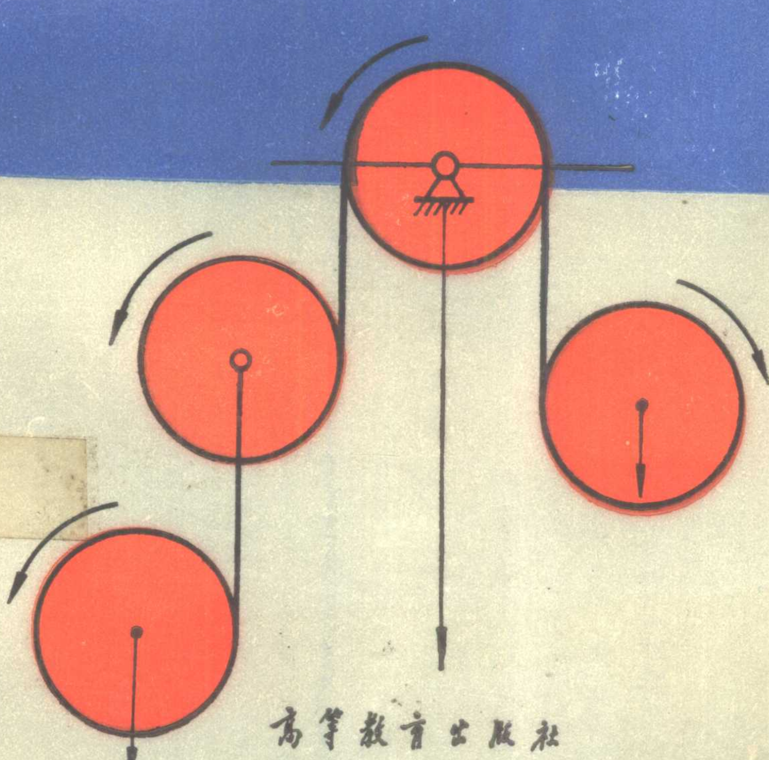
高等学校教材

分析力学解题指导及习题集

刘正福　沙永海　编著



高等教育出版社

分析力学解题指导及习题集

刘正福　沙永海　编著

高等教育出版社

（京）112号

内 容 提 要

本书是参照1987年“工科分析力学教材研讨会”制定的内容，在综合现有国内外教材和有关文献的基础上编写的。

全书分七章，共选例题和习题700多个，其中大部分是基本题和适用于各专业的通用题。每章都包括理论提要，典型题解，解题指导和习题四部分。

本书可作为工科院校研究生和理工科高年级学生开设“分析力学”课时的教学用书，也可供有关教师和工程技术人员参考。

责任编辑　王　晶

高等学校教材
分析力学解题指导及习题集
刘正福　沙永海　编著
•
高等教育出版社出版
新华书店总店北京科技发行所发行
河北省三河县科教印刷厂印装
•
开本 850×1168　1/32　印张16.875　字数430 000
1992年10月第1版　1992年10月第1次印刷
印数 0001— 2 098
ISBN7-04-004028-X/TB•208
定价 7.45 元

前　言

本书是参照1987年"工科分析力学教材研讨会"制定的教材内容，在综合现有国内外教材和有关文献的基础上编写的。

本书共分七章，每章都包括理论提要，典型题解，解题指导和习题四部分。本书共选编747题（例题132个，习题615个），其中大部分是基本题和适用于各专业的通用题。为了帮助学生更好地掌握分析力学解题的基本方法，我们根据多年来的教学经验，在典型题解中，选了一定数量且有一定深度或难度的例题，在例题中较详细地阐明了解题的思路和方法。选编的习题类型较多，适应专业面较广，基本上反映了工科院校的专业特点和要求。对绝大多数计算题给出了答案，以便学生自己练习时校核。

第一章，分析力学的基本概念。包括约束，广义坐标，自由度，虚位移，变换方程，理想约束和变分与微分的交换法则。第二章，基本原理及其应用。讨论了动力学普遍方程的推广和应用。着重分析静态问题，并介绍了凯恩方法的应用。第三章，完整系统动力学基本方程及其应用。着重讨论了第二类拉格朗日方程在力学系统、电学系统、机电系统、碰撞问题、微振动系统、变质量系统和连续介质系统中的应用。第四章，完整系统动力学的其它方程及其应用。包括哈密顿正则方程及其首次积分，惠特克方程，尼尔森方程，哈密顿-雅可比方程与分离变量法，哈密顿正则方程的近似解法——正则摄动法。第五章，力学变分原理及其应用。包括变分概念，哈密顿原理，若丹原理，高斯原理，马保梯-拉格朗日原理，哈密顿原理与里兹法、伽辽金法联合作数值近似计算的问题。第六章，正则变换与积分不变量。包括正则变换的性质、庞加莱-卡当积分不变量和庞加莱通用积分不变量，泊松定理，诺瑟尔定理。第七章，非完整系统动力学运动微分方程。包括第一类拉格朗日方程，劳思方程、马基方程、恰普

雷金方程，波兹曼-海默尔方程，阿佩尔方程，非完整系统的哈密顿原理。

本书可作为工科院校研究生和理工本科高年级学生开设“分析力学”课时的教学用书，也可供有关教师和工程技术人员参考。

本书在编写过程中，征求了部分同行专家的意见，在此向他们表示衷心感谢。洪敏谦教授仔细地审阅了原稿全文，提出了许多中肯的修改意见，在此表示非常感谢。限于编者水平，书中可能有不妥之处，欢迎读者提出批评意见，作者将以感谢的心情考虑这些意见。

华东工学院　刘正福

哈尔滨船舶工程学院　沙永海

目　　录

第一章 基本概念

一、理论提要

最基本的概念是位形、约束、广义坐标、自由度和虚位移。坐标变换方程、理想约束、交换法则($d\delta=\delta d$)是导出分析力学中动力学量和方程的出发点。

1．约束按其数学表达式情况进行分类，列表如下：

约束

双面约束[1]　　单面约束

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td>不显含时间</td><td>显含时间</td></tr>
<tr><td rowspan="2">完整约束</td><td colspan="2">不显含速度</td><td>定常几何约束[2]
$f(\boldsymbol{r})=0$</td><td>非定常几何约束
$f(\boldsymbol{r},t)=0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">显含速度</td><td>可积</td><td>定常可积运动约束[3]
$h(\boldsymbol{r})=C$</td><td>非定常可积运动约束
$h(\boldsymbol{r},t)=C$</td></tr>
<tr><td>非完整约束</td><td>不可积</td><td>定常运动约束
$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})=0$</td><td>非定常运动约束
$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)=0$</td></tr>
</table>

(1) 双面约束又称固执的、不可解的约束；单面约束又称非固执的、可解的约束。

(2) 定常约束又称稳定约束；几何约束又称位置约束、有限约束。

(3) 运动约束又称微分约束、速度约束。

2. 广义坐标是用于描述系统位形的、适当选取的参数①。设想解除全部约束而使系统成为完全自由离散状态，并设确定此种状态下系统位形所需的笛卡尔坐标个数是Σ，完整约束方程个数是d，非完整约束方程个数是g，确定系统位形所需的独立的广义坐标个数是s，则有公式：

$$s=\Sigma-d \tag{1-1}$$

此式说明非完整约束不改变独立的广义坐标个数。常见系统所需的广义坐标的独立个数列表如下：

	Σ	d	s
平面上1个质点(自由)	3	1	2
空间里1个质点(自由)	3	0	3
空间里N个质点(自由)	$3N$	0	$3N$
空间里1个自由刚体(三点定位)	9	3	6
定点运动刚体	9	6	3
平面运动刚体	9	6	3
平面上铰结的(端部)两直杆	12	8	4
空间里1个直杆(两点定位)	6	1	5
空间里铰结的(端部)两直杆	12	5	7
圆球在平面上运动	9	4	5
圆球在固定曲面上运动	9	4	5

3. 自由度是独立的广义坐标变分个数，记为n，则有公式：

$$n=s-g=\Sigma-(d+g) \tag{1-2}$$

① 若广义坐标之间还满足约束方程$f(q,t)=0$，则称此类一组广义坐标为剩余的一组广义坐标。因为一般能直觉地找到独立的一组广义坐标，所以通常将广义坐标定义为独立的参数；所谓广义坐标的个数即本书所述的独立的广义坐标个数。

4．虚位移是在某一固定时刻，在一定位置上系统的为约束所允许的无限小位移。独立的虚位移组数等于自由度数。无论是完整的或是非完整的系统，自由度数都等于独立的坐标变分个数，等于独立的虚位移组数，等于独立的广义速度的个数。

5．笛卡尔坐标与独立的广义坐标之间的变换方程

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1,\cdots,q_s,t) \\ y_i &= y_i(q_1,\cdots,q_s,t) \\ z_i &= z_i(q_1,\cdots,q_s,t) \end{aligned}\right\} \quad (i=1,2,\cdots) \tag{1-3}$$

的建立不仅取决于约束性质而且依赖于广义坐标的选取。虚位移与广义虚位移(广义坐标的变分)之间存在关系式

$$\left.\begin{aligned} \delta x_i &= \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j \\ \delta y_i &= \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\delta q_j \\ \delta_i &= \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\delta q_j \end{aligned}\right\} \quad (i=1,2,\cdots) \tag{1-4}$$

对于完整系统常取以下一组独立的虚位移用于解题：令$\delta q_k\neq 0$而$\delta q_j=0\,(j\neq k)$，$(k=1,2,\cdots,\ s=n)$得到

$$\left.\begin{aligned} (\delta x_i)_k &= \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k \\ (\delta y_i)_k &= \frac{\partial y_i}{\partial q_k}\delta q_k \\ (\delta z_i)_k &= \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\delta q_k \end{aligned}\right\} \quad (k=1,2,\cdots,\ s=n) \tag{1-5}$$

6．交换法则$(d\delta=\delta d)$是一个尚待解决的问题，但是关于微分与变分的换位运算的形式与变换方程(1-3)有关，存在以下公式：

$$(\mathrm{d}\delta-\delta\mathrm{d})\boldsymbol{r}_i=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}(\mathrm{d}\delta-\delta\mathrm{d})q_j \tag{1-6}$$

或

$$\mathrm{d}\delta\boldsymbol{r}_i-\delta\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}(\mathrm{d}\delta q_j-\delta\mathrm{d}q_j) \tag{1-7}$$

7．理想约束是分析力学的基本假定，即约束反力（或称约束力）在系统的任意一组虚位移上所做的虚功总和等于零。其数学表达式是

$$\Sigma\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0\quad(i=1,2,\cdots,N) \tag{1-8}$$

二、典型题解

本章习题共分三类：1.列出约束方程；选择广义坐标；建立变换方程确定自由度；2.写出系统虚位移所满足的条件；判断约束是否是理想约束；3.关于d与δ两种运算的数学演算。

例1-1　顶角为2α、底半径为R的正圆锥可绕其对称轴转动，质点M从顶点沿圆锥一条母线向底面运动。试写出质点的约束方

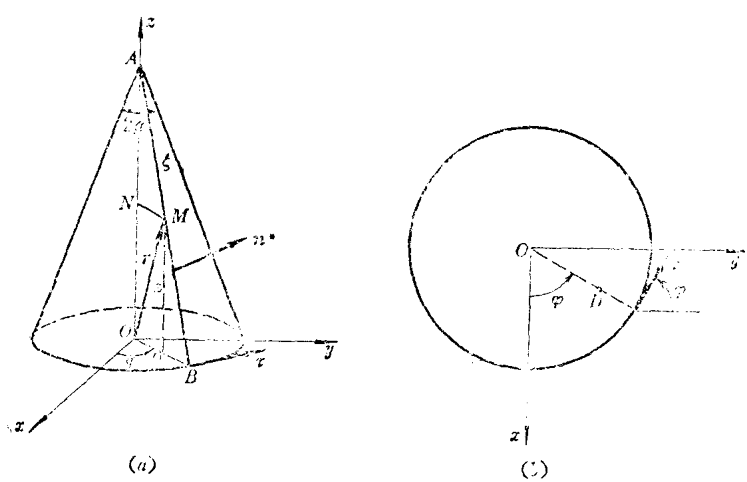


图 1-1

程，分析其类别，选择广义坐标，建立变换方程，确定自由度。

解 选定圆锥对称轴为直角坐标系的z轴，底面中心为原点。x轴和y轴的选定如图1-1a所示。设质点所在的母线与z轴构成的平面与坐标平面Oxz之间的夹角为φ，它就是圆锥的转角。质点在完全自由状态的坐标为x，y，$z(\Sigma=3)$。但是由于它被限制在平面AOB上，因此其向径$\boldsymbol{r}$应垂直于该平面的法线方向$\boldsymbol{n}^*$，即

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}^*=0 \tag{1}$$

式中$\boldsymbol{n}^*$与B点运动方向$\boldsymbol{\tau}$一致(图1-1b)，故知

$$\boldsymbol{n}^*=\boldsymbol{\tau}=(-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0) \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式，有

$$(x,y,z)\cdot(-\sin\varphi,\ \cos\varphi,0)=0$$

从此列出一个约束方程

$$-x\sin\varphi+y\cos\varphi=0 \tag{3}$$

再注意到M点还需沿AB母线运动，因此其高度z与它到转轴距离$MN=\rho=\sqrt{x^2+y^2}$之间存在着关系$(OD=\rho)$：

$$R-\sqrt{x^2+y^2}=z\,\mathrm{tg}\,\alpha \tag{4}$$

或

$$x^2+y^2-(R-z\,\mathrm{tg}\,\alpha)^2=0 \tag{5}$$

(4)或(5)式是另一个约束方程。(3)、(5)式分别代表一张动平面和一张定曲面，平面和曲面的交线即运动着的母线AB。

以上所列的两个方程中不出现质点速度分量$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$，可见是属于几何约束。但是由于圆锥运动尚未交待，所以要做进一步细致的讨论。若圆锥运动已知，且$\varphi=\varphi(t)$，则质点所受约束之一是非定常的。若圆锥不动，固定在某个角度φ_0位置上，则全部约束是定常几何约束。若问题改换为取圆锥与质点作一系统对待，则(3)、(5)式都是定常几何约束。

描述系统位置所需的坐标不一定取上述直角坐标，譬如M点的坐标不用x，y，z表示，而选择柱坐标ρ，φ，z。但是它们不

是独立的：$R-\rho=z\,\mathrm{tg}\alpha$；$\varphi$取决于圆锥的运动。由于存在两个约束方程，因此独立的广义坐标个数是1。可以选ρ，也可以选定z，在φ为已知的时间函数的条件下，ρ或z能确定M点的位置。此外选择圆锥顶点到M点的距离ξ也能确定M点的位置。

现在以ξ为广义坐标（$AM=\xi$），φ为参数，写出变换方程。因为从几何关系看出直角边MN与ξ斜边之间有公式

$$MN=\xi\sin\alpha=\rho$$

从柱坐标与直角坐标之间关系，得到

$$x=\rho\cos\varphi=\xi\sin\alpha\cos\varphi \tag{6}$$

$$y=\rho\sin\varphi=\xi\sin\alpha\sin\varphi \tag{7}$$

再由约束方程（4），又得

$$z=(R-\rho)\,\mathrm{ctg}\alpha=(R-\xi\sin\alpha)\,\mathrm{ctg}\alpha \tag{8}$$

联立的（6）—（8）式就是变换方程。

因为M点是具有完整约束的系统，其自由度为1。

例1-2 一只机械手$ABCDEF$由四个刚体组成（图1-2）（A——肩，B——肘，C——腕，D——虎口，E——掌，F——指）。A是球形铰链，B、C、D是三个平面铰链。求系统的自由度。

解 方法一：四个刚体若各自处于分离状态，则系统的位形是24个自由度。由于AB受一球形铰链约束着，则减少了3个自由度（固定点A不动），而平面铰链B限制BC运动，使其只能相对于AB作“定轴”转动，使之减少5个自由度，同理另外两个平面铰链分别使CD、DF各自减少5个自由度。总之，由于几何约束存在使该系统共减少18个自由度，因此机械手系统是6个自由度。

方法二：确定刚体位置取决于刚体内某些特定点的坐标数或独立的广义坐标（通常是角度）。刚体AB绕定点A运动，独立的广义坐标为3。BC位置的确定需要增加1个相对AB的转动所需的一个独立参数；同理，确定CE、DF的位置分别再各自增加1

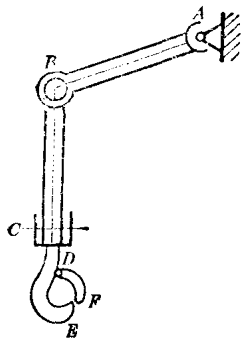


图 1-2

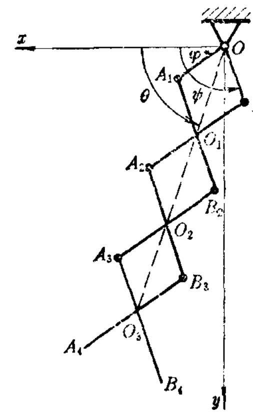


图 1-3

个描述相对转动的独立参数。总之，确定系统位形共需6个独立参数(广义坐标)。因系统是受几何约束限制，故自由度是6。

通常取刚体AB线段方位角或AB绕A的转动角（比如欧拉角）、BC相对于AB的转角、CE相对于BC的转角、DF相对于CE的转角作为系统的(独立的)广义坐标。

例1-3 惰钳悬挂在固定点上，它由六根长杆和两根短杆组成，如图1-3所示。长杆长$2a$，短杆长a。所有铰结的地方（包括固定点处)都是平面铰，铰的转轴方位平行，系统实质上限制在同一平面内运动。求系统的自由度，选取两组以上独立的广义坐标，写出对应于两组广义坐标的变换方程。

解 方法一：8根杆若都分离为平面运动的自由杆件，则共有$3\times8=24$个自由度。因OA_1、OB_1杆绕轴O作定轴转动，各自减少2个自由度，故自由度减至$24-2\times2=20$。同理，其余6杆因分别铰结在A_1、B_1、A_2、B_2、A_3、B_3 6处，故又减少$2\times6=12$个自由度。最后O_1、O_2、O_3的铰链又限制6杆不得交叉错位，又减少$2\times3=6$个自由度。总之系统具有$24-(4+12+6)=2$个自由度。

方法二：系统位形取决于 A_1、A_2、A_3、B_1、B_2、B_3 6 个点的位置。当A_1点和B_1点确定后则因铰链O_1、O_2、O_3存在，$OA_1O_1B_1$，$O_1A_2O_2B_2$，$O_2A_3O_3B_3$形成菱形也被确定，故系统位形实际取决于A_1、B_1两点的位置。它们的位置取决于 2 个独立的坐标。系统只受完整约束限制，所以系统自由度是 2。

可选两短杆与水平轴的夹角φ，ψ作为一组独立的广义坐标。另一组可选O、O_1、O_2、O_3联线（直线）与水平轴夹角θ及O_1和O的距离ξ。以前用一组广义坐标$\varphi\psi$写变换方程就是只要写出 A_i、B_i（$i=1,2,3,4$）的坐标与广义坐标φ、ψ的关系便可足以说明系统的位形，为此，注意下列向量关系：

$$\boldsymbol{r}_{A_i}=(i-1)\boldsymbol{r}_{B_1}+i\boldsymbol{r}_{A_1},\quad \boldsymbol{r}_{B_i}=(i-1)\boldsymbol{r}_{A_1}+i\boldsymbol{r}_{B_1}$$
$$(i=1,2,3,4)$$

式中 $\boldsymbol{r}_{A_i}$、$\boldsymbol{r}_{B_i}$、$\boldsymbol{r}_{A_1}$、$\boldsymbol{r}_{B_1}$分别为A_i、B_i、A_1，B_1各点的向径。据此推出变换方程为

$$\begin{cases} x_{A_i}=(i-1)a\cos\psi+ia\cos\varphi \\ y_{A_i}=(i-1)a\sin\psi+ia\sin\varphi \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_{B_i}=(i-1)a\cos\varphi+ia\cos\psi \\ y_{B_i}=(i-1)a\sin\varphi+ia\sin\psi \end{cases}\quad (i=1,2,3,4)$$

方法三：系统位形依赖于 8 个点的 16 个坐标 x_{A_i}，y_{A_i}，x_{B_i}，y_{B_i}；但是它们之间按刚体定义而存在下列八个约束（完整的）方程

$$x_{A_1}^2+y_{A_1}^2=a^2,\quad x_{B_1}^2+y_{B_1}^2=a^2$$
$$(x_{A_1}-x_{B_2})^2+(y_{A_1}-y_{B_2})^2=(2a)^2,$$
$$(x_{B_1}-x_{A_2})^2+(y_{B_1}-y_{A_2})^2=(2a)^2$$
$$(x_{A_2}-x_{B_3})^2+(y_{A_2}-y_{B_3})^2=(2a)^2,$$
$$(x_{B_2}-x_{A_3})^2+(y_{B_2}-y_{A_3})^2=(2a)^2$$
$$(x_{A_3}-x_{B_4})^2+(y_{A_3}-y_{B_4})^2=(2a)^2,$$
$$(x_{B_3}-x_{A_4})^2+(y_{B_3}-y_{A_4})^2=(2a)^2$$

又因为O_1、O_2、O_3铰链存在，则A_1B_2杆的中点就是B_1A_2杆的中

点；A_2B_3杆、A_3B_4杆的中点分别为A_3B_2杆、A_4B_3杆的中点，因而有等式

$$\frac{x_{A_1}+x_{B_2}}{2}=\frac{x_{A_2}+x_{B_1}}{2}, \qquad \frac{y_{A_1}+y_{B_2}}{2}=\frac{y_{A_2}+y_{B_1}}{2}$$

$$\frac{x_{A_2}+x_{B_3}}{2}=\frac{x_{A_3}+x_{B_2}}{2}, \qquad \frac{y_{A_2}+y_{B_3}}{2}=\frac{y_{A_3}+y_{B_2}}{2}$$

$$\frac{x_{A_3}+x_{B_4}}{2}=\frac{x_{A_4}+x_{B_3}}{2}, \qquad \frac{y_{A_3}+y_{B_4}}{2}=\frac{y_{A_4}+y_{B_3}}{2}$$

共有6个约束方程。按公式$\Sigma-d=s=n$，得知系统的自由度是

$$n=16-(8+6)=2$$

例1-4　如图1-4所示四轮小车在平面上运动(俯视图)。前轮为导向轮，可绕车架上柱铰链B转动。假定四小轮与平面之间作纯滚动，试选择适当的独立的广义坐标，写出约束方程，求系统的自由度。

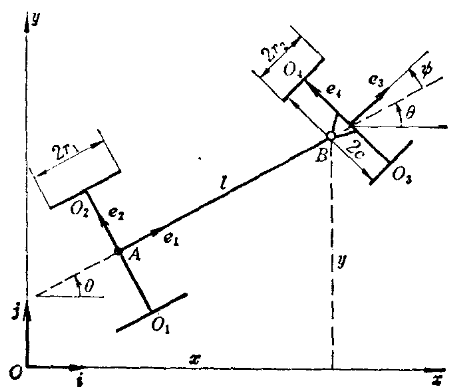


图　1-4

解　系统由车架，导向轮轴O_3O_4和四个轮O_1，O_2、O_3、O_4组成。系统位形取决于车架O_1O_2AB及导向轮轴的位置和四个轮子相对于车架转动的位置的确定。因此，作平面运动的车架，其位置由基点B的坐标$(x,\ y)$及车架上连杆AB与x轴的夹角θ决定；

前后四个轮子的位置由相对于车架的转角φ_1、φ_2、φ_3、φ_4决定；导向轮轴的位置由相对于AB连杆的转角ψ决定。这样共需8个独立的广义坐标(x, y, θ, ψ, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4)确定系统的位形。当然，不再存在其它的完整约束，但还有非完整约束条件所对应的约束方程。事实上只有四个轮子与地面接触的那4个点$M_i(i=1,2,3,4)$在速度上受限制，即因轮子作纯滚动，则这些点(图上它们分别与轮心O_1、O_2、O_3、O_4重合，故未标出）的速度$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$、$\boldsymbol{v}_3$、和$\boldsymbol{v}_4$等于零。假定坐标系Oxy的两条坐标轴上的单位向量记作$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$，车架后轴O_1O_2的轴向及其正交的单位向量$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$，导向轮轴O_3O_4的轴向及其正交的单位向量记作$\boldsymbol{e}_3$、$\boldsymbol{e}_4$。取车架为动参考系(作平面运动)，应用速度合成定理，分别求得四个接触点的速度。

$$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_{O_i}+\boldsymbol{v}_{ir}\quad(i=1,2,3,4)$$

式中$\boldsymbol{v}_{O_i}$是轮心O_i ($i=1,2,3,4$)的速度，$\boldsymbol{v}_{ir}$是接触点的相对速度。下面分别给出公式右边各项的具体表达式：

$$\boldsymbol{v}_{O_1}=\boldsymbol{v}_B+\boldsymbol{\omega}_\theta\times(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AO_1})=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+a\dot{\theta}\boldsymbol{e}_1-l\dot{\theta}\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{v}_{O_2}=\boldsymbol{v}_B+\boldsymbol{\omega}_\theta\times(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AO_2})=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}-a\dot{\theta}\boldsymbol{e}_1-l\dot{\theta}\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{v}_{O_3}=\boldsymbol{v}_B+(\boldsymbol{\omega}_\theta+\boldsymbol{\omega}_\psi)\times\overrightarrow{BO_3}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+c(\dot{\theta}+\dot{\psi})\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{v}_{O_4}=\boldsymbol{v}_B+(\boldsymbol{\omega}_\theta+\boldsymbol{\omega}_\psi)\times\overrightarrow{BO_4}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}-c(\dot{\theta}+\dot{\psi})\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{v}_{1r}=-r_1\dot{\varphi}_1\boldsymbol{e}_1,\qquad \boldsymbol{v}_{2r}=-r_1\dot{\varphi}_2\boldsymbol{e}_1$$

$$\boldsymbol{v}_{3r}=-r_2\dot{\varphi}_3\boldsymbol{e}_3,\qquad \boldsymbol{v}_{4r}=-r_2\dot{\varphi}_4\boldsymbol{e}_3$$

因一组基向量($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$)与另两组基向量($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$)和($\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$)存在关系：

$$\begin{cases}\boldsymbol{i}=\cos\theta\boldsymbol{e}_1-\sin\theta\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{j}=\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2\end{cases},\quad \begin{cases}\boldsymbol{i}=\cos(\theta+\psi)\boldsymbol{e}_3-\sin(\theta+\psi)\boldsymbol{e}_4\\ \boldsymbol{j}=\sin(\theta+\psi)\boldsymbol{e}_3+\cos(\theta+\psi)\boldsymbol{e}_4\end{cases}$$

整理得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_1=&(\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta+a\dot{\theta}-r_1\dot{\varphi}_1)\boldsymbol{e}_1\\ &+(-\dot{x}\sin\theta+\dot{y}\cos\theta-l\dot{\theta})\boldsymbol{e}_2=0\end{aligned}$$