝酿讨论,半年多时间的编写,这本教材与读者见面了。在此对本书的编写意图稍作说明:近两三年随着教育部关于高等学校专业调整目录的颁发,土木工程专业课程设置有了较大的变化,而且高校对培养新时代的工程技术人员也有了新的、更高的要求,为适应以上的变化和要求,编写了该教材,供土木工程及相近专业的本科教学之用。

在编写前作者对本教材定了如下的目标,即力求做到理论体系完整、力学概念清晰,不求过繁的数学推导、证明。使学生能够从“战略”上把握整个弹性力学的基本框架;对经典问题解答的讲解应深入浅出,使学生能够从“战术”上学会解题的一些基本方法和对结果(解)的分析,并能将部分结果用于解决其他课程中的问题。以此提高学生的力学素养,拓宽知识面,增强解决工程问题的能力;做到适用于工科本科教学。因为本书是 21 世纪的新型教材,作者在动笔时很费踌躇,如对数学知识的要求,内容含量的多少与学时安排等,这些问题都较难定夺。最后决定在编写中选择较简单的数学工具,力求做到理论体系的完整,内容深入浅出,举例典型简练。

建议使用本教材的教师根据学时对内容进行取舍,如该课程只安排 50 学时,第 3、第 4 章仅做简单介绍,删去第 10、第 11 章,后两章的内容可在单独开设的有限元课程中讲授。

本教材参考了大量的其他教材,也有很多内容是我们作者新的经验的总结。初稿形成后,在部分授课教师中传阅,征求修改意见,并经兰州大学王银邦教授审阅全书,在此,向各位提出修改意见的老师及王银邦教授表示感谢。

本书 1~9 章由米海珍编写,10~11 章由李春燕编写,李春燕并绘制了全部插图。全书由米海珍统稿。

由于时间仓促,加之编写者水平有限,缺点、错误在所难免,恳请使用本书的教师、学生及其他读者批评指正。

米海珍

2001 年 6 月 6 日

目

录

第 1 章 绪论	1
1.1 弹性力学的发展及应用	1
1.2 弹性力学的求解方法	2
1.3 弹性力学的基本假定	2
习题	3
第 2 章 应力分析	4
2.1 体力、面力及应力	4
2.2 一点的应力状态	6
2.3 主应力及主方向	7
2.4 最大剪应力	8
2.5 平衡微分方程	10
习题	12
第 3 章 应变分析	13
3.1 位移及其分量	13
3.2 应变和应变分量	13
3.3 一点的形变状态	15
3.4 主应变与体积应变	17
3.5 协调方程	19
习题	20
第 4 章 应力应变关系	21
4.1 广义胡克定律	21
4.2 弹性体变形过程中的能量	22
4.3 弹性体中内力所作的功	24
4.4 弹性位能与弹性常数的关系	24
4.5 各向同性体中的弹性常数	25
4.6 各向同性体弹性常数间的关系	28
习题	30
第 5 章 弹性力学问题的建立	31
5.1 弹性力学的基本方程	31
5.2 边界条件的提法及求解途径	32

5.3 圣维南原理	33
5.4 两个简单问题的解	33
习题	37
第6章 平面问题的解法	38
6.1 平面应力问题和平面应变问题	38
6.2 平面弹性力学基本边值问题的解法	40
6.3 应力函数	41
6.4 平面问题的逆解法、半逆解法与多项式解答	43
6.5 楔形体受重力和液体压力的解	49
6.6 圆对称的平面问题	52
6.7 轴对称问题的一般解	56
6.8 受内外压的厚壁圆筒	58
6.9 曲梁的弯曲	59
6.10 半无限楔体和半无限平面问题	62
6.11 无限大板中圆孔附近的应力集中	66
习题	69
第7章 空间问题	72
7.1 按位移求解空间问题	72
7.2 半空间体受重力及均布压力作用	73
7.3 半空间体在边界上受法向集中力作用	74
7.4 半无限体边界平面上受有限面积分布压力作用	76
7.5 按应力求解空间问题	77
7.6 等截面直杆的扭转	78
7.7 扭转问题的薄膜比拟	81
7.8 椭圆截面等直杆的扭转	82
7.9 矩形截面杆的扭转	84
习题	86
第8章 薄板问题	87
8.1 薄板的定义及力学假定	87
8.2 弹性曲面的微分方程	88
8.3 薄板横截面上的内力	90
8.4 薄板的边界条件	93
8.5 四边简支矩形薄板的解	96
8.6 两边简支两边自由矩形薄板的解	97
8.7 圆形薄板的弯曲	100
8.8 圆形薄板的轴对称弯曲	102
习题	103

第 9 章 有限差分法	105
9.1 有限差分	105
9.2 有限差分方程	106
9.3 应力函数的差分解	107
9.4 举例	110
习题	113
第 10 章 能量原理与变分法	114
10.1 弹性体的形变势能	114
10.2 位移变分方程	115
10.3 位移变分法	116
10.4 举例	117
习题	119
第 11 章 有限单元法简介	121
11.1 有限单元法的基本思想	121
11.2 弹性体的离散化——单元划分	121
11.3 荷载向结点移置 总荷载列阵	122
11.4 单元的位移插值函数和形函数	124
11.5 单元的应变矩阵和应力矩阵	126
11.6 单元刚度矩阵	127
11.7 总刚度矩阵 基本方程	128
11.8 举例	130
习题	136

第 1 章

绪 论

1.1 弹性力学的发展及应用

弹性力学是固体力学的一个重要分支,它研究弹性物体在外力和外界其他因素作用下所产生的变形和内力。所谓弹性,即物体受外力后变形,在卸去所受外力后变形能够恢复的特性。在本教材中(一般的弹性力学教材中也如此),仅研究变形与外力呈直线关系的弹性物体。一般地说,物体所产生的应力和应变之间的关系是一一对应的,即双方互为单值函数,且呈线性关系。若这种关系是非线性的,则称物体具有非线性弹性性质,由此可知,本教材所研究的问题更确切地说叫做线性弹性力学。

弹性力学的发展已有约 340 多年的历史,这里对此学科的发展作一简略介绍。

由胡克(Hooke, R.)实验(1660)起至柯西(Cauchy, A. L.)(1820)提出弹性理论的基本问题为止,通常被认为是发展初期阶段。此期间科学家们提出了许多弹性体受力变形的问题,并且各自分别用自己的理论来解决一些简单构件问题,并无统一的理论和方法。

19 世纪 20 年代至 50 年代,纳维(Navier)和柯西提出弹性力学的基础问题,以及格林(Green, G.)和汤姆逊(Thomson, W.)确定了 21 个弹性系数,此阶段是弹性力学问题的理论统一和建立期。

接下来是解决线性问题的发展期,大约为 19 世纪 50 年代至 20 世纪初,以圣维南(St. Venant)(1854)关于柱体扭转和弯曲理论论文的发表为标志,之后他还提出了半数学半物理的联合解法,他所求得的解答与实验极为吻合,为此理论的可靠性奠定了基础,也为弹性力学的应用开辟了广阔的前景。这期间的重要工作还有艾雷(Airy, G. B.)(1862)提出了应力函数解法,从而解决了平面问题,赫兹(Hertz, H.)(1882)解决了接触问题,克希霍夫(Kirchhoff, G.)(1850)解决了平板门的平衡和振动问题。很多问题已被应用到工程中去了。

从 20 世纪初开始,随着工业技术的迅猛发展,如机械方面、船舶方面、建筑方面,钢材及其他弹性材料的应用范围不断扩大,弹性力学得到了很好的发展,同时也推动了它与其他科学的结合,不但进一步解决了一些薄板大挠度、大变形和非线性稳定性问题等,同时也形成了一些新的学科领域,至今已有非线性弹性力学、非线性板壳理论、热弹性力学、电磁弹性力学、气动弹性力学和水弹性力学等,应用的工程领域已不胜数。20 世纪该学科的发展显示了蓬勃旺盛的景象,其中有不少科学家为此作出了贡献,这其中已有中国科学家的工作,值得提到的有:钱学森与卡门(Karman, T von)提出薄壳的非线性稳定问题;钱伟长参与发展了薄壁杆件理论,胡海昌参与发展了各向异性的弹性力学,以及钱伟长、胡海昌建立了弹性力学的广义变分原理并推广到了塑性力学等领域中。

弹性力学在工程上的应用已极为广泛,如道桥工程、房建工程、水利工程、船舶制造工程、机械工程、航天工程等诸多领域,而且已成为解决许多工程问题必不可少的工具。可以预料,弹性力学将会对现代工业技术和自然科学发挥更加重要的作用,同时,它本身也将会不断发展。

1.2 弹性力学的求解方法

弹性力学的求解方法通常有数学方法、实验方法及数学和实验相结合的方法。

实验方法是用机械的、电学的、光学的、声学的方法等来测定所研究的弹性体在外力作用下应力和应变的分布规律,如光弹性法、云纹法等。在弹性力学中,许多难于用数学求解的问题往往借助实验方法求解。

数学方法是利用数学分析的方法,对弹性力学边值问题进行求解,由此求得所研究的弹性体的应力场和位移场,该方面的研究成果构成了弹性力学的基本内容。实际上,数学求解时,必须解含有 15 个未知函数的偏微分方程组,只能求得很少特殊问题的解析解,一般问题的求解难度相当大,甚至不可能。因此,发展了一些近似解法。例如逆解法、半逆解法和基于能量原理的变分方法等。除此之外,数值方法也是一种十分有效的方法,主要的方法有:差分法、有限元法和边界元法。目前在计算机普及的情况下,数值方法已成为一种普遍而实用的方法。

对于较为复杂的弹性结构还可结合上述两种方法来求解,以便求得可靠的解答。

1.3 弹性力学的基本假定

自然科学中的各门学科都有自己的前提条件和研究范围,弹性力学亦不例外。在这里,先对弹性力学研究的物体给出一个限定范围,如果超出该范围,弹性力学的理论将不再适用,这一范围和前提条件,即为下面的几个基本假定:

1)连续性假定——物体内部由连续介质组成没有空隙,因而各个力学量,如内力、位移、形变等量是连续的,可以用坐标变量的连续函数表示。严格地说,物体是由分子组成的,分子和分子相互之间存在着间隙。考虑的是物体的宏观力学过程,物体的宏观尺寸远大于粒子之间的相对距离,故此假定被视为是成立的,且这一假定已被实验所证实是合理的。

2)线性弹性假定——指物体在外界因素(外荷载、温度变化等)作用下引起的变形,在外界因素撤除后,完全恢复其变形前的形状而无残余变形。从数学角度看,即为应力与应变之间互为单值函数,且与变形过程无关,此为弹性。同时还假定物体变形服从胡克定律,即应力与应变成正比,此为线性。满足弹性和应力应变线性关系即为线弹性物体。

3)均匀性假定——即整个物体是由同一材料组成的,其弹性性质不随点而变,任何一点的弹性性质可代替整个物体的弹性性质。

4)各向同性假定——物体的弹性在所有方向都相同,物体的弹性常数不随方向而变。例如木材不符合这一假定。如果各向异性的话,物体的弹性常数将有 21 个,第 4 章将详细讨论。

5)微小变形假定——在外力或温变作用下,物体变形所产生的位移量与物体本身尺寸相

比是微小的。即在研究物体受力后的平衡状态时,可以不考虑其原始尺寸的改变。在计算形变时,可略去形变的二次项,得到弹性理论的微分方程将是线性的,而且求解可以应用叠加原理。

上述基本假定中,第5)条属于几何假定,其余假定是对材料物性的假定。这些假定将是本教材所介绍的弹性力学的基础和前提条件。以后各章推导的基本公式及各种应用均在此基础上。

习 题

- 1 均匀性假定和各向同性假定有何区别? 举例说明。
- 2 一般的钢筋混凝土构件能否作为理想弹性体?
- 3 弹性体的应力应变曲线一定是线性的吗?

第2章

应力分析

2.1 体力、面力及应力

对于弹性体受力的情况,可作这样的划分,即外力和内力。外力是作用于弹性体上的力,它包括体积力和面力。内力即为由于外力作用而引起的物体内部各部分之间相互作用的力。现对这几个概念逐一介绍。

体力是作用在物体体积内的力,例如重力、惯性力及磁化力等。为标明物体在某点 P 所受体力的大小和方向,过 P 点(图 2.1) 从物体中取一微小体积 Δv ,并设作用其上的体力为 ΔQ ,则体力定义为:

$$f = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v} \quad (2.1)$$

f 的方向为 ΔQ 的极限方向,即 $\Delta v \rightarrow 0$,该体积为 Δv 的微元趋于 P 点的方向。为了计算上的方便,可将体力分解到 3 个坐标轴,其相应分量为 f_x, f_y, f_z 。一般情况下,物体所受体力各点并不相同,而是坐标的函数。

面力是分布在物体表面上的力,或者说是两物体通过表面的相互作用而产生的力。例如水坝上游面所受到水库内水的压力,房间中摆放的东西对于地板的压力等。为确定物体表面某点 P 承受面力的大小和方向,过 P 点(图 2.2) 取该表面的一小部分,它包含 P 点且面积为 ΔS ,设作用于 ΔS 面积上的面力为 ΔQ ,则面力集度可定义为

$$F = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \quad (2.2)$$

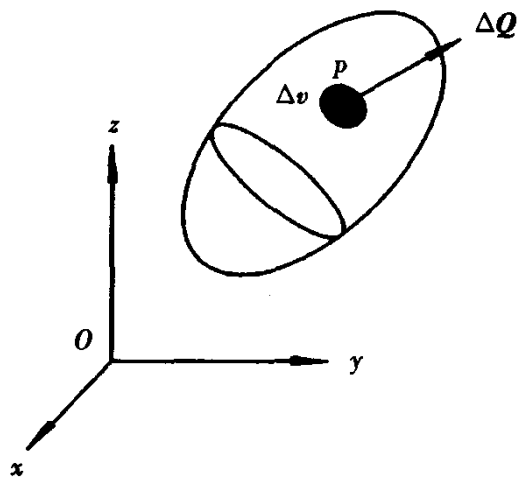


图 2.1

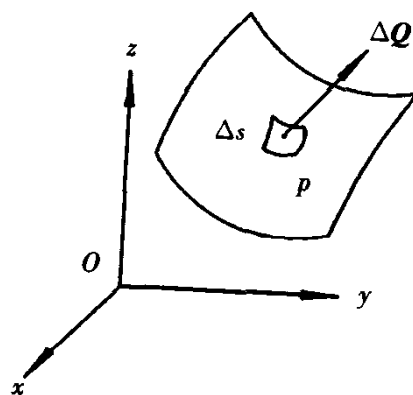


图 2.2

其大小为(2.2)式极限值,方向为 ΔQ 的极限方向。同样,可将其分解到 3 个坐标轴上,相应分量为 F_x, F_y, F_z 。

应力是一种内力,是物体内一部分对另一部分的作用,在材料力学中已经讨论过这一概念,在此对应力的规定作一介绍。

假如有一物体(图 2.3) 被一假想平面截成两部分 A 和 B,那么 B 部分对 A 部分的作用,便可以用 A 部分截面上的应力矢量来代表。

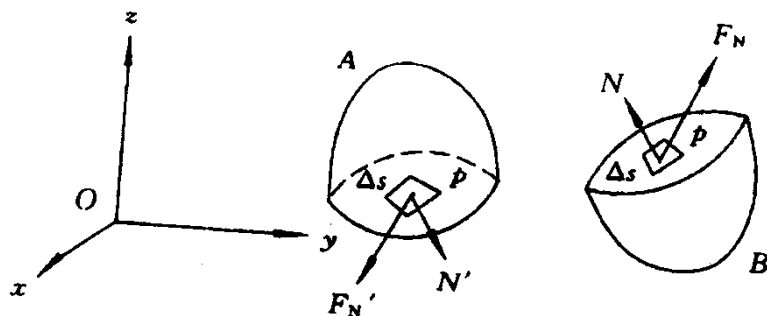


图 2.3

由图 2.3 可知,应力即是面力的一种,在留下的 B 部分截面上上任一点 P,而 P 是包含在微小面积 ΔS 内的; ΔS 面上过 P 点的外法线是 N,若令 P 点的面力是 F_N ,它是一个矢量,因此可被称之为应力矢量,它表示作用在法向是 N 的微元平面上的单位面积上的力,在直角坐标系中, F_N 可分解为 X_N 、 Y_N 、 Z_N 3 个分量。

显然在 A 部分同一点 P 的外法线是 N' ,它与 N 的方向相反,应有如下关系

$$F_N = -F_{N'}$$

现在来描述物体各点的应力。从物体中的 P 点处取出一微元体,这一微元体呈正平行六面体,且各边与坐标轴平行,长度分别为 Δx 、 Δy 、 Δz (图 2.4),将每一平面上的应力分为正应力和剪应力,而剪应力又按坐标分为两个沿坐标方向的剪应力。

对正应力和剪应力的记法作如下规定:若正六面体的某个面的外法线是沿坐标轴正向,则该面称为正面,反之则称为负面。正面上的应力以沿坐标轴正向为正,沿坐标轴负向为负;负面上则刚好相反,所有 6 个面上的应力标于图 2.4 中。这里还需提醒的是,应力是坐标的函数。

这样以来一共引进了 9 个应力分量,记为

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

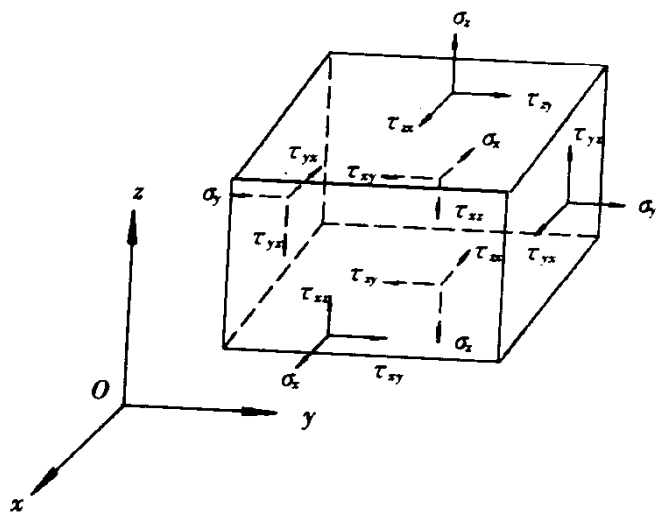
叫做应力场。这样的一组量也称应力张量,关于张量的定义和运算这里不作介绍。

若以连接六面体前后两面中心的直线为矩轴,由力矩平衡可得

$$2\tau_{yz} \cdot \Delta z \Delta x \cdot \frac{\Delta y}{2} - 2\tau_{xy} \cdot \Delta y \Delta x \cdot \frac{\Delta z}{2} = 0$$

以同样方法列出另外两个力矩平衡方程,就可得到

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.3)$$



这一结果证明了剪应力的互等性,即是说,剪应力记号的两个下标字母可对调。因此,一点独立的应力分量只有 6 个。

2.2 一点的应力状态

求物体中过 P 点任意方向平面上的应力矢量 $F_N(X_N, Y_N, Z_N)$, N 是这个平面的法线方向。作一平面 ABC 与该平面平行,但不通过 P 点(图 2.5),设平面 ABC 与这个平面的距离为 h ,则这个平面上所受的应力矢量 F_N 与 ABC 面上所受的应力矢量 F_N^* 有如下关系

$$\lim_{h \rightarrow 0} F_N^*(X_N^*, Y_N^*, Z_N^*) = F_N(X_N, Y_N, Z_N) \quad (2.4)$$

设 P 点的应力分量是 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$,而作用在 PAB 、 PAC 及 PBC 平面上的平均应力矢量如图 2.5 所示,当 h 趋于 0 时,就有

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_z^*, \tau_{xy}^*, \tau_{yz}^*, \tau_{zx}^*) = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) \quad (2.5)$$

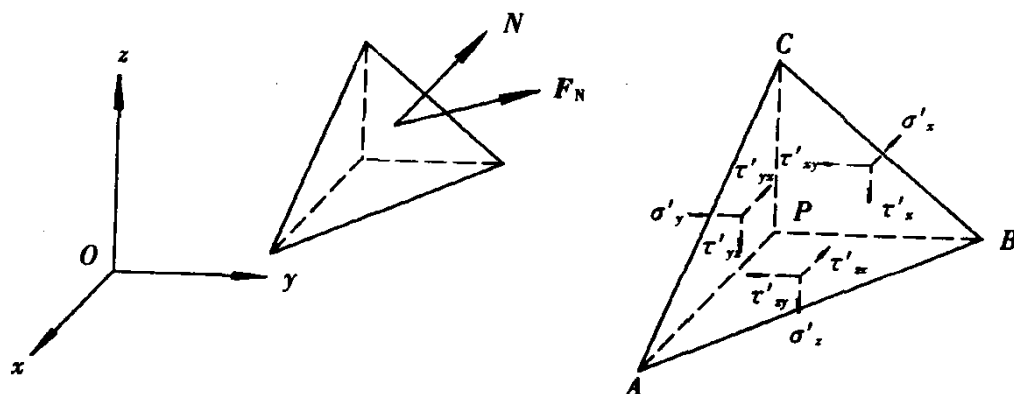


图 2.5

设 ABC 的面积为 ΔS ,则 $PABC$ 的体积为 $\frac{1}{3} h \Delta S$,而平面 PBC 、 PAC 及 PAB 的面积分别记为 ΔS_1 、 ΔS_2 、 ΔS_3 ,它们可由 ΔS 和此点的方向余弦表示

$$\left. \begin{aligned} \Delta S_1 &= \Delta S \cdot \cos(x, N) = l \Delta S \\ \Delta S_2 &= \Delta S \cdot \cos(y, N) = m \Delta S \\ \Delta S_3 &= \Delta S \cdot \cos(z, N) = n \Delta S \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

这里 l, m, n 是平面 ABC 法线 N 的方向余弦。

设四面体 $PABC$ 体力的 3 个分量是 f_x, f_y, f_z ,则考虑 x 方向力的平衡有

$$f_x \Delta V + X_N^* \Delta S - \sigma_x^* \Delta S_1 - \tau_{yx}^* \Delta S_2 - \tau_{zx}^* \Delta S_3 = 0 \quad (2.7)$$

将 ΔV 及 $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3$ 的表达式代入上式,并取 $h \rightarrow 0$,于是可得

$$X_N = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \quad (2.8a)$$

同理,考虑 y, z 方向力的平衡,得到

$$Y_N = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \quad (2.8b)$$

$$Z_N = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \quad (2.8c)$$

这说明过一点 P 的任一平面上的应力矢量都可由这点的 6 个应力分量表示。

式(2.8)给出了一点任一方向上的应力。若将该平面上的 3 个应力分量分解为该面上的法

向应力 σ_N 和切向应力 τ_N , 利用投影关系可求得

$$\sigma_N = lX_N + mY_N + nZ_N = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + n^2\sigma_z + 2mnt\tau_{yz} + 2nl\tau_{zx} + 2lm\tau_{xy} \quad (2.9)$$

该面上全应力 S_N 将是

$$S_N^2 = \sigma_N^2 + \tau_N^2 = X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2$$

$$\tau_N^2 = S_N^2 - \sigma_N^2 = X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2 - \sigma_N^2 \quad (2.10)$$

因而, 有

2.3 主应力及主方向

2.2 节已讨论了一点的应力状态, 若已知一点的 6 个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$, 则过此点任一面上的法向应力 σ_N 和切向应力 τ_N 可求出。如果过 P 点的某个截面上, 只有正应力作用而剪应力为零, 这样的平面称之为应力主平面, 其法线方向 N 被称之为应力主方向, 相应的正应力被称为主应力。现在用数学分析的方法来求主平面和主应力。

现令主应力的大小为 σ , 主平面的方向余弦为 l, m, n , 这 4 个量是未知数, 那么在此平面上沿各坐标轴的应力分量为

$$X_N = \sigma l, \quad Y_N = \sigma m, \quad Z_N = \sigma n \quad (2.11)$$

将上式代入(2.8) 有

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yz}m + \tau_{zx}n &= 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n &= 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yx}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

方向余弦满足

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (2.13)$$

所以, 由代数知识可知, 式(2.12) 有关 (l, m, n) 非零解的条件就是

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (2.14)$$

展开此式得关于主应力 σ 的特征方程

$$\sigma^3 - \textcircled{H}_1\sigma^2 + \textcircled{H}_2\sigma + \textcircled{H}_3 = 0 \quad (2.15)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \textcircled{H}_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ \textcircled{H}_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{zx} \\ \tau_{zx} & \sigma_x \end{vmatrix} \\ \textcircled{H}_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

由上述过程看到, $\textcircled{H}_1, \textcircled{H}_2, \textcircled{H}_3$ 为已知量, 因此可由式(2.15) 解出主应力, 式(2.15) 为一元

弹性力学

三次方程,由代数知识知,实对称矩阵的特征值是实的,即式(2.15)必有3个实根,即为所求的 P 点的主应力,记为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$,通常规定 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 。

既然式(2.15)有3个实根,则它还可写成

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0 \quad (2.15')$$

式(2.16)就有了更简捷的表示

$$\left. \begin{aligned} \textcircled{H}_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ \textcircled{H}_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\ \textcircled{H}_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.16')$$

在弹性力学里称 $\textcircled{H}_1, \textcircled{H}_2, \textcircled{H}_3$ 分别为应力张量的第一、第二、第三不变量。一个张量的不变量是指在坐标变换时数值保持不变的量。这一点可以从数学上得到证明,限于篇幅,这里不再证明。也可以从物理的角度做以说明,当物体的受力状态确定后,一点的主方向和主应力也应随之确定,因而 $\textcircled{H}_1, \textcircled{H}_2, \textcircled{H}_3$ 是确定的,它们不会由于选择不同的坐标而改变。

下面对主应力和主方向分3种情形来讨论:

① 3个主应力各不相等($\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$),即特征方程(2.15)无重根,则与之对应的3个主方向彼此正交。

② 有2个主应力相等($\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$),即特征方程(2.15)有二重根,则 σ_3 对应的主方向必同时垂直于 σ_1 和 σ_2 对应的主方向,即与 σ_3 对应的主方向相垂直的任何方向都是主方向。

③ 3个主应力全相等($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$),即特征方程(2.15)有三重根,则此时相应的应力状态称为球形应力(或静水压力)状态。即是过 P 点的任意3个彼此正交的方向都可选为应力主方向。

现在求出主方向,设与主应力 $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$ 对应的主方向为 $N_i = (l_i, m_i, n_i)$ 于是求出 N_i 的方程应为

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_i)l_i + \tau_{xy}m_i + \tau_{xz}n_i &= 0 \\ \tau_{xy}l_i + (\sigma_y - \sigma_i)m_i + \tau_{yz}n_i &= 0 \\ \tau_{xz}l_i + \tau_{yz}m_i + (\sigma_z - \sigma_i)n_i &= 0 \\ l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

由式(2.17)中前3个方程中适当取出2个方程与第4式联解,则可求出与 σ_i 对应的主方向。

这里还需说明, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 是一点正应力 σ_N 的极值,若令 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, 则应有 $\sigma_1 = (\sigma_N)_{\max}, \sigma_3 = (\sigma_N)_{\min}$,有兴趣的读者可自行证明。

2.4 最大剪应力

令过点 P 的任一平面的法线为 $N(l, m, n)$,在这面上的应力矢量是 F_N ,它的3个分量可由该点的主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 表示为

$$X_N = \sigma_1 l, Y_N = \sigma_2 m, Z_N = \sigma_3 n \quad (2.18)$$

那么该平面上的法向应力由式(2.9)得到

$$\sigma_N = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \quad (2.19)$$

F_N 的平方是

$$F_N^2 = X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 \quad (2.20)$$

该平面上的剪应力为 τ_N , 它的平方等于

$$\tau_N^2 = F_N^2 - \sigma_N^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2 \quad (2.21)$$

因为 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, 以 $n^2 = 1 - l^2 - m^2$ 代入(2.21)可得

$$\tau_N^2 = [(\sigma_1^2 - \sigma_3^2)l^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)m^2 + \sigma_3^2] - [(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3]^2 \quad (2.22)$$

若在 P 点求 τ_N 的极值, 自然就是求一组 (l, m, n) 使得式(2.22)达极值, 故应有

$$\frac{\partial \tau_N}{\partial l} = 0 \quad \frac{\partial \tau_N}{\partial m} = 0 \quad (2.23)$$

求导后得出确定 l 和 m 的两个方程

$$\left. \begin{aligned} l(\sigma_1 - \sigma_3)[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)] &= 0 \\ m(\sigma_2 - \sigma_3)[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

同理也可求得关于确定 m 和 n 以及 n 和 l 的方程, 求解这些方程可以得到 (l, m, n) 的解答分别为

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

对于前3组解, 正好对应于主平面, $\tau_N = 0$, 后3组解对应的剪应力为

$$\textcircled{1} \text{ 当 } (l, m, n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \text{ 时, } \tau_N^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \equiv \tau_{12}^2$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } (l, m, n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ 时, } \tau_N^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 \equiv \tau_{13}^2$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } (l, m, n) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ 时, } \tau_N^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \equiv \tau_{23}^2$$

τ_{12} 、 τ_{13} 、 τ_{23} 称为主剪应力, 其中的最大者即为最大剪应力, 按对主应力大小的约定, 显然有

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \\ \tau_{\min} &= \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \end{aligned} \quad (2.25)$$

这个最大剪应力的作用面法线是 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

由空间解析几何可知, 剪应力作用面的法线与 σ_1 、 σ_3 作用面的法线分别成为 $\pm 45^\circ$ 角, 若切取 $O\sigma_1\sigma_3$ 平面, 则受力情况如图 2.7 所示。另两种情况与此相同, 只是轮换次序而已。

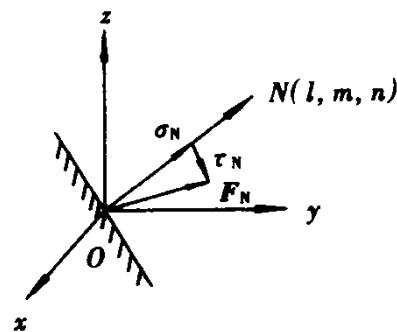


图 2.6

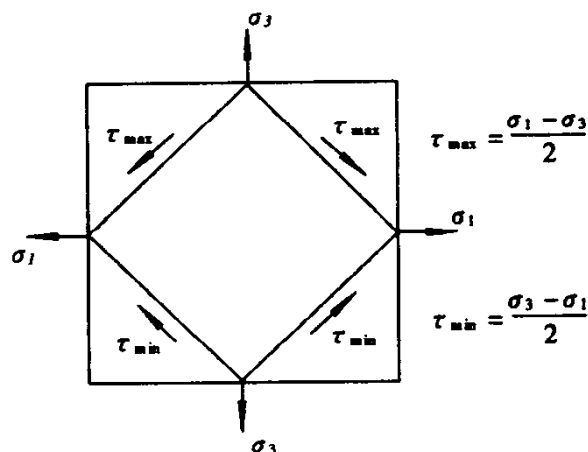


图 2.7

2.5 平衡微分方程

物体受力作用后处于平衡状态,那么物体任一点都必处于平衡,反之,每一个微元的平衡也就保证了整个物体的平衡。因此可以从物体中取出任一微元体进行平衡分析,若取出一微小的平行六面体其各面平行于各坐标面,如图 2.8 所示,六面体三棱边的边长分别为 dx, dy, dz , 由于应力分量是点的坐标的连续函数,所以各相对面上的应力分量应是不同的。另外,设平行六面体还受体积力 $f(f_x, f_y, f_z)$ 作用。

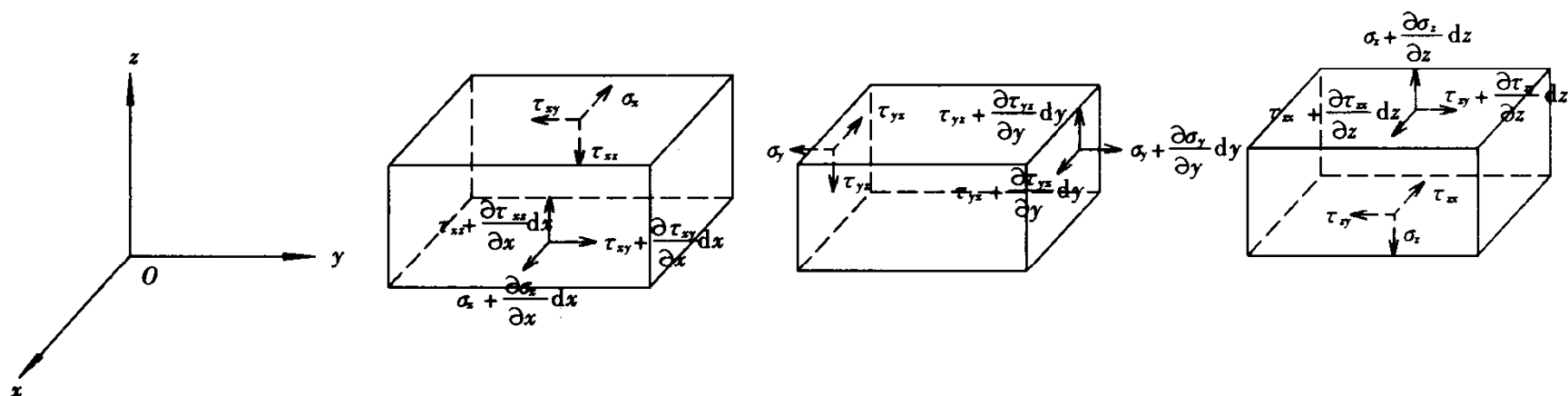


图 2.8

作用在这一微元体上所有的力应满足下述的 6 个平衡方程,即

$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum Z = 0, \sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0$$

前 3 个方程分别为 X, Y, Z 方向力的平衡,后 3 个方程分别为绕 x, y, z 轴力矩的平衡。由 $\sum X = 0$, 得

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + f_x dx dy dz = 0$$

用 $dx dy dz$ 除以上式两边,并整理方程,则有

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0 \quad (2.26a)$$

同理,由其他两个力的平衡条件 $\sum Y = 0$ 和 $\sum Z = 0$, 可得

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \quad (2.26b)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \quad (2.26c)$$

平衡微分方程(2.26) 给出了应力与体力之间的关系,若问题为动力学问题,即物体处于运动中,则还应包括惯性力作用项,作为静力问题仅用(2.26) 式。

若考察力矩平衡条件,并在推导过程中略去微元尺寸的四阶小量项,如 $dx dx dy dz$, 不难发

现,又一次得到了剪应力互等定律,即

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (2.27)$$

公式(2.26)即是弹性力学中直角坐标系下三维问题的平衡微分方程。

在工程实际中,经常会遇到一些柱体或球体形状的受力物体,在此情况下采用空间柱坐标或球坐标更为方便,下面将推导出柱坐标下的平衡微分方程。

取柱坐标为 (ρ, φ, z) ,在物体中用各坐标平面切出一微元体(见图 2.9),微元体上作用的应力分量为

$$\begin{bmatrix} \sigma_\rho & \tau_{\rho\varphi} & \tau_{\rho z} \\ \tau_{\varphi\rho} & \sigma_\varphi & \tau_{\varphi z} \\ \tau_{z\rho} & \tau_{z\varphi} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

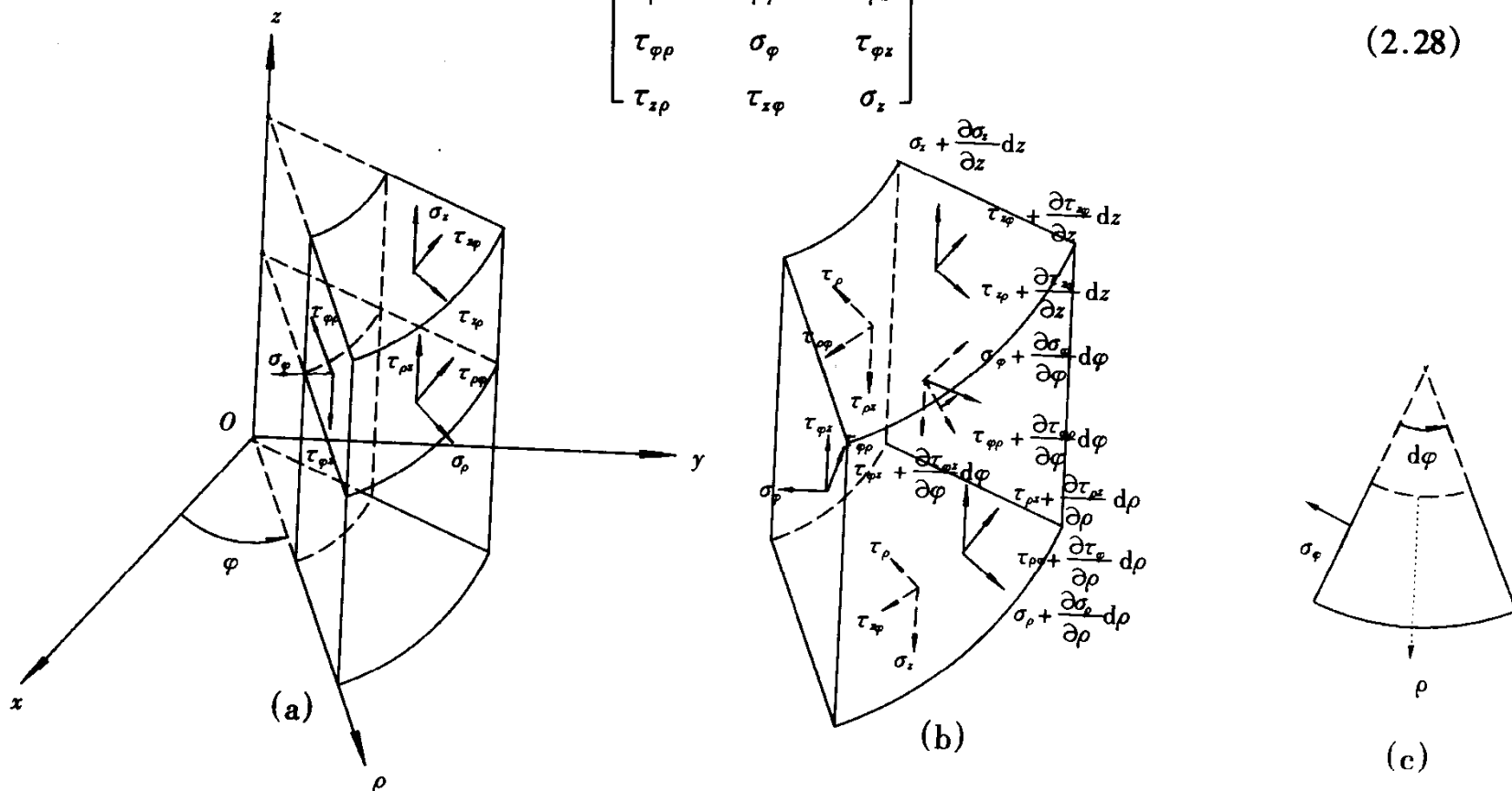


图 2.9

与直角坐标下求得平衡方程的方法相同,仍考虑微元体上在应力及体力 $f(f_\rho, f_\varphi, f_z)$ 作用下的6个平衡方程。

考虑 ρ 方向力的平衡,有

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_\rho + \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} d\rho \right) (\rho + d\rho) d\varphi dz - \sigma_\rho \rho d\varphi dz + \left(\tau_{z\rho} + \frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial z} dz \right) \frac{(\rho + d\rho)d\varphi + \rho d\varphi}{2} d\rho - \tau_{z\rho} \frac{(\rho + d\rho)d\varphi + \rho d\varphi}{2} d\rho \\ & + \left(\tau_{\varphi\rho} + \frac{\partial \tau_{\varphi\rho}}{\partial \varphi} d\varphi \right) d\rho dz - \tau_{\varphi\rho} d\rho dz - \left[\left(\sigma_\varphi + \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \right) d\rho dz + \sigma_\varphi d\rho dz \right] \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} + f_\rho \cdot \frac{(\rho + d\rho)d\varphi + \rho d\varphi}{2} d\rho dz = 0 \end{aligned}$$

上式中的 σ_φ 在 ρ 方向的投影见图 2.9c,略去高阶微量,并取 $\sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}$,则有:

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} (\sigma_\rho - \sigma_\varphi) + f_\rho = 0 \quad (2.29a)$$

另外两个平衡方程请读者自行推导,这里给出结果

$$\frac{\partial \tau_{\varphi\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{\rho} \tau_{\rho\varphi} + f_\varphi = 0 \quad (2.29b)$$