数学奥林匹克

主编 单墫

初中版

初二分册

北京大学出版社

数学奥林匹克

（初中版）

初二分册

单　墫　主编

北京大学出版社

新登字(京)159号

数学奥林匹克(初中版)

初二分册

单 墫 主编

责任编辑：王明舟

*

北京大学出版社出版

(北京大学校内)

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

787×1092毫米 32开本 11印张 200千字

1991年6月第一版 1992年3月第三次印刷

印数：81,001—181,000册

ISBN7-301-01514-3/G·84

定价：5.00元

序

哪位少年没有凌云壮志？哪位家长不曾望子成龙？

要将理想化为现实，必须打好基础，循序渐进。

好的读物正是通往理想的桥梁。

北京大学出版社热心青少年的智力开发，出版了数学奥林匹克系列图书。这一套初中版，是为初中年级写的，它有以下特点：

1．**趣**。书中图文并茂，文字生动活泼，饶有趣味；图画更有助于增强数学的直觉，提高学习兴趣。

2．**浅**。内容少而精。每讲侧重一两个方法，不过深、过多、过难，坚持“宁肯少些，但要好些”的方针，并且配合教材，易教易学。

3．**多练习**。“学数学的最好方法就是做数学”，书中有大量练习，所学的知识可以得到消化、巩固。练习均有答案，对于学生自学或家长辅导均极方便。

初一分册由曹鸿德先生等人编写；

初二分册由魏有德先生等人编写；

初三分册由熊斌先生等人编写。

胡大同先生审阅了初稿并做了修改、润色工作。参加本套图书编写工作的同志都是富有经验的教育家，对数学奥林匹克，尤有精湛的研究。我们希望这一套精心设计的读物，将会成为广大少年儿童的良师益友，教师和家长的得力助手。

单 墫

1991年3月

数学奥林匹克

初中版

初二分册

责任编辑　王明舟

封面设计　林胜利

目　录

第一讲 实　　数

在初中数学竞赛中涉及到的数都是实数，本讲拟通过解答一些有关实数的例题，向读者介绍实数的一些基本知识和运用这些知识解决有关问题的一些基本方法。

1. 实数的性质

有理数和无理数统称实数。有理数可以写成$\frac{m}{n}$的形式（其中m,n为没有公因数的整数，且$n\neq0$），有理数也可以写成有限小数(整数可以看作小数点后面是0的小数)或者循环小数的形式，反过来也对。无理数是无限不循环小数。

例1 试证两个有理数之间存在着无限多个有理数。

分析　设法构造出符合条件的有理数。

证　设a,b是两个有理数，且$a<b$，则

$$a=\frac{a+a}{2}<\frac{a+b}{2}<\frac{b+b}{2}=b,$$

记$c_1=\frac{a+b}{2}$，即$a<c_1<b$，同样记$c_2=\frac{a+c_1}{2}$，同理可得$a<c_2<c_1,\cdots$，依次推得这样的$c_i(i=1,2,3,\cdots)$有无限多个，都是有理数，于是结论得证。

说明　以上结论称为有理数的稠密性。

例2 求证任何有理数的平方都不等于2(即证方程$x^2-2=0$在有理数范围内无解)。

分析 用反证法，证明任何既约分数 $\frac{m}{n}$(m,n 是自然数)的平方不等于2。

证 因 $1^2<2<2^2$，故任何整数的平方不等于2。设 $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$($m,n$ 是互质的自然数，$n>1$)，则 $m^2=2n^2$，故 m^2 是偶数，从而 m 必是偶数。设 $m=2p$，则 $4p^2=2n^2$，即 $n^2=2p^2$，因而 n 为偶数，于是 m,n 有公约数2，$\frac{m}{n}$ 就不是既约分数，这与假设矛盾，所以任何既约分数的平方不能等于2.

由上可知，任何有理数的平方都不等于2。

说明 本题即证明了 $\sqrt{2}$ 是无理数。

例3 若 a,b 都是有理数，且 $a<b$，则必存在一个无理数 α，使 $a<\alpha<b$。

证 可利用已知无理数 $\sqrt{2}$ 来证明。因为 $a<b$，$\sqrt{2}-1>0$，所以

$$(\sqrt{2}-1)a<(\sqrt{2}-1)b,$$

$$\sqrt{2}a<(\sqrt{2}-1)b+a. \tag{1}$$

又 $$a-b=(\sqrt{2}-1)b+a-\sqrt{2}b<0,$$

所以

$$(\sqrt{2}-1)b+a<\sqrt{2}b. \tag{2}$$

由(1),(2)得

$$\sqrt{2}a<(\sqrt{2}-1)b+a<\sqrt{2}b,$$

所以 $$a<\frac{(\sqrt{2}-1)b+a}{\sqrt{2}}<b,$$

即 a,b 间存在一个无理数

$$a=\frac{(\sqrt{2}-1)b+a}{\sqrt{2}}=\frac{2b+\sqrt{2}(a-b)}{2}.$$

说明　由a,b的任意性，结合例1的结论可知，本题实际证明了任意两个有理数之间必存在无限多个无理数。

例4　设a,b是有理数，α是无理数，若$a+b\alpha=0$，则$a=b=0$。

分析　将等式变形，利用有理数不能等于无理数证得。

证　若$a+b\alpha=0$，则$a=-b\alpha$。假如$b\neq0$，那么$-\frac{a}{b}=\alpha$,即有理数等于无理数，矛盾，所以$b=0$，从而$a=0$。

反之，若$a=b=0$，则$a+b\alpha=0$显然成立。

说明　此题的结论常作为同时含有理数和无理数的等式运算的依据。

2．实数大小的比较

任意两个实数都可以比较大小。比较二实数的大小，常用求差法：

$$a-b>0\Longleftrightarrow a>b;$$

$$a-b=0\Longleftrightarrow a=b;$$

$$a-b<0\Longleftrightarrow a<b.$$

例5　设a和b都是正数，且$a\neq\sqrt{2}b$.

（1）证明$\sqrt{2}$必在$\frac{a}{b}$和$\frac{a+2b}{a+b}$之间；

（2）试问这两个数中哪一个更接近于$\sqrt{2}$？

分析　（1）欲证$\sqrt{2}$在$\frac{a}{b}$和$\frac{a+2b}{a+b}$之间，可证$\sqrt{2}-\frac{a}{b}$和$\sqrt{2}-\frac{a+2b}{a+b}$异号，即它们的积为负数；（2）要判断哪一

个更接近于$\sqrt{2}$，可比较$\left|\sqrt{2}-\frac{a}{b}\right|$与$\left|\sqrt{2}-\frac{a+2b}{a+b}\right|$的大小。

证 (1) $\left(\sqrt{2}-\frac{a}{b}\right)\left(\sqrt{2}-\frac{a+2b}{a+b}\right)$

$$=\frac{\sqrt{2}b-a}{b}\cdot\frac{(\sqrt{2}-1)(a-\sqrt{2}b)}{a+b}$$

$$=-\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}b-a)^2}{b(a+b)}<0,$$

所以$\sqrt{2}$在$\frac{a}{b}$和$\frac{a+2b}{a+b}$之间。

(2) $\left|\sqrt{2}-\frac{a+2b}{a+b}\right|=\frac{(\sqrt{2}-1)|a-\sqrt{2}b|}{a+b}$

$$<\frac{|a-\sqrt{2}b|}{a+b}<\frac{|\sqrt{2}b-a|}{b}=\left|\sqrt{2}-\frac{a}{b}\right|,$$

所以$\frac{a+2b}{a+b}$比$\frac{a}{b}$更接近于$\sqrt{2}$。

例6 已知有十个实数$a_i(i=1,2,\cdots,10)$满足条件$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{10}$；另有五个未知数$x_i(i=1,2,\cdots,5)$满足$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_5$，且知每一个$a_i$都是$x_k$与$x_j$两数之和$(j\neq k)$，试用各个$a_i$表示每一个数$x_i$。

分析 从a_i,x_i的排列中，找出排在头尾的数，再由$(a_1+a_2+\cdots+a_{10})$与$(x_1+x_2+\cdots+x_5)$的关系解x_i。

解 由题意可知

$$x_1+x_2\leqslant x_1+x_3\leqslant\cdots\leqslant x_4+x_5,$$

所以

$$a_1 = x_1 + x_2, \tag{1}$$

$$a_2 = x_1 + x_3, \tag{2}$$

$$\cdots\cdots,$$

$$a_9 = x_3 + x_5, \tag{3}$$

$$a_{10} = x_4 + x_5. \tag{4}$$

因此 $\quad a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 4(x_1 + x_2 + \cdots + x_5)$.

(1) + (2) + (4)得

$$x_1 + (x_1 + x_2 + \cdots + x_5) = a_1 + a_2 + a_{10}.$$

所以

$$x_1 = a_1 + a_2 + a_{10} - \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10});$$

$$x_2 = a_1 - x_1 = \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}) - a_2 - a_{10};$$

$$x_3 = a_2 - x_1 = \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}) - a_1 - a_{10};$$

$$x_4 = a_{10} - a_9 + x_3 = \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}) - a_1 - a_9;$$

$$x_5 = a_{10} - x_4 = a_1 + a_9 + a_{10} - \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}).$$

例7 若 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}, b = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, c = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$，比较 a, b, c 的大小.

分析 将指数化成相同的数，再比较底数的大小.

解 因为

$$a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{12}}, \quad b = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{729}\right)^{\frac{1}{12}},$$

$$c = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{1}{12}}.$$

而 $\frac{1}{729}<\frac{1}{256}<\frac{1}{8}$，所以 $b<c<a$。

例8 四个互不相等的正数 a,b,c,d 中，a 最大，d 最小，且 $a:b=c:d$，试比较 $a+d$ 与 $b+c$ 的大小。

解 因为 $a>b>0,c>d>0$，$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，所以$\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}>1$。而 $b-d>0$，所以 $a-c>b-d$。故 $a+d>b+c$。

说明 求比法也是比较二实数大小常用的方法。$\frac{a}{b}>1$，若 $b>0$，则 $a>b$；若 $b<0$，则 $a<b$。反之亦然。

例9 求下列数中最大的数。

(A) 1； (B) $\sqrt{29}-\sqrt{21}$； (C) $\frac{\pi}{3.142}$；

(D) $5.1\times\sqrt{0.0361}$； (E) $\frac{6}{\sqrt{13}+\sqrt{7}}$。

解 因为

$$\sqrt{29}-\sqrt{21}=\frac{8}{\sqrt{29}+\sqrt{21}}<\frac{8}{5+4}<1;$$

$$\frac{\pi}{3.142}>1;$$

$$5.1\times\sqrt{0.0361}=5.1\times0.19=0.969<1;$$

而 $$(\sqrt{13}+\sqrt{7})^2=20+2\sqrt{91}>20+2\times8=36,$$

$$\sqrt{13}+\sqrt{7}>6,$$

$$\frac{6}{\sqrt{13}+\sqrt{7}}<1.$$

所以，最大的数是$\frac{\pi}{3.142}$。

说明　比较实数大小，有时需要适当地选择中介数作传递。

3. 非负数

大于或等于零的实数统称非负数。常见的非负数有实数的绝对值，偶次方，非负实数的算术根，即 a 为任意实数，$|a|\geqslant 0$，$a^{2n}\geqslant 0$；若 $a\geqslant 0$，则$\sqrt[n]{a}\geqslant 0$。如果偶次根式有意义，那么被开方数必是非负数。

例10　已知

$$(x-y-1)^2+|2x+y+4|=0,$$

求 $3x+2y$ 的值。

分析　有限个非负数的和等于零，那么每个非负数都为零。

解　由题意得

$$\begin{cases} x-y-1=0, \\ 2x+y+4=0. \end{cases}$$

解方程组得

$$\begin{cases} x=-1, \\ y=-2. \end{cases}$$

故

$$3x-2y=1.$$

例11　已知实数 a,b,c,r,p 满足条件

$$pr>1,\quad pc-2b+ra=0,$$

求证一元二次方程 $ax^2+2bx+c=0$ 必有实根。

证　$\Delta=(2b)^2-4ac$，由已知有

$$2b=pc+ra,$$

代入上式得

$$\begin{aligned}\Delta&=(pc+ra)^2-4ac\\&=(pc-ra)^2+4ac(pr-1).\end{aligned}$$

由已知 $pr-1>0$，又 $(pc-ra)^2\geqslant 0$，当 $ac\geqslant 0$ 时有

$$\Delta\geqslant 0;$$

当 $ac<0$ 时有

$$\Delta=(2b)^2-4ac>0.$$

综上所述，证明了 $\Delta\geqslant 0$. 故一元二次方程 $ax^2+2bx+c=0$ 必有实根.

例12 若 a,b,c 为实数，

$$A=a^2-2b+\frac{\pi}{2},\quad B=b^2-2c+\frac{\pi}{3},\quad C=c^2-2a+\frac{\pi}{b}.$$

证明：A,B,C 中至少有一个的值大于 0 .

分析　有限个非负数的和为非负数，有限个非正数的和为非正数，非负数与正数的和为正数.

证　由题设，有

$$\begin{aligned}A+B+C&=\left(a^2-2b+\frac{\pi}{2}\right)+\left(b^2-2c+\frac{\pi}{3}\right)+\left(c^2-2a+\frac{\pi}{6}\right)\\&=(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)\\&\quad+(c^2-2c+1)+(\pi-3)\\&=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(\pi-3).\end{aligned}$$

因为 $(a-1)^2\geqslant 0$，$(b-1)^2\geqslant 0$，$(c-1)^2\geqslant 0$，$\pi-3>0$，所以

$$A+B+C>0.$$

若 $A\leqslant 0$，$B\leqslant 0$，$C\leqslant 0$，则 $A+B+C\leqslant 0$，与 $A+B+C>0$ 矛盾. 因此，由 $A+B+C>0$ 可知，A,B,C 中至少有一个大于 0 .

例13 已知

$$|(m-3)+(m-8)|=|m-3|+|m-8|,$$

求m的值。

分析 根据绝对值的性质，

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|,$$

只有当a,b同号或者a,b中有一个为零时等号才成立。

解 由已知，m的值应满足下列条件之一：

(1) $\begin{cases} m-3>0, \\ m-8>0. \end{cases}$ 解得

$$m>8;$$

(2) $\begin{cases} m-3<0, \\ m-8<0. \end{cases}$ 解得

$$m<3;$$

(3) $m-3=0$ 或 $m-8=0$，得 $m=3$ 或 $m=8$。

所以，原式当 $m\geqslant8$ 或 $m\leqslant3$ 时成立。

例14 在实数范围内，设

$$x=\left(\frac{\sqrt{(a-2)(|a|-1)}+\sqrt{(a-2)(1-|a|)}}{1+\frac{1}{1-a}}+\frac{5a+1}{1-a}\right)^{1988},$$

求x的个位数字。

解 x是实数，必须

$$\begin{cases} (a-2)(|a|-1)\geqslant 0, & (1) \\ (a-2)(1-|a|)\geqslant 0, & (2) \\ 1+\dfrac{1}{1-a}\neq 0, & (3) \\ 1-a\neq 0. & (4) \end{cases}$$

由(1),(2)知$(a-2)(|a|-1)=0$,所以

$$a=2 \text{ 或 } a=\pm 1.$$

由(3),(4)知 $a\neq 2$，$a\neq 1$。因此 $a=-1$。

$$x=\left(\frac{-5+1}{1+1}\right)^{1998}=(-2)^{1988}=16^{497}.$$

故 x 的个位数字是 6。

4. 有理数与无理数

有理数与有理数的和、差、积、商(除数不为0)是有理数，无理数与无理数的和、差、积、商不一定是无理数，无理数与有理数的和、差是无理数，无理数与不为零的有理数的积、商是无理数。另外，例 4 的结论也常作为解题的依据。

例15 求满足条件$\sqrt{a-2\sqrt{6}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$的自然数$a$, x,y。

解 将等式两边平方得

$$a-2\sqrt{6}=x+y-2\sqrt{xy},$$

故$\sqrt{xy}$是无理数(否则$-2\sqrt{6}=x+y-2\sqrt{xy}-a$将是有理数),从而得

$$x+y=a, \quad xy=6.$$