高等数学学习辅导

陈隆钧
董加礼 编著

宁夏人民出版社

高等数学学习辅导

陈隆钧　　董加礼　编著

宁夏人民出版社

高等数学学习辅导　陈隆钧　董加礼编著

宁夏人民出版社出版
（银川市解放西街105号）
新华书店发行　宁夏新华印刷厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 30.375　字数 344
1987年4月第1版第1次印刷　印数：1——6,800册

统一书号：7157·474　　定价：4.90元

内 容 简 介

本书共十七章，阐述了高等数学的基本理论和方法，并着重对如何学习掌握这些理论和方法作了详尽的辅导。

前　言

一九六四年我们为吉林工业大学的函援大学和夜大学编写了一套叫做《高等数学自学辅助资料》的教材，分上、中、下三册印出，供当时吉林工大函授生和夜大学生在学习樊映川等编写的《高等数学》时参考。编写时，由于我们总结了以前的教学经验，并注意到业余教育强调自学的特点，对微积分的基本概念，基本理论和基本方法，特别是其中的重点和难点以及解题技巧等作了深入浅出的解释，因此很受读者欢迎。二十多年以来，我们曾不断地收到各方面读者的来信，向我们索取这套资料。为此，我们早想把它作为正式教材出版，以满足业余教育和自学读者的需要。

最近我们将原书又进行了增删和修改，并增添了600多道习题，使它更臻完善。

本书有以下几方面的特点：

在体裁上，我们是按照一般微积分的章节编写的，其中包括较详尽的内容提要、概念、理论方面的阐述和论证，解题技巧方面的总结和概括以及练习题等四部分。

在理论上，我们特别强调对基本概念和基本理论的阐述，凡是重要概念和理论，特别是重点和难点，我们都作了通俗易懂的解释和论证。

在方法上，我们十分重视对思维方法和解题技巧的训练。全书共有600道多样性的例题，有些是具有一定难度

的，对这些例题的解答，我们总是从分析问题入手，逐步引导读者去解决问题，最后再对容易出差错的问题，指出若干注意事项。

对习题，绝大多数都给出了答案或详细的提示，这些习题是经过精心选配的，有助于自学者对教材的理解。

综上可知，本书并不是讲述学时分配或指出重点等纯文字方面的指示书，更不是一本习题解答，它是一般微积分教材的补充和深化，它包括了作者多年的教学经验和心得。因此我们相信，它对自学读者系统地掌握微积分的基本理论和方法会有一定的帮助，就是对正规大学的学生和青年教师在学习和讲授高等数学时也是有所补益的。

应当说明的是，尽管编者作了若干努力，但是限于水平和经验，书中不妥之处，甚至谬误仍然在所难免。因此，我们谨向能对本书提出批评指正意见的读者表示感谢。

编著者

1984.6.

目　录

第一章　行列式与线性方程组

内　容　提　要

关于行列式的理论，重点在于三阶行列式。高阶行列式具有类似于三阶行列式在概念、性质及应用它解线性方程组等方面的结论。

1.行列式概念

（1）**逆序**　设有三个自然数1、2、3由小到大排成一列

$$1\ 2\ 3,$$

我们称它是一个顺序排列。如果大数排在小数前面，则称该排列为逆序排列。例如1 3 2有一个逆序3、2，而2 3 1有两个逆序2、1和3、1等等。

逆序概念自然可以推广到n个自然数的排列中去。例如4 2 3 1有五个逆序4、2，4、3，4、1，2、1和3、1。

（2）**三阶行列式定义**　设有九个数排成方阵

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

其中字母a_{ij}（i, j = 1，2，3）的第一个下标i表示不同的行，第二个下标j表示不同的列。

在每行每列中各取一数且仅取一数作乘积，每个乘积都按第一个下标作成顺序排列，这样的乘积共有3! = 6个：

$a_{11}a_{22}a_{33}$，$a_{12}a_{23}a_{31}$，$a_{13}a_{21}a_{32}$，

$a_{11}a_{23}a_{32}$，$a_{12}a_{21}a_{33}$，$a_{13}a_{22}a_{31}$。然后对每个乘积按第二个下标作成的排列的逆序个数冠以正负号：当逆序个数为偶数时，在该乘积前冠以“+”号；当逆序个数为奇数时，在该乘积前冠以“-”号。由此易知，上述前三个乘积为正，后三个乘积为负；如此所得乘积的代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

以记号

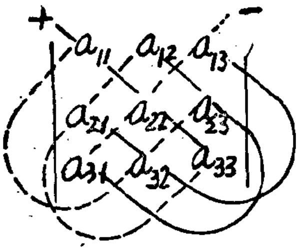
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ &-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}, \end{aligned}$$

并叫做已给九个数的三阶行列式。其中横排叫行，纵排叫列，每个数叫元素。上式的右端也叫行列式的展开式，或行列式的值。

为了便于记忆，三阶行列式的展开可以图示如下：
图中同一实线上的三个数之积取正，共有三项；同一虚线上的三个数之积取负，也有三项，这六项的代数和恰为三阶行



列式的展开式。用这种方法展开三阶行列式或计算三阶行列式叫做对角线法则。

仿此可以定义二阶行列式以及四阶以上的所谓高阶行列式。n 阶行列式共有n! 项。

但须注意，对于高阶行列式，对角线法则已不适用，它的计算须用其他方法进行。

（3）**子行列式及代数余子式** 把行列式中某一元素所在的行和列的元素画去，剩下的元素按原来位置所组成的行列式，叫做原行列式对应于该元素的子行列式。

元素a_{ij}所对应的子行列式乘以（－1）$^{i+j}$以后所得到的式子叫做a_{ij}的代数余子式。例如，三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

对应于元素a_{32}的代数余子式A_{32}为

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

2.行列式性质

（1） 将行列式的行变为列，列变为行，而不改变它们的顺序，行列式的值不变，即行列式转置以后其值不变。

（2） 行列式的两行（或两列）互换，行列式的值仅变符号。

（3） 行列式的两行（或两列）相同，行列式的值等

于零。

（4） 行列式的某行（或列）的元素有公因子时，则此公因子可提到行列式符号之外。

（5） 行列式的两行（或两列）的元素成比例，行列式的值等于零。

（6） 行列式的某一行（或列）的元素都等于零时，行列式的值等于零。

（7） 如果行列式的某一行（或列）的元素都是两项的和，则此行列式可以写成两个行列式的和。

（8） 如果把行列式的某一行（或列）的所有元素同乘上同一个数，加到另一行（或列）的对应元素上去，则行列式的值不变。

3.行列式依行或列展开

（1） 行列式等于它的任一行（或列）的每个元素与其对应的代数余子式的乘积之和。

（2） 行列式某一行（或列）的每个元素与另一行（或列）的对应元素的代数余子式的乘积之和恒等于零。

4.线性方程组的解法

设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3; \end{cases} \tag{I}$$

如果令

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\qquad \Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix} a_1 & b_3 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

则 （1） 当$\Delta \neq 0$时，方程组（Ⅰ）有唯一一组解：

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta y}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta z}{\Delta}。$$

（2） 当 $\Delta=0$时，但Δx、Δy、Δz中至少有一个不等于零时，方程组（Ⅰ）无解。

（3） 当$=\Delta x=\Delta y=\Delta z=0$时，方程组（Ⅰ）或者无解，或者有无穷多组解。

对于三元以上的线性方程组，我们也有类似的结论。

5.齐次线性方程组的解法

（1）两个三元齐次线性方程所组成的齐次线性方程组

设

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2x+c_2z=0, \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

则 1° 如果方程组（Ⅰ）的系数所组成的三个行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

中至少有一个不为零，方程组（Ⅰ）有无穷多组非零解：

$$x=k\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},\quad y=k\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix},\quad z=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

其中k为任意常数。

2° 如果方程组（Ⅰ）的三个系数行列式都为零，这时（Ⅰ）的对应系数成比例，因而两个方程变成一个方程，因此方程组（Ⅰ）仍有无穷多组非零解，这只要解这一个不定方程即可。

（2） 三个三元齐次线性方程所组成的齐次线性方程组 设

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z=0; \end{cases} \qquad (\text{Ⅱ})$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

则

1° 当$\Delta\neq0$时，由4中结论知方程组（Ⅱ）有唯一一组零解$x=y=z=0$。

2° 当$\Delta=0$时，但其中至少有一个子行列式不为零，这时方程组（Ⅱ）有无穷多组非零解。

3° 当$\Delta=0$时，且所有子行列式都为零，这时三个方程实际是一个方程，任何一个方程的解都是方程组的解，因此方程组（Ⅱ）仍有无穷多组非零解。

三元以上的齐次线性方程组也有类似的结论。

§1.1 关于行列式概念的一些说明

在内容提要里，我们给出了行列式的一般定义。读者自然要问，为什么要那样定义呢？实际上行列式概念是由解二元和三元线性方程组产生的。下面我们以三元线性方程组为例来说明这一问题。

设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=a_{14}, & (\mathrm{I}) \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=a_{24}, & (\mathrm{II}) \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=a_{34}; & (\mathrm{III}) \end{cases}$$

我们用加减消元法求其解。先设法消去未知数z，为此，

(I) $\times a_{23}-$ (2) $\times a_{13}$，得

$$(a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13})\,x+(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})\,y=a_{14}a_{23}-a_{24}a_{13}; \qquad (\mathrm{IV})$$

(I) $\times a_{33}-$ (3) $\times a_{13}$，得

$$(a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13})\,x+(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})\,y=a_{14}a_{33}-a_{34}a_{13}; \qquad (\mathrm{V})$$

再用 (Ⅳ) $\times(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})-$ (Ⅴ) $\times(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})$ 便可消去y而解出x，将x的值代入（Ⅳ）又可解出y，再将x和y的值代入（I）便可解出z。推导结果如下：

$$x=\frac{a_{14}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{34}+a_{13}a_{24}a_{32}-a_{14}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{24}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{34}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}, \qquad (\mathrm{VI})$$