北京市中学
数学竞賽試題汇集

北京市数学会編

科学普及出版社

北京市中学数学竞賽

試 題 汇 集

北京市数学会編

科 学 普 及 出 版 社

一九六四年·北京

目　次

序　言

在党的領导下，在北京市教育局和北京市科学技术协会等单位积极支持下，1962 年和 1963 年春季，北京市数学会为高中学生連續举办了两次数学竞賽。这样的竞賽，1956年和 1957年也各举办了一次。

在 1962 年和 1963 年两次数学竞賽前，北京市科学技术协会和北京市数学会曾协助各中学开展了数学小組的活动，其成員是数学成績优秀而又爱好数学的学生；还曾为数学小組的成員举办了一些数学报告，其中某些报告，經过整理补充后，或在“数学通报”上发表，或以“青年数学小丛书”（現改为“中学生数学小丛书”）的形式出版。参加竞賽的高中二年級和高中三年級的学生，絕大多数是数学小組的成員。这几次的数学竞賽，不但使参加的学生經历了一次有意义的鍛炼；而且还引起了許多未参加者的兴趣，他們也演算了竞賽的試題。大家都认为，通过有准备有計划的、适当的数学竞賽，可以激发中学生对数学的兴趣，引导中学生学好基础功課和灵活运用基础知識，从而有利于教学质量的逐步提高。

外地对于本市中学生数学竞賽的关怀，也給予我們很大的鼓励和鞭策。我們收到了各地数学会和个人的許多来函，索取試題和解答，詢問举办数学竞賽的办法。为此，我們編印本书以滿足各方面的需要。同时，我們也认識到我們的經驗还很不

够，尤其是在試題的选定方面。本书的出版，只是供参考，只是"抛砖引玉"。我們誠恳地請求大家提出宝貴意見，以改进我們的工作。最后，我們还应該說明，这些試題的解答基本上都是竞賽时匆忙中編写的；这次付印前，虽然也作了一些微小的修改，但还不能說已經是最好的解答。我們想，最好的解答只能来自广大的数学爱好者。

最后，我們对青年讀者提出一个建議：請你們先独立地演算試題，先得出自己的解答，然后用本书中的解答来比較。这样作，才是善于利用本书，才能更好地提高自己解决数学問題的能力。

江泽涵

一　1963年数学竞赛

高二第一試試題

1．把10人平均分成两組，再从每組选正副組长各一人，一共有多少种选法？

2．已知 $\sin\alpha+\sin\beta=p$，$\cos\alpha+\cos\beta=q$．求 $\sin(\alpha+\beta)$ 和 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值。

3．解方程組：$\begin{cases}\sqrt{x-1}+\sqrt{y-3}=\sqrt{x+y},\\ \lg(x-10)+\lg(y-6)=1.\end{cases}$

4．如果一个直角三角形的三边之长成等差数列，那么，它們的比是3:4:5．試加以証明。

5．D 为正三角形 ABC 外接圓圓弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上一点，AB 和 CD 的延长綫交于 E 点，AC 和 BD 的延长綫交于 F 点。求証：綫段 BC 为綫段 BE 和 CF 的比例中項。

高三第一試試題

1．已知 $2\lg(x-2y)=\lg x+\lg y$，求 $x:y$。

2．已知：正 n 边形的边长为 a，内切圓的半径为 r，外接圓的半径为 R．求証：$r+R=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$．

3．求 $(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5+\cdots+(1+x)^{n+2}$ 展开式里 x^2 的系数。

4．設有一个凸 n 边形。我們把任意两个不相邻的頂点的联綫叫做它的对角綫。假定沒有任意三条对角綫交于（凸 n 边形內部）一点。求这些对角綫彼此（在凸 n 边形內部）的交点的总数。

5．一个梯形的上底长为 a，下底长为 $2a$，一腰长为 b，并且这腰和下底的夹角为 α（α 是銳角）。如果以这个腰为軸把梯形旋轉一周，求所成的旋轉体的体积。

高二第二試試題

1．已知多項式 x^3+bx^2+cx+d 的系数都是整数，并且 $bd+cd$ 是奇数。証明：这多項式不能分解为两个整系数多項式的乘积。

2．在平面上有5个点，其中任何三点不在一条直綫上，任何四点不在一个圓上。証明：一定能通过其中三点作一个圓，使得其余的两个点一个在圓內，一个在圓外。

3．在一个边长为1的正六边形內部有一点 P，已知 P 到某两个頂点的距离分别是 $\frac{13}{12}$ 及 $\frac{5}{12}$．求 P 到其余四个頂点的距离。

4．已知：a 是正整数，$r=\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$．求証：对于每个正整数 n，必有一个正整数 a_n，满足

$$r^{2n}+r^{-2n}=4a_n+2$$

及

$$r^n=\sqrt{a_n+1}+\sqrt{a_n}.$$

高三第二試試題

1．設 $P(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$，式中各系数 $a_j(j=0.1,\cdots,k)$ 都是整数。今設有四个不同整数 x_1, x_2, x_3,

x_4使$P(x_i)(i=1,2,3,4)$都等于2.試証明：对于任何整数x，$P(x)$决不等于1,3,5,7,9中的任何一个。

2. 在一个边长为1的正方形內任意給定9个点。試証明：在以这些点为頂点的各个三角形中，必有一个三角形，它的面积不大于$\frac{1}{8}$.

3. 已知平面上有$2n+3(n\geqslant 1)$个点，其中沒有三个点共綫，也沒有四个点共圓。能不能通过它們之中的某三个点作一个圓，使得其余的$2n$个点一半在圓內，一半在圓外？証明你的結論。

4. 設有2^n个球分成了許多堆。我們可以任意选择甲乙两堆来按照以下規則挪动：若甲堆的球数p不少于乙堆的球数q，則从甲堆拿q个球放到乙堆里去，这样算是挪动一次。証明：可以經过有限多次挪动把所有的球合併成一堆。

高二第一試試題解答

1. 把10人平均分成两組，再从每組选正副組长各一人，一共有多少种选法？

【解】 把10人平均分成两組，分法有$\frac{1}{2}C_{10}^5$种。在每組中选正副組长各一人的选法有A_5^2种。所以把10人平均分成两組，再从每組选正副組长各一人的选法的种数是

$$\frac{1}{2}C_{10}^5(A_5^2)^2=\frac{1}{2}\times\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}\times(5\times 4)^2=50400.$$

答：一共有50400种选法。

2. 已知$\sin\alpha+\sin\beta=p$, $\cos\alpha+\cos\beta=q$. 求：$\sin(\alpha+\beta)$和$\cos(\alpha+\beta)$的值。

【解】 首先由已知的条件可以知道p、q的絕对值都不能大于2. 已知：

$$\sin\alpha+\sin\beta=p, \tag{1}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=q. \tag{2}$$

将(1)的两边分别平方，得

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\cdot\sin\beta=p^2. \tag{3}$$

将(2)的两边分别平方，得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta=q^2. \tag{4}$$

将(3)与(4)的两边分别相加，得

$$2+2(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta)=q^2+p^2,$$

即 $$2[1+\cos(\alpha-\beta)]=q^2+p^2. \tag{5}$$

将(4)的两边分别减去(3)的两边，得

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+2\cos(\alpha+\beta)=q^2-p^2,$$

即 $$2\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)+1]=q^2-p^2. \tag{6}$$

将(1)与(2)的两边分别相乘，得

$$\sin(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)=pq,$$

即 $$\sin(\alpha+\beta)[1+\cos(\alpha-\beta)]=pq. \tag{7}$$

将(5)分别代入(6)和(7)，得

$$(q^2+p^2)\cos(\alpha+\beta)=q^2-p^2;$$
$$(q^2+p^2)\sin(\alpha+\beta)=2pq.$$

当 p、q 不全为零时，得

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2pq}{q^2+p^2}; \quad \cos(\alpha+\beta)=\frac{q^2-p^2}{q^2+p^2}.$$

当 $p=q=0$ 时，由(1)得 $\sin\beta=-\sin\alpha$.

由(2)得 $\cos\beta=-\cos\alpha$.

所以
$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\&=\sin\alpha(-\cos\alpha)+\cos\alpha(-\sin\alpha)\\&=-\sin 2\alpha,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta\\&=\cos\alpha(-\cos\alpha)-\sin\alpha(-\sin\alpha)\end{aligned}$$

$$=-\cos 2\alpha.$$

在这种特殊的情况下，所求的解答不定。

3. 解方程組：$\begin{cases}\sqrt{x-1}+\sqrt{y-3}=\sqrt{x+y}, & (1)\\ \lg(x-10)+\lg(y-6)=1. & (2)\end{cases}$

【解】 原方程組可以化为方程組

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases}xy-3x-y-1=0, & (3)\\ xy-6x-10y+50=0. & (4)\end{cases}$$

(3)的两边分别减去(4)的两边，并化簡得 $x+3y-17=0$,

即
$$x=17-3y. \qquad (5)$$

把(5)代入(3)，整理得 $3y^2-25y+52=0$. 所以

$$y_1=4,\quad y_2=\frac{13}{3}.$$

把 y 的值代入(5)，得 $x_1=5$, $x_2=4$. 所以方程組(I)的解为

$$\begin{cases}x_1=5,\\ y_1=4;\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=4,\\ y_2=\dfrac{13}{3}.\end{cases}$$

經驗算知，这两組数都不滿足方程(2)，所以原方程組沒有解。

【注】 也可以先就方程(1)的未知数的允許值范围进行討論，而后通过(2)判定方程組无解。

4. 如果一个直角三角形的三边之长成等差数列，那么，它們的比是 3:4:5。試加以証明。

【証明】 設直角三角形三边之长分别为 $a-d$, a, $a+d$ (其中 $a>d>0$)。那么 $(a+d)^2=a^2+(a-d)^2$. 化簡，得

$$a^2-4ad=0.$$

但 $a\neq0$，所以 $a-4d=0$. 由此推出

$$a-d=3d,$$
$$a=4d,$$

$$a+d=5d.$$

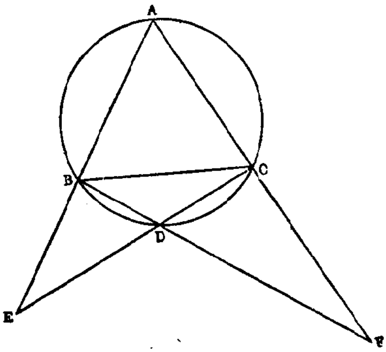
从而这个直角三角形三边的比为 $3d:4d:5d$,

即 $$3:4:5.$$

5. D 为正三角形 ABC 外接圓圓弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上一点，AB 和 CD 的延长綫交于 E 点，AC 和 BD 的延长綫交于 F 点。求証:綫段 BC 为綫段 BE 和 CF 的比例中項。

【証明】 $\angle E$ 和 $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD})$ 的量数相同，且 $\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{BC}$ 同是 60° 的弧，所以 $\angle E$ 和 $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{BD})$ 即 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$ 的量数相同。

又 $\angle FBC$ 也和 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$ 的量数相同。



所以 $\angle E=\angle FBC$.

同理 $\angle F=\angle ECB$.

所以 $\triangle ECB\backsim\triangle BFC$.

所以 $\dfrac{CF}{BC}=\dfrac{BC}{BE}$.

即綫段 BC 为綫段 BE 和 CF 的比例中項。

高三第一試試題解答

1. 已知 $2\lg(x-2y)=\lg x+\lg y$, 求 $x:y$.

【解】 已知的等式可以化为 $(x-2y)^2=xy$. 化簡得

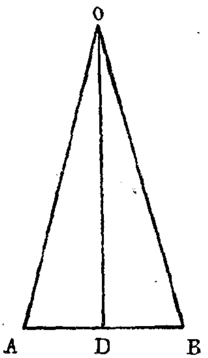
$$x^2-5xy+4y^2=0,$$

把左边分解因式，得 $(x-y)(x-4y)=0$.

由 $x-y=0$, 得 $\frac{x}{y}=1$; 由 $x-4y=0$, 得 $\frac{x}{y}=4$.

由已知的等式，可以知道 x 和 y 都必須是正数。于是当 $\frac{x}{y}=1$ 时，必有 $x-2y<0$，这使已知的等式的左边无意义，所以只有 $\frac{x}{y}=4$ 为所求。

2. 已知：正 n 边形的边长为 a，内切圓的半径为 r，外接圓的半径为 R．求証：$r+R=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$．

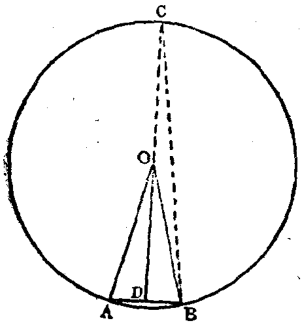


【証法 1】 如图，設 AB 为正 n 边形的一边，O 为它的中心。由 O 作 $OD\perp AB$ 于 D，則 $OA=R$，$OD=r$，$\angle AOB=\frac{2\pi}{n}$，$\angle AOD=\frac{\pi}{n}$．于是得

$$r+R=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}+\frac{\frac{a}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}=\frac{a}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{n}+1}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$=\frac{a}{2}\cdot\frac{2\cos^2\frac{\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}}=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}.$$

【証法 2】 如图，設 AB 为正 n 边形的一边，O 为它的中心。由 O 作 $OD\perp AB$ 于 D．延长 DO 交圓于 C，則



$$CD=r+R.$$

因 $\angle BCD=\frac{1}{2}\angle BOD=\frac{\pi}{2n}$，

且 $DB=\frac{a}{2}$，

所以 $\frac{r+R}{\frac{a}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$，

于是得 $r+R=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$．

【証法 3】 如图，在 $\triangle AOB$ 中，$\angle AOB=\frac{2\pi}{n}$，$\angle BOD=\frac{\pi}{n}$，$DB=\frac{a}{2}$，所以

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{n}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}}}=\sqrt{\frac{1+\frac{r}{R}}{1-\frac{r}{R}}};$$

又在 $\triangle BOD$ 中，　　$\frac{a}{2}=\sqrt{R^2-r^2}$.

所以
$$\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}=\sqrt{R^2-r^2}\cdot\sqrt{\frac{1+\frac{r}{R}}{1-\frac{r}{R}}}$$
$$=\sqrt{\frac{(R^2-r^2)(R+r)}{R-r}}=R+r.$$

所以
$$r+R=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}.$$

3. 求 $(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5+\cdots+(1+x)^{n+2}$ 展开式里 x^2 的系数。

【解法 1】 因为

$$(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5+\cdots+(1+x)^{n+2}$$
$$=\frac{(1+x)^3[(1+x)^n-1]}{(1+x)-1}=\frac{1}{x}[(1+x)^{n+3}-(1+x)^3],$$

所以展开式里 x^2 的系数为

$$C_{n+3}^3-1=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!}-1=\frac{n^3+6n^2+11n}{6}.$$

【解法 2】

$$(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5+\cdots+(1+x)^{n+2}$$

展开式里 x^2 的系数为　$C_3^2+C_4^2+C_5^2+\cdots+C_{n+2}^2$.

根据組合性质　$C_m^{n-1}=C_{m+1}^n-C_m^n$，于是上式可以写成

$$(C_4^3-C_3^3)+(C_5^3-C_4^3)+(C_6^3-C_5^3)+\cdots+(C_{n+3}^3-C_{n+2}^3),$$

即 C_{n+3}^3-1．于是所求的 x^2 的系数为

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}-1,$$

即

$$\frac{n^3+6n^2+11n}{6}.$$

4．設有一个凸 n 边形。我們把任意两个不相邻的頂点的联綫叫做它的对角綫。假定没有任意三条对角綫交于(凸 n 边形內部)一点。求这些对角綫彼此(在凸 n 边形內部)的交点的总数。

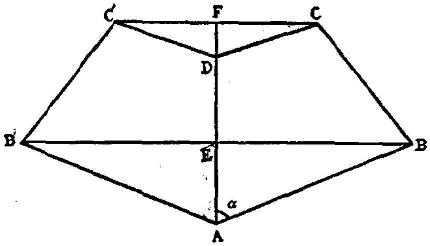
【解】 任取凸 n 边形的四个頂点，就可以构成一个凸四边形，这个凸四边形的两条对角綫相交于凸 n 边形的內部，且交点只有一个。由于凸四边形的对角綫也就是凸 n 边形的对角綫，因之每一个凸四边形都决定了凸 n 边形的对角綫的一个交点。过凸 n 边形的任何两条相交的对角綫的四个端点(即凸 n 边形的四个頂点)都有一个这样的凸四边形，因之由这样的凸四边形即可得出凸 n 边形的对角綫彼此(在凸 n 边形內部)的所有的交点。由于已知凸 n 边形的任意三条对角綫都不交于一点，所以不同的四边形的对角綫的交点是不能重合的。于是这个凸 n 边形的对角綫的交点的总数等于所得到的凸四边形的个数。就是

$$C_n^4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}.$$

5．一个梯形的上底长为 a，下底长为 $2a$，一腰长为 b，并且这腰和下底的夹角为 α (α 是銳角)。如果以这个腰为軸把梯形旋轉一周，求所成的旋轉体的体积。

【解法 1】 已知梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$, $DC=a$, $AB=2a$, $AD=b$, $\angle DAB=\alpha\,(\alpha<90°)$。由 B、C 分别作 AD 所在直綫的垂綫 BE、CF 交 AD(及其延长綫)于 E、F.

設以 AD 为軸旋轉梯形 $ABCD$ 一周所形成的旋轉体的体积为 V；以 AD 为軸分别旋轉直角梯形 $EBCF$ 和直角三角形 ABE、DCF 一周所成的体积依次为 V_1、V_2 和 V_3. 因为 $V=V_1+V_2-V_3$，所以



$$V=\frac{\pi}{3}(BE^2+BE\cdot CF+CF^2)\cdot EF+\frac{\pi}{3}BC^2\cdot AE-\frac{\pi}{3}CF^2\cdot DF$$

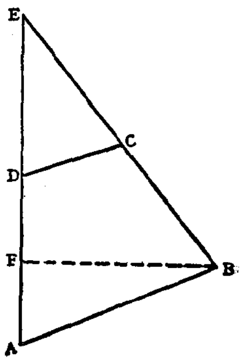
$$=\frac{\pi}{3}\{[(2a\sin\alpha)^2+2a^2\sin^2\alpha+a^2\sin^2\alpha](b+a\cos\alpha$$

$$-2a\cos\alpha)+(2a\sin\alpha)^2\cdot 2a\cos\alpha-(a\sin\alpha)^2\cdot a\cos\alpha\}$$

$$=\frac{\pi}{3}\{7a^2\sin^2\alpha(b-a\cos\alpha)+7a^3\sin^2\alpha\cos\alpha\}$$

$$=\frac{7\pi}{3}a^2b\sin^2\alpha.$$

【解法 2】 設梯形 $ABCD$ 两腰 AD、BC 的延長綫相交于 E，以 AE 为軸把 $\triangle ABE$ 旋轉一周所成的旋轉体的体积为 V_1，以 AE 为軸把 $\triangle DCE$ 旋轉一周所成的旋轉体的体积为 V_2.



因为 $$AB\parallel DC,$$

所以 $$\frac{ED}{EA}=\frac{DC}{AB}=\frac{1}{2},$$

即 $$AE=2ED=2b.$$

作 BF 垂直 AE 交 AE 于 F，于是

$$BF = AB\sin\alpha = 2a\sin\alpha.$$

所以 $V_1=\frac{1}{3}\pi\cdot BF^2\cdot FE+\frac{1}{3}\pi\cdot BF^2\cdot AF=\frac{1}{3}\pi\cdot BF^2\cdot AE$

$$=\frac{1}{3}\pi\ (2a\sin\alpha)^2\cdot 2b=\frac{8}{3}\pi\ a^2 b\sin^2\alpha.$$

同理可得 $V_2=\frac{1}{3}\pi a^2 b\sin^2\alpha$. 故所求体积为

$$V_1-V_2=\frac{7}{3}\pi\ a^2 b\sin^2\alpha.$$

高二第二試試題解答

1. 已知多項式 x^3+bx^2+cx+d 的系数都是整数，并且 $bd+cd$ 是奇数，証明：这多項式不能分解为两个整系数多項式的乘积。

这題較为容易，好多同学都答对了，解法大半是下边这样的：

先断定 $b+c$ 与 d 都是奇数，于是 b, c 两数有两种情形：b 偶 c 奇，或 b 奇 c 偶。

(A) b 是偶数，c, d 是奇数。如果 $\varphi(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 能分解成两个整系数多項式的乘积，便一定有一个一次因子。既然首項系数是 1，不妨假設

$$(x+p)(x^2+qx+r)=x^3+bx^2+cx+d. \tag{1}$$

其中要求 p, q, r 都是整数。比較两边的对应系数，得

$$pr=d=\text{奇数}, \tag{2}$$

$$pq+r=c=\text{奇数}, \tag{3}$$

$$p+q=b=\text{偶数}. \tag{4}$$

从(2)断定 p, r 都是奇数，由此再从(3)来看，势必 q 是偶数，这

样的話(4)就矛盾了。

(B) c 是偶数，b, d 是奇数。可以同样地推出矛盾来，所以 $\varphi(x)$ 不能分解成整系数多項式之积。

这是最容易想到的証法，然而不是最好的証法，虽說这方法不够灵巧，却有很大的启发作用。說(1)不能成立，无异說 $x+p$ 不能除尽 $\varphi(x)$．那么用 $x+p$ 除 $\varphi(x)$ 試試看怎样呢？这样試探下去，就得到第二个証法。即是：

已知 b, c 两数一奇一偶，d 是奇数，如果希望 $x+p$ 能除尽 $\varphi(x)$，必須 p 是奇数。用 $x+p$ 除 $\varphi(x)$，根据余式定理，余数是

$$-p^3+bp^2-cp+d. \tag{5}$$

不論 b 偶 c 奇或 b 奇 c 偶，这余式的四項之中总是三項为奇数，一項为偶数，所以它必不为零，可見 $\varphi(x)$ 沒有整系数因式。

虽然这証法也要按 b, c 的奇偶性分別討論，但是两方的差別很小。其中原因在于这里我們所处理的对象，只有(5)式自己。这証法还不够精炼，同时它又給我們一些启发。这里起决定作用的矛盾，可以說是把 $x=-p$ 代入(1)式之后，左边得零，右边不得零。既然如此，那么只要有一个 x 的数值代入(1)式使两边不相等，岂不是一样地能够断定(1)不能成立嗎？这想法又使我們改善証法如下：

已知 $b+c$ 与 d 都是奇数。(1)中的 p 也是奇数。用 $x=1$ 代入(1)，則左边为

$$1+b+c+d=\text{奇数};$$

而右边由于 $x+p$ 变为 $1+p$ 而为偶数。两边奇偶不同，必然(1)不成立。

这証法的好处是不考虑 b 与 c 的奇偶性。因而不必分情形討論。

一个較好的証法或解法，往往是多次修改得来的，以上的思