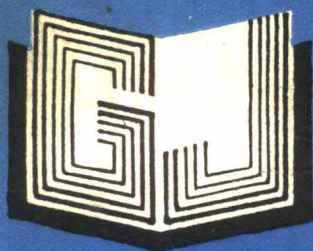


983000



高等学校教材

计算流体力学

上海交通大学 陈汉平 主编



高等学 校 教 材

计 算 流 体 力 学

上海交通大学 陈汉平 主编

水利电力出版社

内 容 提 要

本书介绍常用的流体流动计算方法。主要内容有：流体流动控制方程，势流场的有限元解法，粘性可压缩流场速度、压力的原始变量有限差分法，粘性不可压缩流场的流函数涡度有限差分法以及紊流数值模拟。

本书可作为大专院校热能动力类专业学生的教材，也可供相关专业研究生和工程技术人员参考。

高 等 学 校 教 材 计 算 流 体 力 学

上海交通大学 陈汉平 主编

水利电力出版社出版

(北京三里河路6号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

北京市地矿局印刷厂印刷

787×1092毫米 16开本 12印张 269千字

1995年11月第一版 1995年11月北京第一次印刷

印数 0001—1770册

ISBN 7-120-02397-7/TK·355

定价 9.40元

前 言

本书是根据全国热动力类专业委员会 1987 年 9 月在南京通过的流体力学选修课教学大纲及原《能源部 1993~1995 年高等学校教材编审出版计划》编写的。

书中论述计算流体力学的基本原理以及它们在热动力工程中的应用,着重讨论计算流体力学的有限差分法和有限元法,流动计算程序中常用的数值处理手段及其物理依据,常温及伴有内热源和热传导的流体流动计算。

本书可供热动力类专业选修课或研究生课程使用,也可供有关工程技术人员参考。

本书由上海交通大学陈汉平编写第一、三、四、五章,西安交通大学景思睿编写第二章,陈汉平担任主编。

全书由东南大学陈善年教授主审。

限于编者水平,书中难免有错误或不妥之处,恳请读者批评指正。

编者

1995 年 3 月

目 录

前 言	
绪 论	1
第一章 流体流动的控制方程	3
§ 1.1 基本方程	3
§ 1.2 控制方程的通用表达式	8
§ 1.3 离散化概念	11
习题	12
第二章 有限元法	13
§ 2.1 有限元法概述	13
§ 2.2 数学基础	15
§ 2.3 建立有限元方程	26
§ 2.4 单元、插值函数与数值积分	39
§ 2.5 无粘性流场的有限元分析	64
习题	86
第三章 有限差分法	88
§ 3.1 建立有限差分方程	88
§ 3.2 求解纯扩散问题	91
§ 3.3 对流扩散问题的差分格式	112
§ 3.4 流场计算	127
§ 3.5 计算程序设计和算例	137
习题	142
第四章 不可压缩流动的流函数涡度解法	145
§ 4.1 二维不可压缩流动的流函数涡度方程	145
§ 4.2 流函数涡度方程的求解	147
§ 4.3 涡度输运方程的求解	149
§ 4.4 流函数方程求解	152
§ 4.5 涡度方程和流函数方程的边界条件	156
§ 4.6 三维流场解法	159
习题	160
第五章 紊流数值模拟	162
§ 5.1 紊流的基本特征	162
§ 5.2 紊流控制方程的时均化处理	163
§ 5.3 基于涡粘系数假设的紊流模型	168
§ 5.4 低 Re 数 $k-\epsilon$ 模型与壁面函数法	175

绪 论

流动现象在自然界和工程中时时处处都在发生,热能动力设备中化学能、热能和机械能等各种能量形式间的相互转化都是在工质流体的循环流动过程中实现的。因此深入研究流体流动的定性定量关系对热能动力工程的设计、制造和运行都有着十分重要的意义。

认识流体流动的性质需要通过实验和分析两条途径着手,而实验是最基本的途径。基本的认识来自实验,经过推理得到的认识也必须通过实验来验证。可视技术是重要的实验手段之一,通过着色、施放烟雾、记录壁面流线轨迹等手段可以把流场中不易观察到的流线走向、漩涡发生和发展等现象直观地显示出来,从而对流动建立起定性认识。为了定量地认识流动,就需要利用实验测量仪表逐一测出流场内有限个位置上的速度量值和方向。对于层流流动,可以用毕托管来测量它的流速;对于紊流流动,毕托管只能测出平均速度,若要进一步了解紊流速度脉动,就需要用热线风速仪或多普勒激光测速仪等动态响应极快的仪表来测量。精确地测量一个复杂流场往往需要花费许多的时间和经费。为了提供一个人工模拟的实验环境,需要建造风洞、水洞等实验设备,专门制作测量模型,消耗大量的驱动功率。尤其对于大尺寸、高流速的实验,这种花费将是十分可观的。有时还会遇到超高温、超高压、深低温、有毒工质等苛刻条件,实验测量的代价更高得惊人。

理论分析方法首先要根据实验观察、测量得到基本认识,建立起控制流动的一组微分方程。这组控制方程包括反映流体质量守恒的连续性方程和反映流体动量守恒的运动方程。当流体的密度、粘度等物性参数依赖于温度时,流动控制方程还包括反映流体能量守恒的能量方程。热能动力工程中的许多流动问题,如锅炉炉膛内的燃烧过程、汽轮机中蒸汽流动等,都与能量方程密切相关。如能用数学方法求解控制微分方程得到描述速度、压力等流场参数变化的解析表达式,那么给定流场的初始和边界条件时,就能由解析表达式求得全部流场信息。可见理论分析得到的是适用于各种不同初始条件和边界条件的流场参数的连续变化规律,从这个意义上说,它所揭示的规律比某一个具体条件下得到的实验结果更加深刻。可惜流动控制方程通常是一组非线性的偏微分方程,它们的求解在数学上有很大的困难,只有平板、圆管层流等很少几种简单流动才能得到解析解,大量的流动问题只能依靠数值求解。

微分方程的数值求解只有在给定了计算区域以及初始和边界条件之后才能进行,而且只能求出计算域内若干个离散点上的流动参数。这一点数值解和实验测量十分相像,所以数值求解也被叫做数值实验。流动问题数值解的正确性取决于控制方程、初始和边界条件的正确性以及数值计算本身的精确度。对于复杂流动,如复杂紊流问题,目前还不得不引进一些经验或半经验的假设来简化计算,以便能用现有的计算设备获得方程的解,由此得到的结果常常需由实验来验证或修正。随着电子计算机容量和速度的发展,数值求解的能力会越来越高,而计算成本会越来越低。现在数值求解在热能动力工程的设计、运行中已

被广泛应用。设计时通过数值计算来预测流场，筛选设计方案；运行时通过数值仿真来进行过程监测和优化控制。在其他工程领域以及紊流理论等基础研究中，数值计算也起着重要作用。

偏微分方程数值求解的方法很多，目前应用最广泛、最成熟的是有限差分法和有限元法两种，计算流体力学也不例外，常采用这两种方法。本书第一章叙述控制流体流动的微分方程，着重讨论方程中各项的物理意义以及方程在不同条件下的表达形式。第二章讨论求解势流问题的有限元法。第三章和第四章讨论的都是有限差分法，第三章主要讨论流场问题的速度、压力原始变量有限控制容积积分解法，第四章主要讨论流场问题的流函数涡度有限差分解法。第五章讨论紊流数值模型和紊流问题的计算方法。

按照流体流动的性质来划分，无粘性不可压缩流体流动是最简单的流动形式，一些热能动力设备中的主流部分往往可以简化成这种流动。本书的第二章和第三章都涉及这类问题的解法，学生学习时应该首先注意掌握。在管流、容器及能量转换设备壁面附近的边界层流动中，速度梯度很大，有热交换时温度梯度也很大，那里流体粘性的影响是必须考虑的。而有一些复杂流动，如锅炉内燃烧区的流动，全场充满着漩涡、回流和分离流，不可能分出哪里是无粘性的主流部分，它们是全场粘性流的典型例子。本书第三、四、五章有较大的篇幅讨论粘性流体流动的计算。对于流体的压缩性，要分别情况区别对待。液体工质的可压缩性很小，按不可压缩流体处理；气体或蒸汽的压缩性对流动的影响取决于马赫数的大小，马赫数较高时压缩性是必须考虑的。当马赫数大于1时流场内将可能产生激波，对流动产生巨大影响。汽轮机末级长叶片、蒸汽引射器内都有可能产生激波。本书仅讨论可压缩流体问题的一般处理方法，未涉及激波的数值计算。

第一章 流体流动的控制方程

流体流动的控制方程是一组由连续性方程、运动方程和能量方程构成的微分方程组，它们反映了流动过程严格遵守质量守恒、动量守恒和能量守恒的物理本质。连续性方程、运动方程和能量方程已经在工程流体力学课程中导出，其中能量方程还在传热学和燃烧学等相关学科中讲述过，本书在引用它们时不再作详细的推导，只是对它们的物理意义作出解释，着重讨论它们在不同条件下的简化以及便于数值计算程序设计的方程表达形式。

§ 1.1 基本方程

1.1.1 连续性方程

连续性方程描述了流动过程中流体质量守恒的性质。三维直角坐标下的连续性方程表示为：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1-1)$$

以下结合图 1-1 来说明式中各项的物理意义。

ρu 、 ρv 和 ρw 分别表示沿 x 、 y 、 z 坐标方向微元体表面单位面积的质量流量，并取流出为正号。显然式 (1-1) 的后三项之和表示了时间 dt 内流出微元体 $dx dy dz$ 的净质量，它一定等于同一时间内该微元体由于密度变化造成的净减质量。

连续性方程也可以用圆柱坐标或矢量等形式来表示。用矢量表示的方程为：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1-2)$$

或者

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{v} = 0 \quad (1-3)$$

连续性方程中除了速度矢量 $\vec{v}$ 是变量之外，流体的密度也是变化的。通常密度 ρ 由流体的状态方程来确定。在某些定常、不可压缩等特定条件下，连续性方程将得到简化。例如以下四种情况：

(1) 定常可压缩流动。密度 ρ 不随时间变化， $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 。连续性方程 (1-2) 简化为：

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1-4)$$

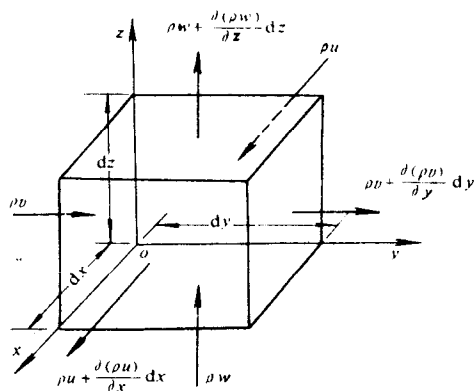


图 1-1 三维直角坐标下的微元模型

即任意时刻流进和流出微元体的质量流量总和等于零。

(2) 不可压缩流动。密度 ρ 既不随时间变化又不随位置变化, $\frac{d\rho}{dt}=0$, 连续性方程(1-3)简化为

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (1-5)$$

即任意时刻流进和流出微元体的体积流量总和等于零。

(3) 不可压缩无旋流动。流体力学中旋度(或涡度)的定义是:

$$\zeta_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \zeta_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \zeta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1-6)$$

任何无旋流动都有 $\zeta_x = \zeta_y = \zeta_z = 0$, 因此一定存在着一个势函数 $\varphi(x, y, z, t)$, 满足关系式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = w \quad (1-7)$$

将势函数定义式(1-7)代入不可压缩流动连续方程(1-5), 得到势函数的拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1-8)$$

(4) 二维不可压缩无旋流动。不可压缩流动的连续性方程式(1-5)在二维直角坐标条件下表示为:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1-9)$$

根据导数的性质, 由式(1-9)可以定义一个流函数 ψ , 满足

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \quad (1-10)$$

将式(1-10)代入旋度表达式(1-6)的第三式, 且令旋度 $\zeta_z = 0$, 就得到二维不可压缩无旋流动的流函数的拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (1-11)$$

对于二维不可压缩无旋流动, 除了流函数的拉普拉斯方程外, 还存在一个由式(1-8)简化得到的二维势函数拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (1-12)$$

1.1.2 运动方程

运动方程反映了流动过程中动量守恒的性质, 有时也称动量方程。按照牛顿第二定律, 流体微元所受的合外力等于微元体动量的变化率, 或者可以把动量变化率看成流体微元体的惯性力, 那么运动方程反映的就是微元流体所受的外力与惯性力之间的平衡。

通常微元流体所受的外力有体积力、粘性力和压力。体积力是指分布作用在整个微元体质量上的力，例如重力、电磁力、浮升力等。粘性力是由于分子微观运动在不同速度的相邻两层流体之间产生的摩擦力。粘性力和压力都是表面力。

牛顿流体如图 1-2 那样作一维剪切流动时，流体的粘性剪切应力与法向速度梯度成正比。

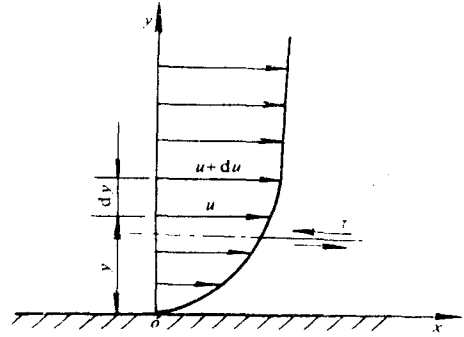


图 1-2 一维流动粘性剪切应力模型

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1-13)$$

比值 μ 只与流体的性质和温度有关，称为流体的动力粘度，单位为 $\text{Pa} \cdot \text{s}$ 。

三维流动情况下的粘性应力要复杂得多，不仅有切向应力，还有法向应力，需要由广义牛顿定律来描述。斯托克斯首先描述了牛顿流体粘性力的完整表达式，由此构成的牛顿流体运动方程就是著名的纳维埃-斯托克斯方程。直角坐标系下纳维埃-斯托克斯方程表示为：

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \text{div } \vec{v}) \\ \rho \frac{dv}{dt} &= \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \text{div } \vec{v}) \\ \rho \frac{dw}{dt} &= \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\mu \text{div } \vec{v}) \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

式中等号左端表示微元体惯性力在三个坐标方向的分量。等号右端第一项 X 、 Y 、 Z 表示沿坐标方向的体积力。第二项中的 p 为流体压力，它的导数表示微元体在坐标方向所受的压强梯度。第三项以及以后各项表示的是广义牛顿粘性力：热动力工程中常用的工质，如水、空气、烟气、过热蒸汽等，都属于牛顿流体，都满足方程式 (1-14)。至于像水煤浆那样成分复杂的流体，已经不再遵守牛顿粘性力定律，因此式 (1-14) 也不再有效。

如果将连续性方程 (1-2) 乘以各个坐标方向的速度分量，再加入到相应的运动方程中去，则得到运动方程的另一种表达形式。以 x 方向为例，将式 (1-2) 乘以 u ，再加入到式 (1-14) 的第一式，便得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \operatorname{div}(\rho \vec{v} u) = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \operatorname{div} \vec{v}) \end{aligned} \quad (1-15)$$

这种吸收了连续性方程的控制方程称为控制方程的守恒型表达式, 而原来的控制方程称为非守恒型方程。无论守恒型方程或非守恒型方程都可以用来描述流体流动, 用它们进行数值计算也没有绝对的优劣之分。但经验表明用守恒型方程作数值计算一般能给出比较精确的计算结果。Cyrus 和 Fulton 已经证明, 对于椭圆型微分方程, 守恒型给出的结果确实比非守恒型更加精确。而通常热能动力工程中出现的流动问题正是属于椭圆型微分方程, 选用守恒型方程求解时, 计算机的运算花费也不算太大, 因此本书主要采用守恒型方程。然而对于可压缩性很强的流体流动, 求解守恒型方程的代价往往很高, 非守恒型方程则常被采用。

1.1.3 能量方程

连续性方程和运动方程中除了未知的速度矢量 $\vec{v}$ 和压力 p 以外, 还有两个物性参量: 密度 ρ 和动力粘度 μ 。一般来说密度和动力粘度也是变量。动力粘度主要取决于温度。流体作常温流动或温度变化不大时, 动力粘度的变化可以不计。液体的可压缩性很小, 密度的变化常被忽略, 当动力粘度变化也很小时就可作常物性流体处理。气体的可压缩性很强, 它的密度取决于压力和温度, 由气体状态方程确定, 只有当流动马赫数很低时才能忽略密度变化的影响。

对于常物性流动, 连续性方程和运动方程中只有速度和压力两个变量, 方程完全封闭。也就是说, 常物性流动的控制方程只包含连续性方程和运动方程, 求解这两个方程, 流场就能完全被确定。

计算变物性流动时, 流体密度 ρ 和动力粘度 μ 需根据压力和温度计算得到。流场各点的温度由能量方程控制, 因此变物性流动的控制方程由连续性方程、运动方程和能量方程三个方程组成, 其中包含速度、压力和温度三个变量。此外还必须给出由温度和压力计算密度的状态方程以及由温度确定动力粘度的实验资料, 这时方程才完全封闭。热能动力工程中许多流动都伴有热产生或热交换, 流场内温度变化较大, 求解能量方程常常是需要的。

能量方程反映了流动过程中能量守恒的基本性质。流体的比能 e 由比内能 u 和动能 $(u^2 + v^2 + w^2)/2$ 两部分组成, 即

$$e = u + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \quad (1-16)$$

e 的单位是 J/kg。流动过程中一定质量流量的流体携带着当地流体的能量流进或流出微元体, 作用在微元体上的体积力和表面力都将因流体的位移而对流体做功, 流体的分子运动导致流体内部的热量传递, 此外燃料燃烧、化学反应和热辐射等都将在流体内部产生热源。按照能量守恒定律, 单位时间内外界向微元体传递的和流体内部产生的能量之和一定等于该时间内微元流体能量的增加。经整理得到能量方程:

$$\rho \frac{du}{dt} = -\operatorname{div} \vec{q} - p \operatorname{div} \vec{v} + \Phi_e + S \quad (1-17)$$

式 (1-17) 左边是流体微元内能的变化率。

式 (1-17) 右边第一项是外界对微元体的热传导。根据傅利叶导热定律

$$\vec{q} = -\lambda \cdot \operatorname{grad} T \quad (1-18)$$

式中 λ 为热导率； T 为流体温度；负号表示导热热流方向与温度梯度方向相反。

式 (1-17) 右边第二项是微元体表面压力对流体做功转化成的能量。

式 (1-17) 右边第三项 Φ_e 被称为能量耗散函数。它由以下各项组成：

$$\begin{aligned} \Phi_e = & -\frac{2}{3}\mu(\operatorname{div} \vec{v})^2 + \mu \left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right] \end{aligned} \quad (1-19)$$

能量耗散函数表示作用在流体微元表面上的粘性法向应力和粘性切向应力对流体做功转化成的热量。对于不可压缩流体有 $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ ，于是式 (1-19) 右边第一项消失。对于低速流动，能量耗散 Φ_e 与能量方程 (1-17) 中的其他项相比要小得多，故可忽略不计。热能动力工程流动计算中一般不考虑耗散项的作用。

式 (1-17) 右边第四项 S 是内部热源。

流体流动的能量方程除了用内能表示外，还常用状态参数焓来表示。热力学状态参数比焓 h 定义为：

$$h = u + p/\rho \quad (1-20)$$

上式对时间 t 求导，得到

$$\frac{dh}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (1-21)$$

把以比内能表示的能量方程 (1-17) 代入式 (1-21)，就得到以比焓表示的能量方程，即

$$\rho \frac{dh}{dt} - \frac{dp}{dt} + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\operatorname{div} \vec{q} - p \operatorname{div} \vec{v} + \Phi_e + S \quad (1-22)$$

考虑到连续性方程 (1-3)，上式左边第三项与右边第二项可被消去。一般压力的时间导数项 dp/dt 和耗散项 Φ_e 总是很小的，将它们略去不计，则能量方程写为：

$$\rho \frac{dh}{dt} = -\operatorname{div} \vec{q} + S \quad (1-23)$$

同样可引进连续性方程写出守恒型的能量方程

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v} h) = -\operatorname{div} \vec{q} + S \quad (1-24)$$

比内能和比焓都是温度的函数：

$$u = c_v T \quad (1-25)$$

$$h = c_p T \quad (1-26)$$

c_v 和 c_p 分别是流体的比定容热容和比定压热容, 它们都是温度的弱函数, 不同温度下的比热容值由实验测定。将式 (1-26) 以及傅利叶导热定律 (1-18) 代入能量方程 (1-24) 很容易得到以温度为变量的能量方程。

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + \text{div}(\rho c_p \vec{v} T) = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + S \quad (1-27)$$

§ 1.2 控制方程的通用表达式

前面一节叙述了一般流体力学教科书给出的连续性方程、运动方程和能量方程, 它们构成的一组严格的控制方程为流动问题的理论求解和数值求解提供了基础。但是直接利用这些方程进行数值求解却并不方便。当我们比较连续性方程式 (1-1)、运动方程式 (1-14) 和能量方程式 (1-27) 时, 就可以发现这些方程的表达形式不尽相同, 数值求解时必须为每一个方程各自编写一套专用的计算程序。这些程序冗长繁琐, 而且通用性很差。对于复杂的流动问题, 除了上述三个基本的控制方程外, 还可能包含不同流体混合的组分方程、紊流数值模型等多个补充控制微分方程。为此希望找到一种通用的表达式, 使这些控制方程都统一起来, 以便大大增强计算程序的通用性和紧凑性。此外对控制微分方程的通用表达式还有一个要求, 就是便于由它们得到线性的离散代数方程组, 因为用电子计算机求解线性代数方程有很高的效率, 且计算成本低, 计算精度高。

对于流动控制微分方程, 不管是连续性方程、运动方程、能量方程, 还是这里没有详细讨论的组分方程和紊流数值模型, 它们都有一个共性: 即都描写了单位质量流体的某个物理量在输运过程中的守恒原理。例如运动方程描写的是动量的守恒原理, 方程的主变量是单位质量的动量, 也就是流体的速度。能量方程描写的是能量的守恒原理, 方程的主变量是单位质量的能量, 即流体的比焓。连续性方程是一个比较特殊的情况, 它描写了质量的守恒原理, 对单位质量来说, 其质量就是 1, 所以连续性方程中除了物性参量 ρ 以外没有其他主变量。为了统一起来, 令一个通用的变量 Φ 代表任意的单位质量物理量作为通用控制微分方程的描述对象, 进一步令 J 表示单位时间内该物理量 Φ 通过控制体界面单位面积的输运通量。

在直角坐标系中取一个立方体 $dx dy dz$ 作为控制容积模型, 并在立方体各界面上标出输运通量, 如图 1-3 所示, 用以讨论通用控制微分方程的建立。

这里使用了控制容积的提法而没有叫作微元体, 这是因为它更加灵活。当控制体尺寸很小时就相当于微元体, 当尺寸较大时, 只要在控制体内部和界面上取一个平均参数就能像微元体一样来计算有限容积的输运通量。实际计算中由于计算机容量的限制, 离散控制体的尺寸总是不可能取得太小的。图中的 J_x 是输运通量在 x 方向的分量。这样, 单位时间内沿该方向流进和流出控制容积的净输运通量为:

$$[J_x + (\partial J_x / \partial x) dx] dy dz - J_x dy dz$$

同样，在 y 和 z 方向有类似的表达：

$$[J_y + (\partial J_y / \partial y) dy] dz dx - J_y dz dx$$

$$[J_z + (\partial J_z / \partial z) dz] dx dy - J_z dx dy$$

最终，单位时间内流进和流出整个控制体单位体积的净输运通量为：

$$\partial J_x / \partial x + \partial J_y / \partial y + \partial J_z / \partial z = \text{div} J \quad (1-28)$$

式中 $\text{div} J$ 是输运通量 J 的散度。

在导出通用控制微分方程之前，还需要

引入流动过程中经常会出现的控制体单位体积内物理量 Φ 的产生源 S 。例如，流动流体在某个位置上被注入或吸出部分质量，相当于在连续性方程中存在一个质量源；当流场中置有一些多孔材料、管束、挡板等障碍物时，流体流动受到阻力而使动量减少，相当于在运动方程中存在一个动量源；流体内部由于喷入燃料燃烧、发生化学反应等原因有热量产生，相当于在能量方程中存在一个能量源。

现在根据守恒原理分几种情况来讨论通用控制微分方程。

(1) 无源定常流动。控制体内部的物理量既不能增加也不能减少，流进和流出控制体的净输运通量为零。

$$\text{div} J = 0 \quad (1-29)$$

(2) 有源定常流动。控制体的流出净输运通量必须等于内部源的产生量。

$$\text{div} J = S \quad (1-30)$$

(3) 有源非定常流动。控制体内部源的产生量扣除流出净输运通量，必须等于控制体内该物理量的变化。

$$\partial(\rho\Phi)/\partial t + \text{div} J = S \quad (1-31)$$

对于输运通量 J 还可以进一步具体化。在流动问题中，输运通量常有两部分组成：

$$J = J_c + J_d \quad (1-32)$$

或

$$\text{div} J = \text{div} J_c + \text{div} J_d \quad (1-33)$$

J_c 是流体宏观运动完成的输运量，称为对流输运通量。例如上游高温流体的能量被流动流体捎带着输运到下游去就属于对流输运。 J_c 的计算比较简单：

$$J_c = \rho \vec{v} \Phi \quad (1-34)$$

J_d 是由于微观分子运动完成的输运量，称为扩散输运通量。即使没有宏观运动，分子

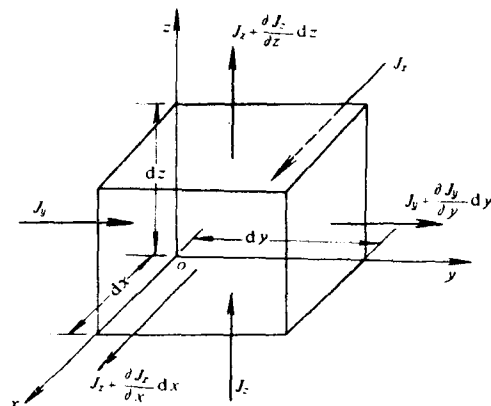


图 1-3 建立通用控制方程的控制容积模型

的热运动也能把热量从高温传至低温,层流边界层中虽然没有穿越层面的宏观法向速度存在,但流体的粘性力(即流体的分子碰撞)会引起两层不同速度流体之间的动量交换等都是扩散输运的例子。扩散输运的定量计算比较复杂,但是在一些简单的扩散过程中,扩散通量总是与被输运物理量梯度的方向相反,大小成正比,例如:傅利叶导热定律(1-18)指出导热热量与温度梯度成正比;牛顿粘性定律(1-13)指出一维流动的粘性应力与速度梯度成正比;对于复杂的扩散过程如三维流动的粘性力,虽然完整的扩散通量计算要复杂得多,但是其中主要部分仍然与变量梯度成正比。因此可以粗略地用梯度形式写出通用的扩散通量表达式:

$$J_d = -\Gamma(\partial\Phi/\partial n) = -\Gamma \text{grad}\Phi \quad (1-35)$$

式中 Γ 称为扩散系数,如热传导问题中的热导率 λ 、层流运动方程中的动力粘度 μ 等,它们由实验确定。

将式(1-33)代入式(1-31)并考虑到式(1-34)和式(1-35),得到:

$$\partial(\rho\Phi)/\partial t + \text{div}(\rho \vec{v} \Phi) = \text{div}(\Gamma \text{grad}\Phi) + S \quad (1-36)$$

式(1-36)就是通用控制微分方程。它由四项组成,从左至右依次是非定常项、对流项、扩散项和源项。对于简单的流动可以缺少其中的一项或两项。

通用控制微分方程有广泛的适用性,它可以代表连续性方程、运动方程和能量方程,也可以代表燃烧过程中的化学组分方程和紊流数学模型等其他控制方程。在涉及多方程的计算问题中尤能显出其优势。然而它只表示了输运方程的共性,在计算时还必须赋予个性,即指明方程中变量 Φ 、扩散系数 Γ 和源项 S 的内容。具体做法是将式(1-36)与 § 1.1 中给出的严格的控制方程式各项逐一对照比较,逐个确定,就象计算程序中的哑实结合一样。下面举例说明应用通用控制微分方程时如何确定方程中 Φ 、 Γ 和 S 。

连续性方程(1-1)用通用控制微分方程式来表示,那么 Φ 就是 1,扩散项和源项都不存在,故取 Γ 和 S 均为零。如果有外来质量注入流动之中,就取注入流量为 S 。

运动方程(1-14)应取函数变量 Φ 分别为 u 、 v 和 w ,扩散系数 Γ 取动力粘度 μ 。显然通用控制微分方程中梯度形式的扩散项不能完全容纳式(1-14)中粘性项的全部内容,为了保证式(1-36)与式(1-14)完全等价,不得不把粘性应力项未能包含在梯度形式扩散项中的剩余复杂部分归并到源项中去,从而使 S 中不仅包含原有物理意义上的动量源(如推动流体运动的压力差),还包括其他项转移来的剩余部分。这里再次强调之所以要把某些项(如上面讨论粘性应力项)拆成两部分完全是数学上的需要,目的是使通用控制微分方程的前三项保持简单而规范的形式,经离散处理后能得到线性代数方程组,充分发挥计算机求解这种方程组的高效率。粘性项的剩余部分归入源项中虽然使源项复杂化了,但使用迭代法求解时源项在每次迭代过程中都暂时作为定值处理,只是在两次迭代之间才考虑它们的变化,并没有增加太多解方程的困难。当然暂时固定源项会降低收敛速度,然而粘性应力项的主要部分仍然保留于扩散项中一起参加求解,收敛速度还是可以保证的。这种将通用控制微分方程各项的剩余部分归入源项的处理方法是有用的,以后还将被用于其他复杂流动通用控制微分方程之中。

在确认通用控制微分方程中的 Φ 、 Γ 和 S 时,应注意每个方程只能有一个统一的变量形式。例如对于能量方程(1-24),当取 Φ 为比焓 h 时,扩散项中的变量也只能取 h ,这样傅利叶定律(1-18)需改写为:

$$q = -(\lambda/c_p)\text{grad}h \quad (1-37)$$

所以扩散系数 Γ 就应该取为 λ/c_p ,而不是式(1-18)中的 λ 。源项 S 为单位体积内产生的热量。当然也可以用 T 作为能量方程的变量。将方程式(1-27)与通用控制微分方程(1-36)相比,应取 Φ 为 T ,这时非定常项和对流项系数比通用方程多了一个 c_p 。为此需要对方程中各项都除以 c_p ,这样扩散项的系数 Γ 应取为 λ/c_p ,而源项 S 也需由原来单位体积产生的热量除以 c_p 。或者也可以把非定常项和对流项中的密度 ρ 取为 ρc_p ,这样扩散系数 Γ 应取为 λ ,源项 S 仍然保持原来单位体积内产生的热量。

§ 1.3 离散化概念

从前两节看到,流动控制方程是一组由函数变量及其一阶和二阶导数构成的非线性微分方程组。除少数几个例子外,一般无法得到它们的解析解,而只能求助于数值解。

数值求解并不去寻求待求变量的连续函数表达式,而是像实验测量一样只把注意力集中在计算域内有限个离散的结点上,计算那里的变量值。这种把连续的待求变量处理成离散结点值的数学方法叫作离散化方法。待求变量离散化以后再引入各结点变量之间相互联系的某种假设,代入控制微分方程就能得到一组由结点变量表达的代数方程式,称之为离散方程。离散方程应与原微分方程有同样的物理内容和基本性质。求解离散代数方程就能得到结点上的变量值。

虽然推导离散方程时引入结点变量相互联系的规律是人为假设的,但是当结点数目很大时,结点变量已接近连续变化,这种联系规律的假设已无关紧要,在结点上离散方程的解将足够地接近于微分方程精确解的值。

结点变量的联系规律一般用联系几个、多个甚至全部结点变量的代数多项式来表示。联系结点的数目过多会使代数式阶数过高而不便于求解。因此更多的是采用变量分段分布的方法,将整个计算区域划分成若干分段,每个分段中的结点用一个代数式联系起来。在这种情况下,离散的概念就不光指连续的函数变量被离散成有限个结点值,还意味着把完整的计算区域离散成有限个子区域。

对于同一个微分方程利用不同的离散方法、离散结点函数联系关系式和不同的推导方法将得到不同的离散方程,但是当结点数足够多时,任何正确的离散方程给出的解都应该趋向且收敛于微分方程的严格解。在流体力学数值计算中常用的离散方程推导方法有有限元法和有限差分法。有限元法基于变分原理或加权余量原理,它善于处理复杂几何域内的势流问题,也能处理粘性可压缩流动与不可压缩流动问题。有限差分法原理简单,它直接用差商代替微商将微分方程转变为代数方程,它的离散结点一般只能沿坐标平行线分布,因此处理复杂边界的能力不及有限元法,但在求解高雷诺数流动问题方面比有限元法成熟。尤

其在涉及流动、传热、燃烧等多方程的热流体流动问题方面已经积累了许多成功的经验。其它还有许多流体流动问题的数值解法，它们各有特点和适用范围。例如边界元法，求解叶轮机械内部流动的两类流面迭代法、流线曲率法、时间相关法，以及处理超音速流动问题的特征线计算法等等。本书仅涉及有限元和有限差分两种方法。

习 题

1-1 以通用控制微分方程式的形式改写纳维埃-斯托克斯方程式 (1-14)，写出 u 方程的源项表达式，并将其中由粘性应力项归入源项的部分记作 $F_{\mu x}$ ，写出 $F_{\mu x}$ 的表达式。

1-2 证明当 ρ 和 μ 为常数时，习题 1-1 中的 $F_{\mu x}=0$ 。

1-3 证明当 μ 是常数而 ρ 不是常数且定义压力参数 $\bar{P}=p-\mu\text{div } \vec{v}$ 时，习题 1-1 中 $F_{\mu x}$ 能被吸收进压力参数的梯度之中，写作 $-\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \text{div } \vec{v} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x}$ 。使方程除了以 $\bar{P}$ 代替 p 以外，形式上与 ρ 为常数时完全一样。

1-4 圆柱坐标 (r, θ, z) 中运动方程表示为：

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right] &= F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \\ \rho \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right] &= F_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right] \\ \rho \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] &= F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} \right] \end{aligned}$$

试写出它们以通用控制微分方程形式表示时的源项表达式。