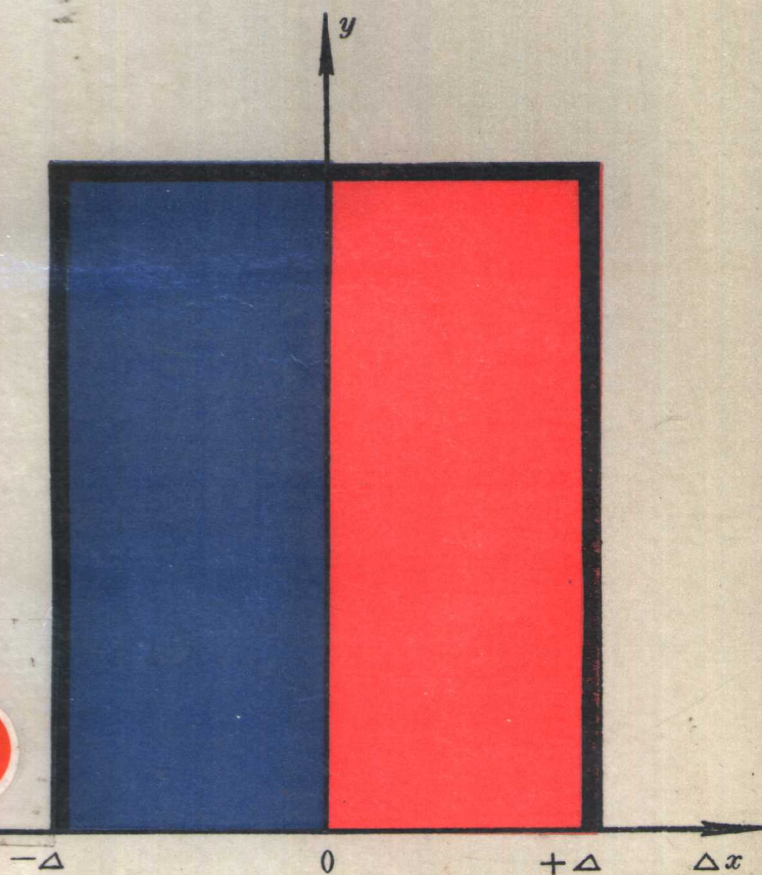


物理测量的 误差评定

李化平



高等教育出版社

物理测量的误差评定

李 化 平

高等教育出版社

(京) 112 号

内 容 提 要

本书论述了误差、不确定度及其在物理实验中的应用。全书分七章，第一章介绍了物理实验中的名词、术语和概念，第二章分析了误差与数据处理教学中的若干问题，第三章至第五章介绍了系统误差、偶然误差及核实验中的统计误差，第六章是设计性实验教学内容和基本方法，第七章介绍实验不确定度的评定方法及国际上对这一问题的研究进展情况。全书尽量引用最新成果，内容密切结合实际。

本书可作为理工科大院校师生的教学参考书，也可供科学工作者和工程技术人员参考。

物理测量的误差评定

李化平

高等教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 6.375 字数 150 000

1993年10月第1版 1993年10月第1次印刷

印数 0001—1 704

ISBN 7-04-004046-8/O·1173

定价4.20元

目 录

第一章 物理实验中的名词、术语和概念	1
1.01 [量的]真值	1
1.02 [量的]约定真值	1
1.03 测量结果	2
1.04 [测量仪器的]示值	2
1.05 影响量和干扰量	2
1.06 精密度、准确度、精确度和正确度	3
1.07 精度	4
1.08 [绝对][测量]误差	5
1.09 测量的重复性和重复性误差	6
1.10 测量的复现性	6
1.11 测量准确度和仪器准确度	7
1.12 实验标准差(标准偏差)	7
1.13 测量的不确定度	8
1.14 期望[值]与[随机变量]方差	9
1.15 协方差与相关系数	9
1.16 偶然误差和随机误差	10
1.17 系统误差	11
1.18 修正值	11
1.19 示值误差	11
1.20 引用误差	12
1.21 极限误差	12
1.22 视差	13
1.23 稳定度和漂移	14
1.24 灵敏度	14
1.25 鉴别力阈	15

1.26	激励与响应	15
1.27	仪器准确度、仪器误差、分度值和鉴别力阈	16
1.28	基本误差(固有误差)与附加误差	17
1.29	允许误差	17
第二章	误差与实验数据处理中的几个问题	19
2.01	系统误差与偶然误差	19
1.	系统误差与偶然误差的关系	19
2.	系统误差与偶然误差的合成	20
2.02	测量精度的评定	22
1.	平均误差	23
2.	方均根误差(标准差)	23
2.03	关于测定次数的问题	26
2.04	仪器准确度(精确度)和仪器误差	27
2.05	单次测量的标准差估计	31
2.06	误差的传播和结果精度的评定	34
2.07	有效数字及其有关问题	37
1.	数字的舍入规则	37
2.	有效数字的两种定义	38
3.	与有效数字有关的几个问题	39
2.08	误差公式的推导和误差计算的简化	43
1.	用对数微分法推求相对误差(最大)公式	43
2.	误差计算的简化	44
2.09	确定组合测量参数的几种常用方法	47
1.	描点作图法	48
2.	逐差算法	48
3.	平均法	50
4.	最小二乘法	51
2.10	线性回归方向选择的分析	52
第三章	偶然误差	60
3.01	正态分布	61

3.02	偶然误差的各种表示式	65
3.03	算术平均值(最佳值)	69
3.04	测量次数 n 有限时, 用残差(或偏差)表示的 偶然误差表示式	71
3.05	算术平均值的误差	74
3.06	t 分布(“学生”分布)	75
3.07	测量列中异常值的剔除	80
1.	来伊达准则	81
2.	肖维涅准则	81
3.	格拉布斯准则	83
3.08	不等精度测量	85
1.	权的概念和加权平均值	85
2.	权的确定	88
3.	单位权及其方差	89
3.09	函数的误差(误差传播定律)	92
1.	函数的最大误差	93
2.	间接测量误差传播的一般公式	94
3.	间接测量中权的传播	97
3.10	标准偏差计算实例	98
第四章	核衰变的统计规律及测量结果的处理	102
4.01	泊松分布公式	102
4.02	泊松分布的一些性质	106
4.03	泊松分布的误差	109
4.04	本底计数率	114
4.05	分布规律的 χ^2 检验法	115
4.06	实物对 β 射线吸收实验的数据处理	116
第五章	系统误差	120
5.01	系统误差的特征和分类	120
1.	系统误差的特征	120
2.	系统误差的来源和分类	121

5.02	如何发现实验或测量中存在系统误差	123
1.	分析实验依据的理论公式所要求的约束条件在测量中 是否已被满足	123
2.	分析实验仪器所要求的使用条件是否已经在测量过程 中被满足	124
3.	对比的方法	124
4.	数据分析法	125
5.	计算数据比较法	126
6.	多组测量的方差分析	128
5.03	消除系统误差的方法	132
1.	从误差来源上消除系统误差	132
2.	用修正方法消除系统误差	132
3.	应用测量技术消除系统误差	132
5.04	系统误差已消除的判据	136
第六章	设计性实验	140
6.01	根据实验目的和要求来选择测量方法和仪器	140
1.	测量方法的精度分析	140
2.	测量仪器的选择	141
6.02	测量最有利条件的确定	142
6.03	按对函数的误差要求确定误差分配, 合理选配仪器 和确定测量条件	144
第七章	实验不确定度的评定	156
7.01	不确定度的统计处理方法	157
1.	贝塞尔法	157
2.	最大残差法	158
3.	最大误差法	158
4.	极差法	159
5.	分组极差法	160
7.02	不能用统计法计算的不确定度	161
1.	误差来源的不确定度	161

2. 能估计误差限 $\pm a$ 及分布的误差分量	161
3. 仅能估计误差限 $\pm a$,但不能确切掌握规律的误差分量.....	162
7.03 合成不确定度与总不确定度	163
7.04 不确定度的传播	165
7.05 测量不确定度的计算实例	166

附录 I

实验不确定度的研究进展及有关资料介绍	177
一、不确定度与误差	177
二、国际计量局(BIPM)关于不确定度《征求意见稿》 的主要内容(1978)	178
三、我国对“意见书”的答复	181
四、BIPM “关于不确定度的说明、建议书”INC-1(1980)	181
五、关于 INC-1 (1980)的制订过程及其基本思想	182
六、国际计量委员会(CIPM)对 INC-1(1980)的讨论意见	184

附录 II

物理测量中的不确定度表示指南	185
一、基本名词和术语	185
二、基本概念	186
三、合成不确定度	192
四、报告不确定度	194

第一章 物理实验中的名词、术语和概念

1.01 [量的]真值

对真值的定义表述有多种,现摘引几种如下:

1. “被测量本身所具有的真实大小称为真值”。^[1]
2. “如果实验已消除系统误差,只存在偶然误差,……,无穷多个观测值的平均值,就是被测物理量的真值。”^[2]
3. “表征在研究某量时所处的条件下严格地确定的量值。”^[3]
量值是指用数和适宜的单位表示的值。

比较上述对真值的几种定义,可看出:1. 是理想化的、理论上的定义;2. 的定义物理图象不清晰,侧重于从数字上来定义真值;3. 的定义是客观的、科学的,也很确切,它体现了真值的客观存在,又排除了真值的宏观取值的不确定性。例如,钢丝的直径就不是一个严格确定的量值,存在不可避免的由于加工不完美而造成的直径取值的固有不确定性。因而,在肯定真值的客观性的同时,又应注意到它取值可能存在的宏观不确定性。

所以,真值尽管是客观存在的,但也还是一个理想的概念,通常是不可能确切地知道的,若再考虑到微观的量子效应,就更应排除唯一的真值的存在了。

1.02 [量的]约定真值

即为了某种目的,可以替代真值的量值。

一般说来,约定真值被认为是非常接近真值的,它们之间的差别可略去不计。

无系统误差条件下的算术平均值、标称值、校准值、理论值、公

认值等均可作为约定真值来使用。

1.03 测量结果

即通过测量得到的被测量的值。

当使用“测量结果”这个术语时,应当明确,它是示值、未修正结果或是已修正结果,以及是否已对几次观测值进行了平均。

完整的测量结果说明,应包含有关于测量不确定度的信息和关于适宜的影响量值的信息。

1.04 【测量仪器的】示值

即测量仪器所提供的被测量的值。

应作如下说明:

1. 示值用被测量的单位表示,而不管注在标尺上的单位。出现在标尺上的值(直接示值)需乘以仪器常数以得到示值。

2. 实物量具的示值就是它的标称值。

3. 术语示值的含义有时可以扩展,包括记录式仪器所记录的量值,或测量系统中的测量信号。

1.05 影响量和干扰量

影响量不是测量的对象,但却影响被测量的量值或仪器示值,它通常是一种与待测的量有一定函数关系的另一种性质的量。例如在测电阻时,由于材料电阻随温度改变,因此在测量电阻这一待测量时,温度这个不是测量对象的量却在影响着电阻值的测量结果,所以温度就是电阻测量中的影响量。影响量对测量结果带来的影响可以在测出影响量的大小后,按其函数关系从测量结果中加以消除。

干扰量是一种与待测的量没有必然联系的外界强行渗入的量。它与待测量没有一定的函数关系,故不能通过测出干扰量的

大小、从测量结果中加以消除。例如拍摄全息照片时外界的振动，探测器的噪声，都会给测量工作造成干扰，这样的一些量，称为干扰量。

为了保证测量的准确度，在安排测量环境条件时，要消除影响量和最大限度减小干扰量。

1.06 精密度、准确度、精确度和正确度

精密度(precision)是指重复测量所得结果相互接近的程度。显然它是描述实验(或测量)的重复性程度的尺度。

准确度(accuracy)或精确度，是指测量值或实验所得结果与真值符合的程度。它是描述测量值接近真值程度的尺度。

正确度(correctness)反映测量结果系统误差(包括随机误差的期望值)大小的程度。

精密度、准确度、精确度和正确度在使用上有两类表示方法：

1. 用精密度反映偶然误差大小的程度；用准确度反映系统误差大小的程度^[4]；用精确度反映系统误差与偶然误差的综合效果。
2. 用精密度反映偶然误差大小；用正确度反映系统误差大小；用准确度反映二者的综合效果^[5]。

比较上述两类表示方法，可以看出准确度这个词尚无统一的定义。大学物理实验教材和一些科技书籍中还多采用前一种表示方法；计量部门出版的有关文献资料中则使用后一种表示方法。在英文图书资料中，用来衡量偶然误差、系统误差和二者的综合总误差等概念，常用的只有 precision 和 accuracy 两个词，对应的中文译名分别为“精密度”和“准确度”。前者定义明确，反映重复测量所得结果相互接近的程度，即精密度反映的是偶然误差大小；后者是描述测量值接近真值程度的尺度，它既可以理解为反映系统误差大小的程度，也可理解为反映系统误差与偶然误差的综合，因为测量值偏离真值可以是由系统误差造成，也可以是二者的综合影

响。事实上,不同的外文资料对 accuracy 所赋予的含义也不尽相同。由于存在上述使用上的不统一,就容易给人们造成错误的理解。例如,电磁测量仪器和仪表一般均按照部颁标准用准确度等级来表示产品相应的计量性能指标,因此,对于仅熟悉并习惯于用上述第一种表示方法的人就产生如下的问题:(1)准确度是反映系统误差大小的,所以仪器仪表的误差性质是系统误差,进而在处理实验数据时,将其与测量的偶然误差合并作为测量结果的误差;(2)承认仪表误差性质包含系统误差与偶然误差两方面的因素,因而认为准确度级别用词不妥,应改为精确度级别。显然问题(1)和问题(2)都是由于不熟悉两种表示方法所造成的错误理解,当然也与对仪器误差性质认识不清有关。在1990年国家技术监督局组织制定的《测量误差与数据处理技术规范》中,规定以第二种表示方法对精密度、正确度和准确度加以定义。建议今后编写的大学物理实验教材中所涉及的名词、概念和术语应尽量与国家标准一致。

精密度、正确度和准确度一般均只用于定性概念。

1.07 精 度

精度这个词的使用也是很不一的,现摘引几种介绍如下:

1. 定义仪器的精度是其分辨能力的标志,通常可以用仪器的最小分度来表示。

仪器的精度可能超过其准确度,温度计的精度可达 0.2°C ,但其准确度是 $\pm 1^{\circ}\text{C}$ 。^[6]

2. 机械式秒表和杠杆式天平的部颁标准均使用精度级别这个词,而电子仪器产品则又常用测量精度作为它的一项质量指标。对天平,规定精度级别为名义分度值与最大负荷之比,例如,最大载荷为200 g,分度值为0.1 mg,则精度为

$$\frac{0.0001\text{g}}{200\text{ g}} = 5 \times 10^{-7},$$

即为3级天平。

3. 精度是一个有概括含义的词, 其意义可以这样来理解, 如果测量结果的相对误差为 0.1% , 则笼统地说其精度为 10^{-3} , 为了语法表达与量值大小的一致, 常规定精度的数值指标为测量相对误差的倒数, 即此例中的精度为 10^3 , 如果测量误差纯由偶然误差引起, 则精度就是指精密度; 如果误差是由系统误差引起, 则精度就是指准确度(第一种表示方法)或正确度(第二种表示方法); 如果误差是由偶然误差与系统误差共同引起(如未经校准的 0.5 级或 1 级电表), 则精度泛指二者^[7].

4. 精度一词有时特指精密度的简称^{[8]*}. 例如, 误差理论中经常用到的等精度测量, 就是指测量的精密度相等.

对于“1.”, 原文用词是 precision, 显然作者指的是精密度, 是译者把它翻译成精度, 似不甚妥, 因为原作者对该词所作的阐述并不是“4.”的情况, 也许把 accuracy 理解为精度(标准译文是准确度)还较为合适一些. 其次, 作者对精密度的定义也与人们对它的习惯理解不甚相同, 也与许多文献资料的解释不同, 这就容易造成对概念理解的混乱, 应按照 1.06 的介绍来理解精密度较为合适. “2.”是部颁标准(JB1277-73, QB 376-64)对秒表和天平计量性能指标的特殊用词, 精度等级仍可理解为准确度等级, 精度的意义可按“3.”的介绍来理解. “3.”是对精度比较普遍的认识, 为多数实验工作者所接受. “4.”是在特定条件下(如实验中系统误差已得到消除)对精密度的一种简称. 精度相等, 即要求实验标准差相同, 对同一量在相同条件下进行多次重复测量是等精度测量, 用同一仪表的同一量程或量具(如温度计)对不同量值所做的一系列测量(回归分析就经常有这样的问題)也认为是等精度测量.^[9]

1.08 [绝对][测量]误差

测量结果减去被测量的(约定)真值. 即

* 此看法不具有普遍意义, 不适宜推广.

$$\text{误差} = \text{测量值} - \text{真实值}$$

上式定义的误差反映的是测量值偏离真实值的大小和方向，因此又常称它为绝对测量误差，或简称为绝对误差。

“绝对误差”有符号，不应将它与误差的绝对值相混淆，后者是误差的模。将绝对误差除以被测量的（约定）真值得到的测量误差称为相对误差，考虑到一般情况下测量值与真实值相差不会太大，故可用误差与测量值之比作为相对误差。

按测量误差产生的原因和性质，测量误差可分为偶然误差和系统误差两类误差（定义见后）。严格地说，测量误差不能用于表征测量的准确度，因为对偶然误差部分，在以统计法求出其标准差时，存在一个置信限有多大的问题；而对于系统误差的部分，由于不可能全部掌握系统误差的信息，对于已采用修正值修正的已修正结果，其误差值含有不确定度，因而也不能准确地给出绝对误差的大小，所以，对于测量的准确度，只能用测量的不确定度（定义见后）来表征。

1.09 测量的重复性和重复性误差

测量的重复性是指在下述条件下，对同一被测的量进行多次连续测量所得结果之间的符合程度。

这些条件是：测量方法、观测人员、测量仪器、测量地点和使用条件都相同，并且在短时间内的重复。

重复性误差是指，将同一输入多次重复加于某一测量仪器，会得到一些不同的输出，这个偏差称为重复性误差，它可以表示为绝对单位，也可以是全刻度的百分数。

1.10 测量的复现性

表示当各次测量是在改变如下条件进行时，同一被测的量的测量结果之间的符合程度。

这些条件是：测量方法、观测人员、测量仪器、地点、使用条件和时间。

复现性同样可以用结果的分散来定量地表示。

1.11 测量准确度和仪器准确度

测量准确度 测量结果与被测量的(约定)真值之间的一致程度。应注意要避免用精密度代替准确度。

仪器准确度 测量仪器给出接近于被测量真值示值的能力。

测量准确度和仪器准确度常以相对误差(有时也用绝对误差)形式来表示。仪器准确度限定了测量时的相对误差,即限定了测量准确度。如果借助标准对仪器或仪表进行校正引入修正值,以及对被测量进行多次重复测量,前者减少或消除了仪器误差中的系统分量,后者则减小了其偶然误差分量,从而就能保证测量准确度高于用准确度级别标出的仪器准确度。^[10]

1.12 实验标准差(标准偏差)

即同一被测量的几次测量中,表征结果的分散的参数 s 。

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

其中 $\bar{x}$ 为所考虑的几个结果的算术平均值, x_i 为第 i 次测量结果。
应注意:

1. 实验标准差不应与总体标准差混淆。个数为 N 、平均值为 m 的总体标准差 σ 由下式算出。

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2}.$$

2. 如将一系列 n 次测量认作总体的一个样本,则 s 是总体标准差 σ 的一个评定。

理论上, σ 应是一个常量, s 则是一个随机变量.

3. $s/\sqrt{n}$ 是平均值 $\bar{x}$ 对整个总体平均值 m 的标准差的评定.
 $s/\sqrt{n}$ 称为平均值的实验标准差.

1.13 测量的不确定度

即测量值附近的一个范围, 这个范围可能(以相当于标准差的概率)包含被测量的真值.

测量不确定度一般包含若干个分量, 其中一些分量(A类)可用统计方法(如贝塞尔法、最大误差法、最大残差法、极差法和最小二乘法等)评定^[11], 并可用实验标准差 s_i 表征; 其它分量(B类)只能基于经验或其它信息作评定, 可由假设分布的置信因子 k_i 及估计的误差限 $\pm \Delta_i$ 按下式求得近似标准差 u_i ,

$$u_i = \Delta_i / k_i.$$

对归于B类的某一误差分量, 如果知道它所服从的分布规律, 可根据实验分析法或估计法确定它可能近似服从的误差分布, 例如指零仪表判断平衡的视差, 仪器度盘或齿轮回差引起的误差, 电子计数器的量化误差即 ± 1 误差, 数据截尾所引起的舍入误差, 李萨如图形不稳定引起的频率测量误差, 游标尺的仪器误差, 级别高的仪器和仪表的误差等, 可认为或近似地认为它们服从均匀分布^[12], 则容易知道 $k_i \approx 1.7$. 对多数B类误差因素, 若其值比较小时, 则可认为正态分布是其较好的近似, 因而 $k_i = 3$.

A类分量和B类分量的合成仍应按方差合成原理进行, 即

$$\sigma = \sqrt{\sum s_i^2 + \sum u_i^2 + \text{协方差项}}.$$

如果任意两个不确定度分量都是彼此独立的, 上式便可简化为

$$\sigma = \sqrt{\sum s_i^2 + \sum u_i^2},$$

σ 为测量结果的合成不确定度, 它也是以“标准差”形式表现出来.

1.14 期望[值]与[随机变量]方差

当离散随机变量 x 取值 x_i 的概率为 p_i 时, x 的期望值 $E(x) = \sum p_i x_i$. 当概率密度函数 $f(x)$ 的连续随机变量为 x 时, x 的期望 $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$.

随机变量 x 与期望值 $E(x)$ 之差平方的期望值, 即 $V(x) = E\{[x - E(x)]^2\}$ 为随机变量方差.

方差的正平方根称为 x 的均方根误差或标准差, 记为 $\sigma(x)$ 或简记为 σ , 即

$$\sigma = \sqrt{V(x)}.$$

1.15 协方差(covariance)与相关系数

两随机变量 x, y 取各自与其期望值之差, 其乘积的期望值即为协方差,

$$\text{cov}(x, y) = E\{x - E(x)\}\{y - E(y)\}.$$

两个随机变量 x, y 的协方差 $\text{cov}(x, y)$ 与它们的标准差之积的比即为相关系数,

$$\begin{aligned}\rho(x, y) &= \text{cov}(x, y) / \sigma(x)\sigma(y) \\ &= \frac{E(x - E(x))(y - E(y))}{\sqrt{E(x - E(x))^2 \cdot E(y - E(y))^2}}.\end{aligned}$$

相关系数反映了两误差之间线性关联的松紧程度, ρ 的值界于 -1 到 $+1$ 之间, 即

$$-1 \leq \rho \leq +1,$$

当 $\rho > 0$ 时, 称两误差正相关, 即一误差增大时, 另一误差的取值平均也增大; 当 $\rho < 0$ 时, 为负相关, 即一误差增大时, 另一误差的取值平均是减小的. 当 $\rho = 0$ 时, 称两误差不相关, 即它们的取值彼此无关.