連續映射的同伦理论

M. M. 朴斯尼可夫著

科 学 出 版 社

連續映射的同倫理論

M. M. 朴斯尼可夫 著

裘光明 譯

科学出版社

1958年9月

М. М. ПОСТНИКОВ

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ГОМОТОПИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АН СССР

Москва

1955

内 容 提 要

大家知道，同倫理論有三个基本的問題：同倫羣对于同調羣的影响問題，求多面体的同倫型的代数特征問題和連續映射的分类問題。

本書講述解决同倫問題的一种普遍方法，即把同倫理論的任何問題化成某个純代数問題的方法。这是本書作者自己的一个突出的工作。他在空間的同倫羣已知的假設下，引进了他叫做自然体系的一个新的不变量，首先就完全解决了同倫羣对于同調羣的影响問題；其次，自然体系給出了任意多面体的同倫型的完全的特征；最后，連續映射的分类問題在空間的同倫羣已知的假設下有了簡化，而利用自然体系就可以完全解决这个簡化了的問題。因此，作者的工作使同倫理論的最重要的問題化成了計算自然体系和用代数方法研究自然体系的問題。

在本書中，作者只写了緒論和第一、第二两部分。本書的第三部分是作者后来以論文的形式单独发表的。現在譯者已把这第三部分同时譯出放在本書的末尾了。

作者在写作本書时，力求对讀者要求不多的拓扑学的預备知識，但是却要求相当高的数学程度。因此本書适合于数学工作者和数学专业的高年級学生閱讀。

連續映射的同倫理論

M. M. 朴斯尼可夫 著

裘 光 明 譯

*

科 学 出 版 社 出 版 (北京朝陽門大街 117 号)

北京市書刊出版業營業許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1958 年 9 月第 一 版 書号：1396 字数：180,000

1958 年 9 月第一次印刷 開本：850×1168 1/32

(京) 0001—1,200 印張：6 1/2

定价：(10) 1.20 元

目　　录

緒　論

I. 体系的代数理論

§ 1. 半单純复合形

§ 2. 半单純复合形里的上同調

§ 3. 体　　系

§4. 附加体系

II. 自然体系和同倫型

§1. 奇異上同調

§2. 拓扑空間的自然体系

§3. 实現定理

* * *

序　言

本著作講述解决同倫問題的一种普遍方法，即把同倫理論的任何問題化成某个純代数問題的方法. 在沒有这种方法时，研究同倫問題是非常困难的. 因此，虽然有了一些各别的卓越成就，但是同倫理論的諸基本課題直到現在还沒有得到解决. 大家知道，現在已經获得的只是一些非常特殊的結果，它們都是在对于所討論的空間加上极強的限制(无球状面或者較低維数的类型)后才成立的.

談到同倫理論的基本課題，我們指的是下面三个問題：同倫羣对于同調羣（或者对于上同調羣也一样）的影响問題，求多面体的同倫型的代数特征問題和連續映射的分类問題.

首先注意到第一个問題的是 Hopf[12]. 这个問題引起了大量的研究而且显出与羣和代数的扩张的理論有联系，甚至还与一系列別的代数理論有联系(例如参看[8]). 关于同倫羣对于同調羣的影响問題，虽然已經有了大量的工作(参看緒論第 7 段)，但是这个問題只是在对于所討論的空間加上非常強的限制下才解决的. 在本著作中完全解决了上述这个問題：指出了空間的同倫羣和在由所謂自然体系組成的集合中的一个新的不变量，如何可以用来計算空間的同調羣. 于是到現在为止关于同倫羣对于同調羣的影响的所有已知結果，都可以作为特殊情形而引出. 此外，从得到的結果几乎可以直接推出，单連通的有限多面体的同倫羣只有有限个母元素. 这个問題从 1936 年以来一直悬而未解，而且只在最近才由 Serre[18] 用另一个方法完全解决.

長时期以来拓扑学的最基本的問題一直是同胚問題，即寻求可以用来决定已知空間是否同胚的不变量的問題. 在同一段时間內，由于大家注意到所有熟知的不变量都有同倫的特性，因而这些不变量所能給出的最多只是同倫型的特征，所以关于寻求两个空間属于一个同倫型的判別法的問題就具有基本的意义了. 对于一些个別的

空間类(例如透鏡空間)，这种判别法很早就获得了. Whitehead 研究了同倫型的普遍問題，他从 1939 年开始在这个題目上发表了一系列的文章. 在单連通的四維多面体[22] 和任意三維多面体[21] 的情形，他成功地解决了所提的問題. Whitehead 的結果在三維多面体情形的另一种表述，写在 Whitehead 和 Maclane 的工作[25]里. 后来 Whitehead 定理由 Burger [2] 作了一些推广. 在这本著作里将要指出，这里所引进的不变量——自然体系——給出了任意多面体的同倫型的完全的特征. Whitehead 和 Burger 的結果只是这里証明了的普遍定理的特殊情形.

連續映射同倫理論的中心課題是解决关于已知映射是否同倫的問題（連續映射的分类問題). 通常要求以同調理論的术語給出答案. 这个課題的一个特殊情形是熟知的計算同倫羣的問題. 在分类問題中已經得到了許多值得注意的結果，其中必須特别指出的是 Hopf, Whitehead, Л. С. Понтрягин, Steenrod 諸定理. 然而大家知道，直到現在还只是对于极窄的一些空間类才得到了結果，因为在研究空間的同倫性質时，随着空間类的推广，所发生的困难急驟地增长. 假如在解决分类問題时，不仅利用同調不变量，而且利用例如同倫羣，则分类問題就可以簡化. 換句話說，为了簡化問題，可以假定我們已經知道所討論的空間的同倫羣.

然而在这条道路上直到現在还只有得到一些預备性質的結果. 在作者的短文[16] 里探討了分类問題在这种意义下的完全的解法，并且除去同調的方法以外，在那里敍述的解法只利用了自然体系，在实質上也就是利用了同倫羣. 用同样的方法还可以解决关于纖維丛截面存在的更普遍的問題.

因此，同倫理論的最重要的課題化成了計算自然体系和用代数方法研究自然体系的問題. 为了計算自然体系，首先必須知道所討論的空間的同倫羣. 这里得到的关于同倫羣对于同調羣的影响問題的解，还可以用来計算同倫羣，正象它可以用来証明同倫羣的母元素个数的有限性一样.

这一册包含的只是講述自然体系一般理論的本著作的前两部

分[1]. 在这里詳細地敍述了有关于同倫羣对于同調羣的影响問題的所有方面. 还詳細地敍述了关于多面体同倫型的代数特征問題的解,講述映射分类和自然体系計算方法的其余部分将在以后刊行.

因为几乎完全沒有用俄文写的同倫理論的文献,所以在緒論里敍述了为理解本著作的基本部分所必須的同倫理論的基本的定义和事实.

在緒論第一段里給出同倫和同倫型的定义. 那里还証明了对第二部分有用的重要判别法,用来判别已知映射是否同倫等价. 在这一段里还討論了同倫和扩展之間的联系. 在第二段里討論的是基本羣.

在緒論的第三段里确切地提出了代数的术語;引入了以后要用的羣列的概念.

在第四段里討論了由 Steenrod [19]以局部系数系为名而引入的局部羣族,証明了由彼此同倫的連續映射导出的族是同构的.

在第五段里以最便于在以后使用的方式敍述了同倫羣的定义和基本性質. 这些性質的証明可以在 B. A. Рохлин 的文章[17]里找到;在[17]里所給的同倫羣的定义与这里所采用的有差别,但是并非本質的差别. 在这一段的末尾敍述了与同倫羣理論有联系的若干簡单引理.

在第六段里定义了由 Eilenberg [4]提出的奇异上同調羣. 敍述簡单了些,是因为在第一章里还要敍述更普遍的上同調理論.

最后,在緒論第七段里写出了 Eilenberg 和 Maclane[6,7]关于同倫羣对于同調羣的影响的結果. 这里所討論的代数构造只作了簡单的敍述,因为在第一部分里还要詳細地研討它們.

第一部分具有純代数的特性. 它几乎与緒論无关,而且在閱讀这一部分时只需要羣論的初步知識就够了. 在这里定义了和研討了新的代数对象——体系. 預先研討了抽象的一类复合形,所謂半单純复合形. 引入半单純复合形的必要性在于:許多自然地产生的抽

---

1) 本著作的第三部分也由譯者譯出附在本書的末尾——譯者.

象的胞腔复合形虽然接近于单純复合形，却不是单純复合形，因为它們允許例如构作鏈的乘积(大家知道，这在任意的胞腔复合形里是不可能的). 在作者的短文[14]里企图用公理来定义一类抽象的胞腔复合形，它們接近于单純复合形而且包括尽了所有有趣的情形. 在这个定义的基础上第一次提出了自然体系的理論. 同时 Eilenberg 和 Zilber [8]提出了他們叫做半单純复合形的那种复合形的更恰当的定义. 它們的定义接近于作者的定义，而在邏輯上更完善. 在本著作中，自然体系理論建立在半单純复合形的基础上. 这时为了方便起見，把 Eilenberg 和 Zilber 的原来的定义作了一些非主要的改变. 复合形的这个改变了的定义在第八段里敍述. 那里也定义了若干类半单純复合形(連通的、強連通的、正則的、无球状面的和完全的). 完全的半单純复合形在这里是以这样的方式定义的，使得它与 Eilenberg 和 Zilber 意义下的完全单純形相同，但是这里用公理提出看来是更方便些. 討論了完全复合形的一些性質. 例如証明了它的強連通性(在单頂点的假設下，但是很容易可以解除这假設而換成連通性的条件). 在这一段的終了，在半单純复合形范围內定义了单純复合形，以后将会証明，这与通常引入了頂点的局部次序的单純复合形是相同的. 我們注意到，通常的单純复合形不是半单純复合形，要把它們化成半单純复合形，必須在其中引入頂点的局部次序. 証明了任意半单純复合形的第二次重心重分是单純复合形. 因此，一般說来，我們可以只限于半单純复合形，但是这时发生了十分严重的复杂性，如何簡单而又独立地建立半单純复合形的理論，尤其是如何使它显得絕对不比单純复合形的理論更复杂.

在第九段里定义了(根据[8])单純映射和与它有关的一些别的概念. 我們注意到，在分类理論里这里定义的单純映射对应于非退化的单純映射. 退化的单純映射在我的計划里未作安排，这促成了理論的簡化.

几何例子在第二部分里討論.

单純复合形的同調羣的普通定义可以逐字逐句地搬到半单純复合形里(参看第 13 和 14 段). 然而为了我們的目的，普通的上同調

羣是不够的. 必須把具有局部系数的上同調羣搬到半单純复合形里. Eilenberg 和 Zilber在[8]里已經实現了这种搬移. 然而搬到半单純复合形里的最好不是局部族上的上同調理論，而是与它等价的相对于上閉鏈的上同調理論. 作者在短文[13]里給了这个理論一个簡短的描述. 在第 15 段里預先定义了上閉鏈和它們在乘法羣上的上同調羣. 相对于上閉鏈的上同調理論在第 16 段里敍述. 因为它的完全的敍述,即使只对于单純复合形的，也未見刊行，所以在这里很詳細地敍述了它.

在論文[7]里引出了与乘法羣的上同調羣有关的一些羣 $E(k, G)$. 在第 17 段里一开始就对任意的半单純复合形敍述了这些羣的定义. 最后,在第 18 段里討論了(根据[8])在完全的半单純复合形里的上同調理論.

在第一部分 § 3 开头的第 19 段里,定义了半单純复合形的扩大，它是体系理論的基本概念. 在第 20 段里研討了在扩大和单純映射之間的联系. 这一段的基本命題的最初的証明是极为复杂的. 这里講的是利用了論文[7]中的一些想法后改作的証明. 在第 21 段里給出在第 17 段里引入的羣 $E(k,G)$ 的新解释. 最后,在第 22 段里定义了作为整个著作基础的体系的概念.

在第一部分的 §4 里写出构成体系的一个方法,它被用来得出其中的任意一个体系. 在第一部分里正是用这种方法来构成自然体系的.

§ 3 和 § 4 的結果是新的. 它們的最初的形式发表在短文[14]里.

在第二部分§1里以半单純复合形理論的观点討論了拓扑空間的奇异上同調. 在这一节里的敍述是足够詳細的,因为在俄文中沒有講述奇异上同調理論的著作.

在第二部分 § 2 里給出自然体系的定义，利用第一部分的构成法这很快可以做到. Eilenberg 和 Zilber[8]也曾定义过和研究过这里所利用的正則复合形（他們把它叫做极小复合形），他們的工作和作者的工作都是独立地进行的. 在这里証明了定理 I，它包括了同

倫羣对同調羣的影响問題的完全解;在第7段里写出的 Eilenberg 和 Zilber 的結果是这定理的特殊情形.

几何复合形(即多面体)有着許多不同的定义. 为了我們的目的,最合用的是由 Whitehead 提出的 *CW* 复合形的概念. 这些复合形在这里叫做細胞复合形. 它們的定义和基本性質在第35段里敍述. 那里所写的命題的証明(除去最重要的一个以外)都省略了. 讀者可以在[21]里找到它們. 在第二部分§3的以后几段里討論了細胞复合形的一些特殊形式,它們乃是单純复合形和半单純复合形的几何实現. 作出这些几何实現借用了 Giever[11]的观点,Giever 作出了奇异复合形的几何实現. Whitehead[24]討論了相类的作法. 結束这一节的是两个基本定理(定理II和III)的証明,这两个定理包括了任意多面体的同倫型的完全的特征. 从这两个定理可以直接推出許多早已知道的定理,这里引出了其中的一部分.

最后,在补充里敍述了下述定理的証明:假如一个单連通空間(特别地是任意有限多面体)的同調羣有有限个母元素,那末它的同倫羣也有有限个母元素.

在写作本著作时,作者力求做到只要不多的預备知識(在拓扑学的初步知識范围內)就可以理解它. 然而却对讀者要求相当高的数学程度. 熟練的讀者可以略去緒論和第一部分的§1和§2,而只要熟識一下所采用的术語就成.

方括弧里的号碼代表本书最后列举的引用文献表中的号碼.

作　者

緒　論

1. 同倫理論的基本概念

設 X 和 Y 是任意的拓扑空間. 所謂从空間 X 到空間 Y 的映射的同倫是指在空間 Y 中取值的函数 $F(x, t)$, 它的两个变数是空間 X 的点 x 和满足条件 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 的实数 t, 而且这函数对于两个变数說都是連續的. 換句話說, F 是从空間 X 和实数綫段 $I=[0,1]$ 的拓扑乘积 $X \times I$ 到空間 Y 的連續映射. 同倫 F 产生从空間 X 到空間 Y 的一族連續映射

$$f_t(x) = F(x,t),$$

这族映射連續地依賴于参数 t. 常常也把这样一族映射叫做同倫.

如果在空間 X 的一个子空間 X_0 上, 同倫 F 不依賴于 t, 即如果对于任何点 $x \in X_0$ 和任何 $t \in I$, 都有

$$F(x,t) = F(x,0),$$

則已知同倫叫做相对于子空間 X_0 的(或者在子空間 X_0 上恆同的). 不是相对的同倫也叫做自由同倫. 它可以看作相对于空的子空間的同倫.

我們說从空間 X 到空間 Y 的連續映射 g 同倫于連續映射 f, 写成

$$f \sim g,$$

如果存在这样的同倫 $F(x,t) = f_t(x)$, 使得

$$f_0 = f, \quad f_1 = g,$$

即如果对于任何点 $x \in X$,

$$f(x) = F(x,0);$$
$$g(x) = F(x,1).$$

同倫 F 叫做連結映射 f 与映射 g 的同倫. 如果它在子空間 X_0 上是恆同的, 則映射 g 叫做相对于子空間 X_0 而同倫于映射 f, 写成

$$f \sim g \ \mathrm{rel}\ X_0.$$

相对同倫的必要(自然并不充分)的条件是映射 f 和 g 在子空間 X_0 上重合.

容易看出,两个映射的同倫关系是自反的、对称的和传递的,因此从空間 X 到空間 Y 的所有連續映射的集合分裂成彼此同倫的映射的同倫类. 对于相对同倫也有同样的事实.

設 f_1 和 g_1 是从空間 X 到空間 Y 的彼此同倫的連續映射, f_2 和 g_2 是从空間 Y 到空間 Z 的彼此同倫的連續映射. 那末从空間 X 到空間 Z 的合成映射 f_2f_1 和 g_2g_1 也彼此同倫. 这个簡单的附註在整个理論里占有基本的地位,我們将要常常利用它(而不再声明这一点).

以同倫类(包括自由同倫和相对同倫)概念为基础的問題,組成了連續映射的**同倫理論**(或者簡单說成**同倫理論**)的对象. 在本著作里我們只限于研究自由同倫,而且只在为我們的基本目的所必須时才提到相对同倫. 研究对象的这种限制并不牽涉到事情的实質,而只是希望在所有基本之处闡明自由同倫的最簡单的因而也是最重要的情形.

明显地,在拓扑映射下同倫关系并不被破坏. 这說明同倫理論是拓扑学的分支. 可以証明,同倫关系在較拓扑映射为广的映射下不被破坏. 很自然地,这种映射应該在同倫理論里起着一般拓扑学中的同胚映射的作用. 让我們来定义这种映射.

从空間 X 到空間 Y 的連續映射 f 叫做**同倫等价**,假如存在着从空間 Y 到空間 X 的这样的連續映射 g,使得合成映射 gf 和 fg 分别是从空間 X 和空間 Y 到自身的、同倫于对应空間的恆同映射 1_X 和 1_Y 的映射:

$$gf\sim 1_X,\quad fg\sim 1_Y.$$

映射 g 也是同倫等价,而且叫做**等价** f **的逆等价**. 我們注意到,逆等价 g 并不由等价 f 唯一决定.

两个空間叫做**同一同倫型的**空間,假如至少存在从一个空間到另一个空間的一个同倫等价的映射. 以下的想法說明了同倫型概念的意义.

設 α 是从空間 X_1 到空間 Y_1 的映射的任意同倫类, f_1 是从空間 X_2

到空間 X_1 的同倫等价的映射，g_1 是从空間 Y_1 到空間 Y_2 的同倫等价的映射. 容易看出，对于类 α 的任何映射 f，从空間 X_2 到空間 Y_2 的所有下列形状的映射

$$g_1 f f_1,$$

属于从空間 X_2 到空間 Y_2 的映射的同一个同倫类 β. 不难肯定，这样作出的映射 $\alpha \to \beta$ 是从空間 X_1 到空間 Y_1 的同倫映射类的集合到空間 X_2 到空間 Y_2 的同倫映射类的集合的一一映射. 因此，在把一个空間換成同一同倫型的空間时，同倫类集合的結构并无改变. 所以在同倫理論里可以把同一同倫型的空間看做相同的.

利用同倫型的概念，同倫理論可以定义作同倫型不变量的理論，即研究在把一个空間換成同一同倫型的空間时不改变的空間性質的理論.

同倫理論与扩展理論密切有关. 让我們来談一下这里所牽涉到的基本事实.

設 X_0 是空間 X 的一个子空間，f 是从空間 X_0 到空間 Y 的連續映射. 映射 f 在 X 上的扩展是指从空間 X 到空間 Y 的这样的連續映射 g，对于任何点 $x \in X_0$，都有

$$g(x) = f(x).$$

映射 f 叫做映射 g 在 X_0 上的部分而且記做 g/X_0. 从空間 X 到自身的恆同映射 1_X 在 X_0 上的部分叫做从子空間 X_0 到空間 X 的嵌入映射.

扩展理論从事于研究扩展存在的必要和充分的条件. 現在还只是在很特殊的一些情形里得到了这种（十分簡单而又方便的）条件. 它們对于同倫理論的价值在于，从空間 X 到空間 Y 的两个映射 f 和 g 的同倫的問題可以化成某个扩展的問題. 实际上，連結映射 f 与映射 g 的同倫乃是集合 $X \times 0 \cup X \times 1$ 的由下列公式給出的映射 F 在空間 $X \times I$ 上的扩展：

$$F(x;t) = \begin{cases} f(x), & \text{如果 } t = 0; \\ g(x), & \text{如果 } t = 1. \end{cases}$$

因此，映射 f 和 g 彼此同倫，必要而且只要映射 F 可以从子空間 $X\times 0\cup X\times 1$ 扩展到整个空間 $X\times I$ 上.

同样地可以解释关于相对于 X_0 的同倫的問題（用集合 $X\times 0\cup X_0\times I\cup X\times 1$ 来代替 $X\times 0\cup X\times 1$）.

在同倫和扩展之間的所說的关系几乎是同倫理論的所有定理的基础. 就在确立了这个关系以后才有可能来察看一下現时代的同倫理論的全盛期.

在这一篇的最后，让我們来討論一下在同倫理論里經常利用的一些簡单的定理.

空間 X 的子空間 X_0 叫做它的收縮核，假如从子空間 X_0 到自身的恆同映射可以扩展成从整个空間 X 到子空間 X_0 的映射. 換句話說，子空間 X_0 叫做空間 X 的收縮核，假如存在从空間 X 到空間 X_0 的这样的連續映射 g，对于任何点 $x\in X_0$，都有

$$g(x)=x.$$

这个映射 g 叫做收縮映射. 如果把这个映射看作从空間 X 到自身的映射，它同倫于从空間 X 到自身的恆同映射，則 X_0 叫做空間 X 的形变收縮核. 連結恆同映射与收縮映射的同倫叫做收縮形变.

收縮核对于扩展理論的意义由下列命題决定：

[1.1] 如果 X_0 是空間 X 的收縮核，則从子空間 X_0 到任意空間 Y 的任何映射 f 都可以扩展成整个空間 X 的映射.

实际上，設 g 是收縮映射，那末映射 fg 就是所要的扩展.

至于形变收縮核，則它在研究同倫型的問題时占有基本的地位：

[1.2] 形变收縮核 X_0 的同倫型与整个空間 X 的同倫型相同.

实际上，設 g 是从空間 X 到子空間 X_0 的收縮映射，i 是从子空間 X_0 到空間 X 的嵌入映射. 明显地，

$$gi=1_{X_0}.$$

此外，按照已知条件，映射 ig 同倫于恆同映射 1_X:

$$ig\sim 1_X.$$

因此，g 和 i 是互逆的同倫等价. 因而命題[1.2]証明了.

这个命題許可进一步推广，推广的命題确立了已知映射是同倫

等价的非常有用的必要充分条件．因为这里牵涉到的概念并非普遍知道的，让我們詳細地来敍述一下．

为了簡单起見，我們假定所討論的空間滿足第一分离公理，卽认为空間的点是閉的，对于我們将要討論的命題說，这个限制是不重要的．

設 f 是从空間 X 到空間 Y 的任意連續映射．我們令

$$M = X \times I \cup Y$$

（假設空間 $X \times I$ 和 Y 不相交）．我們来討論集合 Z，它的元素是空間 M 的所有形状 (x,t) 的点，$x \in X$，$0 \leqslant t < 1$，以及空間 M 的所有形状 $f^{-1}(y) \times 1 \cup y$ 的子集合，这里 $y \in Y$，$f^{-1}(y)$ 是点 y 的完全原象．集合 M 的每个点 ξ 显然包含在集合 Z 的唯一的一个元素里．包含点 ξ 的元素我們記做 $\alpha(\xi)$．因此，α 是从空間 M 到集合 Z 的映射．我們在 Z 里引进拓扑，这时认为 Z 中的閉集合只是那样一些集合，它們在映射 α 下的完全原象是 M 中的閉集合．于是 Z 成为拓扑空間，而映射 α 則成为連續映射．这样作出的空間我們叫做**映射 f 的柱形**．

明显地，由公式

$$i(x) = \alpha(x,0);$$
$$j(y) = \alpha(y)$$

决定的从空間 X 到空間 Z 的映射 i 和从空間 Y 到空間 Z 的映射 j 都是同胚映射．我們就认为空間 X 和 Y 根据这些同胚而嵌入到空間 Z 里．由于这一点，我們就把映射 i 和 j 解释成嵌入映射．

让我們提出两个重要的公式，其中第一个根本就是定义：

$$\alpha(x,0) = i(x); \tag{1.1}$$
$$\alpha(x,1) = jf(x). \tag{1.2}$$

現在我們可以来表述上面提起过的命題[1.2]的推广了：

[1.3] **映射 f 是同倫等价，必要而且只要空間 X 是柱形 Z 的形变收縮核．**

我們先来証明这个条件的充分性．

設 X 是柱形 Z 的形变收縮核而且 g_t 是对应的收縮形变．可以証明，从空間 Y 到空間 X 的映射

$$g = i^{-1}g_1 j$$

满足关系:

$$gf \sim 1_X; \tag{1.3}$$

$$fg \sim 1_Y. \tag{1.4}$$

实际上,令

$$F(x,t) = i^{-1}g_1\alpha(x,t), \quad x \in X, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

利用公式(1.1)和(1.2),我們求得

$$F(x,0) = i^{-1}g_1\alpha(x,0) = i^{-1}g_1 i(x) = x;$$

$$F(x,1) = i^{-1}g_1\alpha(x,1) = i^{-1}g_1 jf(x) = gf(x).$$

因此,F 是連結映射 1_X 与映射 gf 的同倫,这就証明了公式(1.3).

現在設 $y \in Y$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,我們求得这样的点 $\xi \in M$,

$$\alpha(\xi) = g_t j(y),$$

而且定义 $G(y,t) \in Y$, 令

$$G(y,t) = \begin{cases} f(x), \text{如果 } \xi = (x,\tau), \ 0 \leqslant \tau \leqslant 1; \\ \xi, \quad \text{如果 } \xi \in Y. \end{cases}$$

尽管点 ξ 并不唯一决定,点 $G(y,t)$ 却唯一地由这个公式决定. 容易看出,这样得到的从乘积 $Y \times I$ 到空間 Y 的映射 G 是連續的,卽是同倫. 如果 $t = 0$,則可以取点 y 作为点 ξ,因而

$$G(y,0) = y.$$

而如果 $t = 1$,則点 ξ 有形状 $(g(y),0)$,因而

$$G(y,1) = fg(y).$$

因此,同倫 G 連結了映射 1_Y 与映射 fg,这就証明了公式(1.4).

公式(1.3)和(1.4)的眞实性表明,映射 f 和 g 是互逆的同倫等价. 因而命題[1.3]的条件的充分性証明了.

我們再来証明必要性.

設 f 是同倫等价而且 g 是 f 的逆同倫等价. 那末公式(1.3)和(1.4)成立. 設 F 是連結映射 1_X 与映射 gf 的同倫, G 是連結映射 1_Y 与映射 fg 的同倫. 对于任何点 $z \in Z$,我們令