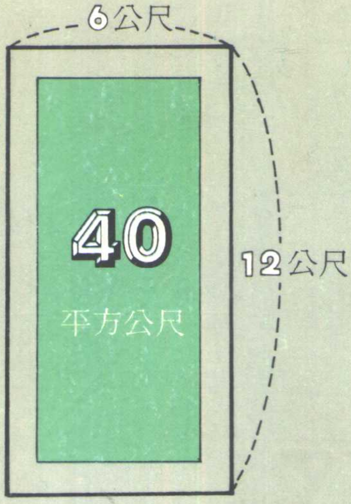
國民中學

# 數學

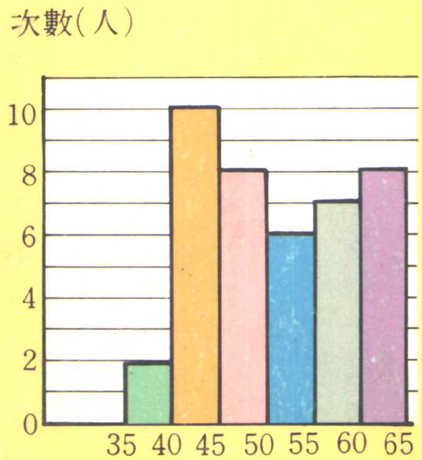
## 第四冊

$$\begin{array}{ccc} 1 & & a \\ & \times & \\ 1 & & b \\ \hline \end{array}$$

$$a+b=p$$




$$\begin{array}{rl} & S=1+2+\cdots+100 \\ +) & S=100+99+\cdots+1 \\ \hline & 2S=101+101+\cdots+101 \end{array}$$




國立編譯館主編

# 編輯大意

一、本書是根據教育部在民國七十四年四月修訂公布的國民中學數學課程標準編輯而成。

二、本書是以教育部國民中學數學課程改進研究計畫實驗研究小組所編印的試用教材爲藍本，經試用、修訂、正式使用後，於七十八學年度起，參酌使用意見，逐年加以改編。

三、本書共分四冊，每學期一冊，供國民中學第一、二學年教學之用。

四、本書旨在引導學生認識數學的功用，使其獲得數、量、形的基本知識與技能，並培養學生思考、推理的能力，以運用數學方法解決日常生活中的有關問題。

五、本書的編輯，著重國民中學數學基本能力的培養；配合學生心智發展，循序漸進，盡量透過實際操作以獲得具體的經驗，並激發學習的動機與興趣，以增進教學效果。

六、本書每節中都安排有隨堂練習，供教師在課堂上指導學生演練之用。

七、本書每節後都安排有適當分量的自我評量，以供學生在課堂上演練爲原則。

八、配合本書，另編有習作，以供學生在課外練習爲原則。

九、配合本書，另編有教師手冊，供教師參考之用。

十、本書如有未盡妥善之處，請各校教師隨時向國立編譯館提出改進意見，以供修訂時之參考。

058241

# 國民中學　數學　第四冊

# 目次

## 第 1 章　因式分解



## 第 2 章　一元二次方程式

## 第 3 章　等差數列與等比數列



## 第 4 章　資料的整理

# 第 1 章
# 因式分解

## 1-1 式子的代換

在國中數學第三冊中，我們看過下列的三個乘法公式：

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^2&=a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2&=a^2-2ab+b^2\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\text{完全平方公式}$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2\quad\cdots\cdots\cdots\text{平方差公式}$$

這些式子都是由拼湊面積的方式歸納出來的，即文字 $a$ 與 $b$ 均代表線段的長，它們都是正數。但是，如果用任意的數去取代這些文字，這些式子還是成立的，它們都是恆等式。下面是幾個基本的恆等式：

$$a+b=b+a,\ a\cdot b=b\cdot a\quad\cdots\cdots\cdots\text{交換律}$$

$$\left.\begin{aligned}(a+b)+c&=a+(b+c)\\(a\cdot b)\cdot c&=a\cdot(b\cdot c)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\text{結合律}$$

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad\cdots\cdots\cdots\text{分配律}$$

$$\left.\begin{aligned}a+0&=a\\a\cdot 0&=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots 0\text{ 的特性}$$

$$a\cdot 1=a\quad\cdots\cdots\cdots 1\text{ 的特性}$$

**例1.** 我們用任意的數取代一個恆等式中的文字（必須用同一個數取代相同的文字），就會得到一個等式。所以，一個恆等式實際上

代表了許多相同形態的等式。例如，恆等式

$$a+b=b+a$$

就代表了下列的各等式：

(1)　令 $a=\frac{1}{2}$，$b=6$，則得

$$\frac{1}{2}+6=6+\frac{1}{2}$$

(2)　令 $a=-9$，$b=0.4$，則得

$$(-9)+0.4=0.4+(-9)$$

(3)　令 $a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，則得

$$\sqrt{3}+\sqrt{2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

**例 2.**　我們也可以用不同的代數式去取代一個恆等式中的文字，而得到許多不同的恆等式。譬如說，在下列恆等式中，

$$a(b+c)=ab+ac$$

(1)　令 $a=2x+1$，$b=3x$，$c=-4$，就得到

$$\begin{aligned}&(2x+1)(3x-4)\\&=(2x+1)(3x)+(2x+1)(-4)\\&=6x^2+3x-8x-4\\&=6x^2-5x-4\end{aligned}$$

不但如此，把上面恆等式中的文字作適當的代換後，就可得其他的乘法公式；例如，

(2)　令 $a=A-B$，$b=A$，$c=-B$，就得到

$$\begin{aligned}(A-B)(A-B)&=(A-B)A+(A-B)(-B)\\&=A^2-AB-AB+B^2\\&=A^2-2AB+B^2\end{aligned}$$

(3) 令 $a=A-B$，$b=A$，$c=B$，就得到

$$(A-B)(A+B)=(A-B)A+(A-B)B$$
$$=A^2-AB+AB-B^2$$
$$=A^2-B^2$$

## ●隨堂練習

**若在下列各恆等式中作指定的代換，會得到怎樣的式子？**

① 在 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 中，令 $a=\sqrt{5}$，$b=\sqrt{3}$。

② 在 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 中，令 $a=A$，$b=-B$。

**例3.** 我們以前所學的等式，並不全都是恆等式。例如：

(1) 在下面的方程式裏：

$$2x+6=0$$

只有在用 $-3$ 取代文字 $x$ 時，等式才會成立；若用其他數取代 $x$ 時，等式則不成立。

(2) 在下面的方程式裏：

$$x+y=10$$

當 $x$ 與 $y$ 爲下表每一行的值時，則等式可以成立：

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | … | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | … |
| $y$ | … | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | … |

但若用任意二個數值去取代式中的 $x$ 與 $y$ 時，如 $x=5$，$y=6$；$x=7$，$y=-3$；…；等式並不一定成立。

## ●隨堂練習

**說明下列各等式不是恆等式：**

① $3x+5=17-4x$

② $x+y+z=180$

恆等式是數學上很重要的等式。我們在作式子的運算時，可利用恆等式而得到許多運算上的方便。例如：

1. 我們曾經學過利用下列的恆等式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

得到類似 $197\times203$ 形態求積的簡便算法如下：

$$\begin{aligned}197\times203&=(200-3)(200+3)\\&=200^2-3^2\\&=40000-9\\&=39991\end{aligned}$$

2. 在國民小學裏，我們對於二位數以上的乘法，通常採用直式計算。這個計算方法就是利用分配律

$$a(b+c)=ab+ac$$

把數的計算歸結爲一位數乘以一位數，然後再作加法。這樣，我們就不用背誦太多的乘法結果，只要記得九九乘法表，就可以把任意兩個整數相乘的結果計算出來。下面用一個例子來說明：

$$\begin{array}{rl} 21 & \\ \times\ 32 & \cdots\cdots 32=30+2 \\ \hline 42 & \cdots\cdots 21\times 2=42 \\ 63\ \ & \cdots\cdots 21\times 30=630 \\ \hline 672 & \cdots\cdots 42+630=672 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 21\times 32 &= 21\times(30+2) \\ &= 21\times 30+21\times 2 \\ &= 630+42 \\ &= 672 \end{aligned}$$

我們要注意的是，上面的計算中 $21\times 2=42$ 與 $21\times 30=630$ 並不是背出來的結果，而是利用分配律與一位數的乘法，由加法心算得到的：

$$21\times 2=(20+1)\times 2=20\times 2+1\times 2$$

$$21\times 30=(20+1)\times 30=20\times 30+1\times 30$$

如果我們把這些步驟用橫式寫出來就是下列的式子：

$$\begin{aligned} 21\times 32 &= 21\times(30+2) \\ &= 21\times 30+21\times 2 \\ &= (20+1)\times 30+(20+1)\times 2 \\ &= 20\times 30+1\times 30+20\times 2+1\times 2 \\ &= 600+30+40+2=672 \end{aligned}$$

上面的計算用到兩次分配律，這種方式在數學裏是常有的事。現在讓我們把上面的計算方法一般化，使用兩次分配律後就可得到下列的乘法公式：

$$\begin{aligned} (a+b)(c+d) &= (a+b)c+(a+b)d \\ &= ac+bc+ad+bd \end{aligned}$$

**例4.** 展開下列各式：

(1) $(a-b+c)d$　　(2) $(a+x)(c+y)$

(3) $(x-3)(x+5)$　　(4) $(4x-1)(-3x+7)$

**解**:　(1)　$(a-b+c)d=ad-bd+cd$

(2)　我們可用如下箭頭所指的方式，得到乘出的四項

$$(a+x)(c+y) \quad \begin{matrix} ac+cx \\ ay+xy \end{matrix}$$

得 $(a+x)(c+y)=ac+cx+ay+xy$

(3)　我們可用如右箭頭所指的方式，得到乘出的四項爲

$$x^2-3x+5x-15 \qquad\qquad (x-3)(x+5)$$

把 $-3x$ 與 $5x$ 合併成 $2x$，得

$$(x-3)(x+5)=x^2+2x-15$$

我們也可以用直式乘法得到相同的結果：

$$\begin{array}{rl} & x-3 \\ \times) & x+5 \\ \hline & x^2-3x \\ & \quad\;\; 5x-15 \\ \hline & x^2+2x-15 \end{array}$$

(4)　$(4x-1)(-3x+7)$

$=(4x)\cdot(-3x)+(-1)\cdot(-3x)$

$\quad+(4x)\cdot 7+(-1)\cdot 7$

$=-12x^2+3x+28x-7$　　　　$(4x-1)(-3x+7)$

$=-12x^2+31x-7$

直式乘法如下，其結果是相同的：

$$\begin{array}{r} 4x-1 \\ \times)\ -3x+7 \\ \hline -12x^2+\ 3x\phantom{-7} \\ 28x-7 \\ \hline -12x^2+31x-7 \end{array}$$

## ●隨堂練習

① 仿照上例展開下列各式:

(a) $(x-2y+z)(-a)$

(b) $(3+x)(4-y)$

(c) $(2x-3)(2x+5)$

(d) $(4a+3)(-5a+6)$

② 在公式 $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$ 中, 分別以下列指定的數或文字取代 $a$, $b$, $c$ 與 $d$, 驗證下列各式:

(a) 令 $a=c=x$, $b=d=y$, 驗證

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

(b) 令 $a=c=x$, $b=d=-y$, 驗證

$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$

(c) 令 $a=c=x$, $b=-d=y$, 驗證

$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$

我們也學過利用公式

$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$$

經過適當的代換和整理後, 推出立方和與立方差的公式:

$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$ ……………………………立方和公式

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3 \cdots\cdots\cdots\cdots \text{立方差公式}$$

我們也可以使用直式交叉相乘法而得到上述公式，例如：

$$\begin{array}{rllll}
 & x & +y & & \\
\times) & x^2 & -xy & +y^2 & \\
\hline
 & x^3+x^2y & & & \cdots\cdots (x+y)x^2 \\
 & & -x^2y & -xy^2 & \cdots\cdots (x+y)(-xy) \\
 & & & xy^2+y^3 & \cdots\cdots (x+y)y^2 \\
\hline
 & x^3+0 & +0 & +y^3 &
\end{array}$$

此外，我們也知道由立方和公式及適當的代換可推得立方差公式，由立方差公式及適當的代換可推出立方和公式。例如，以 $(-y)$ 取代立方和公式中的 $y$，同時注意到 $(-y)^3=-y^3$，則由立方和公式

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$$

可得

$$[x+(-y)][x^2-x(-y)+(-y)^2]=x^3+(-y)^3$$

即得立方差公式

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$$

## ●隨堂練習

① 試在立方差公式中以 $(-y)$ 取代 $y$，看看能否得到立方和公式。

② 試以 $x=2a$，$y=-3b$ 分別代入立方和與立方差公式，看看會得到怎樣的式子。

③ 試以 $x=-\dfrac{a}{3}$，$y=\dfrac{b}{2}$ 分別代入立方和與立方差公式，看看會得到怎樣的式子。

# 自我評量 1-1

1. 展開下列各式：

(1) $(2x+3)(2x-3)$

(2) $(\frac{1}{3}x-y)(\frac{1}{3}x+y)$

(3) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

(4) $(a-b+c)(a+b-c)$

(5) $(4a^2+3b)^2$

(6) $(x+1)^2(x-1)^2$

(7) $(3x+5)(9x^2-15x+25)$

(8) $(\frac{x^2}{2}-y)(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y}{2}+y^2)$

2. 將邊長為 $w$ 公分的正方形，改成一邊增長 3 公分，另一邊減少 2 公分的長方形。試用 $w$ 的多項式表示出這個長方形的面積。

## 1-2 提出公因式

我們可以把兩個以上的整數相乘得到積。例如：

$$(-2)\times 5\times(-3)=30$$

反過來說，我們也可以把一個整數分解爲兩個以上整數的連乘積，這種運算就叫做因數分解。例如：

$$\begin{aligned}-21&=(-1)\times 21=1\times(-21)\\&=(-3)\times 7=3\times(-7)\end{aligned}$$

因此，$1,-1$，$3,-3$，$7,-7$，$21,-21$ 都是 $-21$ 的因數，而 $-21$ 則是這些數的倍數。

多項式的情形也是一樣，我們可以把兩個以上的多項式相乘得到積。例如：

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

反過來說，我們也可以把一個多項式分解爲兩個以上多項式的連乘積，這種運算叫做**因式分解**。例如：

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

仿照上面因數與倍數的說法，我們把 $a+b$ 與 $a-b$ 叫做 $a^2-b^2$ 的**因式**，而把 $a^2-b^2$ 叫做 $a+b$ 與 $a-b$ 的**倍式**。同樣的，$a-b$ 與 $a^2+ab+b^2$ 是 $a^3-b^3$ 的因式，而 $a^3-b^3$ 是 $a-b$ 與 $a^2+ab+b^2$ 的倍式。

我們可用除法檢查一個整數是否爲另一個整數的因數。例如，23 是否爲 483 的因數？如果 23 是 483 的因數，就會有一個整數 $x$，使得 $483=23x$，所以可用除法判定。由下面的直式計算知道 $483=23\times 21$。因此，23 是 483 的因數。

$$
\begin{array}{r}
21 \\
23\overline{\smash{)}\,483} \\
\underline{46\phantom{3}} \\
23 \\
\underline{23} \\
0
\end{array}
$$

我們也可用除法檢查一個多項式是不是另一個多項式的因式。例如，$2x+3$ 是否爲 $4x^3+8x^2+3x$ 的因式？由下面的直式計算知道，$2x+3$ 可以整除 $4x^3+8x^2+3x$，所以 $2x+3$ 是它的因式。

$$4x^3+8x^2+3x=(2x+3)(2x^2+x)$$

$$
\begin{array}{r}
2x^2+x\phantom{+3x} \\
2x+3\overline{\smash{)}\,4x^3+8x^2+3x} \\
\underline{4x^3+6x^2\phantom{+3x}} \\
2x^2+3x \\
\underline{2x^2+3x} \\
0
\end{array}
$$

**●隨堂練習**

① 檢查看看 7 是不是 945 的因數？

② 檢查看看 $x+5$ 是否爲 $x^3+6x^2-25$ 的因式？

我們可以用除法判定一個式子 $A$ 是否爲另一個式子 $B$ 的因式。但是，如果只有一個式子 $B$，要找出它的因式就不是如此單純。因爲我們總不能隨便找個式子 $A$ 來試除，這樣要試的式子就太多了，所以必須要使用其他的方法。

把一個式子因式分解的方法主要有兩種，一種是本節下面要講的提出

公因式的方法，另一種是下節要談的利用乘法公式的方法。我們在下面先把提出公因式的方法分成幾種情形加以討論。

### (一)　從各項中提出公因式

讓我們看看如何因式分解下面的式子：

$$ab+ac$$

從上面的式子，我們不難看出 $a$ 是 $ab$ 的一個因式，也是 $ac$ 的一個因式，所以 $a$ 就是 $ab$ 與 $ac$ 的一個**公因式**。如果一個式子中的各項有一個公因式，我們就可以把它提出來，而達到因式分解的目的。提的方法是用 $a$ 依次去除 $ab$ 和 $ac$ 而得到商 $b$ 和 $c$：

$$ab+ac=a(b+c)$$

**例1.**　因式分解下列各式：

(1)　$ab-ac+a$

(2)　$abc+abd-3ab$

(3)　$6a^3x^4-8a^2x^5+14ax^6$

**解**：(1)　$ab-ac+a$ 中每一項都含有因式 $a$，將 $a$ 提出，可得到下列的因式分解：

$$ab-ac+a=a(b-c+1)$$

(2)　$abc+abd-3ab$ 中各項都有公因式 $a$ 與 $b$，把這兩個公因式提出來，可得下列的因式分解：

$$abc+abd-3ab=ab(c+d-3)$$

(3)　$6a^3x^4-8a^2x^5+14ax^6$中各項都有公因式 2、$a$ 與 $x^4$，把公因式 $2ax^4$ 提出來，就得到下列的因式分解：

$$6a^3x^4-8a^2x^5+14ax^6=2ax^4(3a^2-4ax+7x^2)$$

● **隨堂練習**

從各項中提出公因式，作下列各式的因式分解：

① $xyz+xy-4xz$

② $6a^2x^3-4a^3x^2+8a^4x$

## (二) 分組提出公因式

下列式子的各項並沒有公因式，

$$ac+ad+bc+bd$$

所以不能直接由各項提出公因式而得到因式分解。但前兩項有公因式 $a$，後兩項有公因式 $b$，提出來後得到

$$\begin{aligned}ac+ad+bc+bd&=(ac+ad)+(bc+bd)\\&=a(c+d)+b(c+d)\end{aligned}$$

由此不難看出，$(c+d)$是 $a(c+d)$與 $b(c+d)$這兩項的公因式，把它提出來，就得到下列的因式分解：

$$\begin{aligned}ac+ad+bc+bd&=a(c+d)+b(c+d)\\&=(c+d)(a+b)\\&=(a+b)(c+d)\end{aligned}$$