天元研究生数学丛书

近代分析引论

苏维宜　编著

北京大学出版社

前　言

我国实行学位制度以来，研究生教育有了很大的发展。人们逐渐认识到：拓宽研究生的知识面是时代发展的需要。许多数学硕士点和博士点都要求在研究生阶段设立专业基础课程，使得不同专业、不同专题方向的研究生能对本专题以外的重要的、带基础性的近代发展也有所了解。

开设这类研究生专业基础课程的教材，当然是要介绍该方面的基本概念和基本方法。但在涉及近代的发展上不应过于专门，要照顾到各个不同分支的需要；也不能过于拘泥在技术细节上的推导，而是要在总体上、思想方法上给读者对该学科的主要内容有一个清晰的了解。因此在编写这类教材时，在深与广、精与粗、全貌与专题等方面要掌握适度才能使大多数来自不同专题方向的学生受益。

国内过去出版的大量为本科生编写的教材，因其没有反映近代的内容，不能满足需要；就是许多为研究生编写的教材，因其过分专门而不适用。可喜的是最近几年，出现了一批经过一段教学实践检验后符合上述要求的研究生专业基础课讲义。出版《天元研究生数学丛书》就是为了推动这类教材的编写，促进我国数学研究生培养水平的提高，希望得到数学界同仁们共同的关心和支持。

张恭庆

1995年3月于北京

目　录

第一章　Banach 空间的微分学

本章 §1 是关于赋范线性空间中级数的基本知识，作为今后几章的准备. §2 和 §3 从线性映射出发给出 Banach 空间 X 到 Y 的连续映射，Fréchet 可导与 Gateaux 可导的定义，证明复合映射与逆映射的求导法则，并给出应用. §4 阐明中值定理在 Banach 空间中将取不等式形式. §5 中偏导数与高阶导数是借助于多重线性映射来定义的；分析学中的 Taylor 公式在 Banach 空间也有推广. §6 在引入积分概念后，证明几个基本积分公式. §7 证明在许多数学分支中都很有用的隐函数、反函数及秩定理. 最后，§8 证明 Schauder 不动点原理.

§1　赋范线性空间中的级数

本节中都假设 X 为数域 $\mathbf{K}$（实数域 $\boldsymbol{R}$ 或复数域 $\boldsymbol{C}$）上的赋范线性空间，元 $x \in X$ 的范数记为 $\|x\|$.

定义 1.1　设 $x_n \in X$. 若对任意的 $n \geqslant 0$，有

$$x_0 + \cdots + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = s_n,$$

则称一对序列 $(x_n)_{n\geqslant 0}$，$(s_n)_{n\geqslant 0}$ 为一个级数，记为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$. 称 x_n 为此级数的第 n 项，而称 s_n 为其第 n 部分和.

我们称级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ 收敛到 s，若

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

精确地说，对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $n_0 \geqslant 0$，使当 $n \geqslant n_0$ 时，有 $\| s_n - s \|$

$<\varepsilon$;记为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = s$，并称 s 为级数的和.类似于初等微积分中的一些定理，我们有

定理 1.1(Cauchy 准则) 若 X 中的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ 收敛，则对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0 \geqslant 0$，使当 $n \geqslant n_0, p \geqslant 0$ 时，有

$$\| s_{n+p} - s_n \| = \| x_{n+1} + \cdots + x_{n+p} \| \leqslant \varepsilon.$$

反之，若上述条件满足，且 X 为 Banach 空间，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ 收敛于 $s \in X$.

定理 1.2 若 X 中的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ 分别收敛于 s 与 s'，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x_n+y_n)$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a x_n)$ 分别收敛于 $s+s'$ 与 as，这里 $a \in \mathbf{K}$.

定理 1.3 设 $0=k_0<k_1<k_2<\cdots$ 为整数序列.若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ 收敛于 s，且 $y_n = \sum\limits_{j=k_n}^{k_{n+1}-1} x_j$，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ 也收敛于 s.

定义 1.2 若 X 中的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ 的各项的范数所生成的数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \| x_n \|$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ 绝对收敛.

显然，如下定理成立.

定理 1.4 若 X 中的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ 也收敛，并且当 X 为 Banach 空间时，还有下式成立：

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} x_n \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \| x_n \|.$$

记 $\boldsymbol{P}=\{0,1,2,3,\cdots\}$ 为非负整数集，$\boldsymbol{N}=\{1,2,\cdots\}$ 为自然数集.我们有

定理 1.5(绝对收敛级数的可交换性) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ 为 X 中的绝对收敛级数. 令

$$\sigma : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{P}$$

为一对一的满映射,若记 $y_n = x_{\sigma(n)}$,则 $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ 也绝对收敛,并且

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

定理 1.6(绝对收敛级数的可结合性) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ 为 X 中的绝对收敛级数. 若

$$\boldsymbol{P} = \bigcup_{n \in I} B_n,$$

I 为有限或无限集,B_n 互斥. 令

$$z_n = \sum_{k \in B_j} x_k,$$

则 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ 也绝对收敛,且

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

利用级数理论还可以证明下面有用的定理.

定理 1.7 设 X 为具有单位元 e 的 Banach 代数. 若 $z \in X$ 且 $\| z \| < 1$,则 $e - z$ 为可逆元,其逆元为

$$(e - z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

其范数满足

$$\| (e - z)^{-1} \| \leqslant \frac{1}{1 - \| z \|}.$$

(Banach 代数的定义可参看附录定义 3.7.)

证 令 $y_n = e + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$. 因为 $\| z \| < 1$,故对于任意两个整数 $n, p \in \boldsymbol{N}$ 时有

$$\| y_{n+p} - y_n \| = \left\| \sum_{k=n}^{n+p-1} z^k \right\| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \| z^k \|$$

$$\leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \| z \|^k = \| z \|^n \sum_{k=0}^{p-1} \| z \|^k$$

$$\leqslant \| z \|^n \sum_{k=0}^{\infty} \| z \|^k = \frac{\| z \|^n}{1 - \| z \|}.$$

从而$\{y_n\}$是 X 中的 Cauchy 序列. 据 X 的完备性，存在 $y \in X$，使 $y = \lim\limits_{n \to \infty} y_n$. 由于

$$| \| y \| - \| y_n \| | \leqslant \| y - y_n \|,$$

得 $\| y \| = \lim\limits_{n \to \infty} \| y_n \|$.

另一方面，对所有 $n \in \boldsymbol{N}$，下式成立：

$$\| y_n \| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \| z \|^k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \| z \|^k = \frac{1}{1 - \| z \|}.$$

这样便得到

$$\| y \| \leqslant \frac{1}{1 - \| z \|}.$$

现证 y 是 $e-z$ 的逆元. 因为

$$zy_n = y_n z = z + z^2 + \cdots + z^n = y_{n+1} - e,$$

取极限便得 $zy = yz = y - e$，从而 $y - zy = y - yz = e$，亦即

$$(e - z)y = y(e - z) = e.$$

定理得证.

把这个定理应用于 Banach 空间 X 到 X 的连续线性映射空间 $\mathscr{L}(X;X)$（其定义见附录 § 3.2），可得下面的定理 1.8. 注意，此时，$\mathscr{L}(X;X)$在加法运算 $u+v$，数乘运算 au 与复合运算 $u \circ v$ 之下成为一个具有单位元 $e=I$ 的 Banach 代数，且 $\| I \| = 1$.

定理 1.8 在 Banach 代数 $\mathscr{L}(X;X)$中，若 $\omega \in \mathscr{L}(X;X)$，且 $\| \omega \| < 1$，则线性映射 $I + \omega$ 是 $\mathscr{L}(X;X)$中的同胚，其逆为

$$(I + \omega)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \omega^n,$$

并且

$$\|(I+\omega)^{-1}-I+\omega\| \leqslant \frac{\|\omega\|^2}{(1-\|\omega\|)}.$$

§2 可导映射,求导法则

本节与以后各节,若无特殊说明,都假设 X,Y,Z 为同一数域上的 Banach 空间.

导数在整个自然科学领域中的重要地位是众所周知的. 随着科学和技术的发展,人们走出了欧氏空间. 面临着的重要问题之一,是如何定义具有一般拓扑结构的空间之间的映射的导数. 这里,我们只介绍 Banach 空间 X 中的开集 A 到 Y 的映射 $f: A\to Y$ 的导数,希望从中能给读者以启迪,去研究更一般空间上的类似问题.

回忆经典导数的定义

$$\lim_{x-x_0\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0),\quad x\in(a,b)\subset \boldsymbol{R}.$$

这里极限值表示函数 $f:(a,b)\to\boldsymbol{R}$ 在 $x_0\in(a,b)$的变化率. 若将上式改写为

$$\lim_{x-x_0\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)}{x-x_0}=0,$$

而把 $y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$理解为通过 x_0 的曲线 $y=f(x)$ 的切线,就可以启示我们去定义 Banach 空间中映射的相切概念,并且给出关于映射的可导概念.

定义 2.1 设 $A\subset X$ 为 X 中的开子集,f,g 为 A 到 Y 的两个映射. 若

$$\lim_{x\to x_0,x\neq x_0}\frac{\|f(x)-g(x)\|_Y}{\|x-x_0\|_X}=0,$$

则称 f 与 g 在 $x_0\in A$ 相切.

显然,我们有如下简单性质.

定理 2.1 (1) 若 f,g 在 x_0 相切,并且 f,g 在 x_0 连续,则

$$f(x_0)=g(x_0).$$

(2) 在 X 与 Y 的等价范数之下，相切性不变.

(3) 相切有传递性，亦即在 x_0 点，若 f 与 g 相切，又 g 与 h 相切，则 f 与 h 在该点相切.

(4) 与映射 f 在 x_0 相切的所有映射中，最多只有一个形如

$$x\to f(x_0)+u(x-x_0)$$

的映射，这里 u 为 X 到 Y 的线性映射.

定义 2.2 设 $A\subset X$ 为 X 中的开子集，$f: A\to Y$ 为连续映射. 若对 $x_0\in A$，存在 X 到 Y 的线性映射 $u: X\to Y$，使得映射 $g: x\to f(x_0)+u(x-x_0)$ 与 f 在 x_0 相切，则称 f 在 $x=x_0$ 点 Fréchet 可导(F-可导)，而线性映射 u 称为 f 在 x_0 点的 F-导数，记为 $f'(x_0)$ 或 $\mathrm{D}f(x_0)$. 若 f 在 A 的每一点都 F-可导，就称 f 在 A 上 F-可导. 如不发生混淆，我们简称 F-导数为导数.

以下总假设 A 为 X 的开子集.

定理 2.2 设 $f: A\to Y$ 为 X 的开子集 A 到 Y 的连续映射. 若 f 在 $x_0\in A$ 可导，则其导数 $f'(x_0)\in\mathscr{L}(X;Y)$，且它是唯一的. 若记 $f'(x_0)=u$，则

$$\|u(t)\|\leqslant\|u\|\,\|t\|,\quad t\in X,$$

且 $\|u\|=\sup\limits_{\|t\|=1}\|u(t)\|$.

证 唯一性可由定理 2.1(4)得到. 而据 f 的连续性与可导性，以及附录中的定理 3.2，可得 $f'(x_0)\in\mathscr{L}(X;Y)$，并得所需的估计式.

例 2.1 常映射 $f: X\to Y$ 在 X 的任一点可导，其导数为 $f'(x)=\theta\in\mathscr{L}(X;Y)$，$\theta$ 为 $\mathscr{L}(X;Y)$ 的零元.

例 2.2 X 到 Y 的连续线性映射 $u: X\to Y$ 在 X 的任一点可导，且 $\mathrm{D}u=u$.

例 2.3 设 X,Y,Z 为 Banach 空间，$f: X\times Y\to Z$ 为连续线性映射. 则 f 在 $X\times Y$ 的任一点 (x_0,y_0) 可导，且

$$\mathrm{D}f(x_0,y_0)(s,t)=f(x_0,t)+f(s,y_0).\tag{2.1}$$

我们证明公式(2.1). 令

$$u(s,t)=f(x_0,t)+f(s,y_0),$$

其中 $s=x-x_0, t=y-y_0$. 由于 f 为二重线性映射,故

$$\begin{aligned}J &\equiv \frac{\|f(x_0+s,y_0+t)-f(x_0,y_0)-u(s,t)\|_Z}{\|(s,t)\|_{X\times Y}} \\ &= \frac{\|f(x_0,t)+f(s,y_0)+f(s,t)-u(s,t)\|_Z}{\|(s,t)\|_{X\times Y}} \\ &\leqslant \frac{\|f(s,t)\|_Z}{\|(s,t)\|_{X\times Y}} \leqslant \frac{c\|s\|_X\|t\|_Y}{\|(s,t)\|_{X\times Y}} \\ &\leqslant c'\|(s,t)\|_{X\times Y}.\end{aligned}$$

上式的最后一步是由积空间的范数定义得到. 当 $(s,y)\to(x_0,y_0)$ 时, $J\to 0$, 从而(2.1)式成立.

例 2.4 若 f 为 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^m$ 上的可导映射. 设 f 在选定的一个基底下的分量为 $(f_1,\cdots,f_m)$, 则 f 可导的充要条件是 f_j 可导, $j=1,\cdots,m$, 且其导数为

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right)_{j=1,\cdots,m;k=1,\cdots,n}.$$

求导运算是线性运算,也就是

$$\mathrm{D}(f+g)=\mathrm{D}f+\mathrm{D}g,\quad \mathrm{D}(af)=a\mathrm{D}f.$$

我们介绍复合映射及逆映射的求导法则.

以后使用如下方便的记法:若 f 在 x_0 可导,则任给 $\varepsilon>0$, 存在 $r>0$, 使得

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)(\Delta x)+o(\Delta x)$$

对于 $\|\Delta x\|\leqslant r$ 成立;或

$$f(x_0+s)-f(x_0)=f'(x_0)(s)+o(s)$$

对于 $\|s\|\leqslant r$ 成立,这里 $o(s)\in Y$, 且 $\|o(s)\|\leqslant\varepsilon\|s\|$.

定理 2.3 设 X,Y,Z 为 Banach 空间, $x_0\in A\subset X$, $f: A\to Y$ 为连续映射, $y_0=f(x_0)$. 又设 $B\subset Y$ 为含 $f(x_0)$ 的开集, $g: B\to Z$ 为连续映射. 若 f 在 x_0 可导, g 在 y_0 可导,则 $h=g\circ f$ 在 x_0 可

导，并且下式成立：

$$h'(x_0) = g'(y_0) \circ f'(x_0). \tag{2.2}$$

证 任给 $\varepsilon>0$，存在 $r>0$，使得当 $\|s\|<r$，$\|t\|\leqslant r$ 时有

$$f(x_0+s) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot s + o_1(s),$$
$$\|o_1(s)\| \leqslant \varepsilon\|s\|;$$
$$g(y_0+t) = g(y_0) + g'(y_0)\cdot t + o_2(t),$$
$$\|o_2(t)\| \leqslant \varepsilon\|t\|.$$

由线性映射 $f'(x_0)$ 与 $g'(y_0)$ 的连续性，存在 $a>0$，$b>0$，使对任意 $s\in X$，$t\in Y$，有

$$\|f'(x_0)\cdot s\| \leqslant a\|s\|, \quad \|g'(y_0)\cdot t\| \leqslant b\|t\|.$$

从而当 $\|s\|\leqslant r$ 时，

$$\|f'(x_0)\cdot s + o_0(s)\| \leqslant (a+1)\|s\|.$$

而当 $\|s\| \leqslant \dfrac{r}{a+1}$ 时，

$$\|o_2(f'(x_0)\cdot s + o_1(s))\| \leqslant (a+1)\varepsilon\|s\|,$$
$$\|g'(y_0)\cdot o_1(s)\| \leqslant b\varepsilon\|s\|.$$

上面两式复合的结果给出：

$$h(x_0+s) = g(y_0) + g'(y_0)(f'(x_0)\cdot s) + o_3(s),$$

且 $\|o_3(s)\|\leqslant(a+b+1)\varepsilon\|s\|$. 从而

$$h'(x_0) = g'(y_0)\circ f'(x_0).$$

定理得证.

用类似的方法，不难证明逆射的求导法则.

定理 2.4 设 $A\subset X$，$B\subset Y$ 为开子集，$f: A\to B$ 为同胚映射. 若 f 在 $x_0\in A$ 可导，且 $f'(x_0)$ 为 X 到 Y 的线性同胚，则 f^{-1} 在 $y_0=f(x_0)$ 可导，且

$$(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}. \tag{2.3}$$

上述求导法则，虽与经典情形的形式类似，但却有新的理解. 例如复合函数求导法则(2.2)式，理解为两个线性映射 $g'(y_0)$ 与 $f'(x_0)$ 的复合. 逆映射求导法则(2.3)式理解为线性映射 $f'(x_0)$ 的

逆映射，等等.

当我们取 $X=Y=\boldsymbol{R}$ 时，现在的结果都有相应的解释. 例如，容易看出，定理 2.4 中的条件"$f'(x_0)$为 X 到 Y 的线性同胚"相当于经典情形的"$f'(x_0)\neq 0$". 此外，请读者考虑为什么在经典情形下 $f'(x_0)$只是一个实数，而现在的情形下它却是一个线性映射呢？思考后再参看附录 § 3.2 中关于多重线性映射的性质，便能找到答案.

定理 2.5 设 f 是 X 到 Y 的连续映射，且 f 在过点 $x_0\in X$ 的线段 x_0+th 上 F-可导，$h\in X$，$t\in[-1,1]$. 则极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x_0+th)\bigg|_{t=0}$$

存在，并且等于 $f'(x_0)h$.

证 记 $\varphi(t)=f(x_0+th)$. 显然，$\dfrac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}$ 是 Y 中的元. 我们有

$$\varphi'(t)|_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}.$$

由复合函数的求导法则得

$$\varphi'(t)|_{t=0}=f'(x_0+th)|_{t=0}(x_0+th)'|_{t=0}=f'(x_0)h.$$

从上面关于 F-导数性质的讨论可以看到，F-导数是经典导数概念的推广. 然而，很多情形下要遇到其他类型的导数. 现在我们再介绍一下常用的 Gateaux 导数.

定义 2.3 称 f 在 $x_0\in A$ 为 Gateaux 可导(G-可导)，若对每个 $h\in X$，存在 Y 中的元 $\mathrm{d}f(x_0,h)\in Y$，它是 h 的线性函数，使得

$$f(x_0+th)-f(x_0)-t\cdot\mathrm{d}f(x_0,h)=o(t),$$

$$t\to 0^+,\quad x_0+th\in A.$$

$\mathrm{d}f(x_0,h)$称为 f 在 x_0 沿 h 的 G-导数，记为 $\mathrm{d}f(x_0)h\equiv\mathrm{d}f(x_0,h)$.

Gateaux 导数有如下基本性质.

定理 2.6 (1) 若 G-导数存在，则它是唯一的.

(2) 若 $y^*\in Y^*$，这里 Y^* 是 Y 的对偶空间. 令

$$\varphi(t) = \langle y^*, f(x_0 + th)\rangle,$$

则当 f 的 G-导数存在时,$\varphi(t)$在 $t=0$ 处右可导,且

$$\varphi_t'(0) = \langle y^*, \mathrm{d}f(x_0, h)\rangle.$$

(3) 若 f 为 G-可导,则

$$\| f(x+h) - f(x) \| \leqslant \sup_{0<t<1} \| \mathrm{d}f(x+th, h) \|.$$

证 我们仅证明性质(3). 由 Hahn-Banach 定理(附录 1.2),存在 $y^* \in Y^*$, $\| y^* \| = 1$,使得

$$\langle y^*, f(x_0+h) - f(x_0)\rangle = \| f(x_0+h) - f(x_0) \|.$$

令 $\varphi(t) = \langle y^*, f(x_0+th)\rangle$,$\varphi(t)$在 $t \in [0,1)$可导,且

$$\varphi_t'(t) = \langle y^*, \mathrm{d}f(x_0+th, h)\rangle.$$

于是由经典的中值定理得

$$\begin{aligned}
\| f(x_0+h) - f(x_0) \| &= \left| \langle y^*, f(x_0+h) - f(x_0)\rangle \right| \\
&= |\varphi(1) - \varphi(0)| = |\varphi_t'(\xi)| \\
&= |\langle y^*, \mathrm{d}f(x_0+\xi h, h)\rangle| \\
&\leqslant \sup_{0<\xi<1} |\langle y^*, \mathrm{d}f(x_0+\xi h, h)\rangle| \\
&\leqslant \sup_{0<\xi<1} \| \mathrm{d}f(x_0+\xi h, h) \|.
\end{aligned}$$

这就是要证明的.

关于 F-导数与 G-导数的关系,我们有:

定理 2.7 映射 $f: X \to Y$ 在 x_0 点 F-可导,蕴涵 f 在 x_0 点 G-可导,并且二者相等.

证明可由定理 2.5 得到.

定理 2.8 若映射 $f: X \to Y$ 在 x_0 点的邻域 U 中G-可导,$\mathrm{d}f(x) \in \mathscr{L}(X;Y)$,则 f 在点 x_0 处是 F-可导的,且

$$f'(x_0) = \mathrm{d}f(x_0).$$

证 设 $g(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - \mathrm{d}f(x_0)h$. 取一个元 $y^* \in Y^*$,由中值定理得

$$\langle y^*, g(h)\rangle = \langle y^*, [\mathrm{d}f(x_0+\theta h) - \mathrm{d}f(x_0)]h\rangle,$$

其中 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. 若我们取 $y_0^* \in Y^*$,且 $\| Y_0^* \| = 1$,便得

$$
\begin{aligned}
\| g(h) \| &= \langle y_0^*, g(h) \rangle \\
&= \langle y_0^*, [\mathrm{d}f(x_0+\theta h) - \mathrm{d}f(x_0)]h \rangle \\
&\leqslant \| [\mathrm{d}f(x_0+\theta h) - \mathrm{d}f(x_0)]h \| \\
&\leqslant \| \mathrm{d}f(x_0+\theta h) - \mathrm{d}f(x_0) \| \, \| h \| .
\end{aligned}
$$

由此即得定理的结论.

定理 2.9 $f(x)$在 $x\in A$ 为 F-可导$\Longleftrightarrow f(x)$在 $x\in A$ 为 G-可导,且 G-导数 $\mathrm{d}f(x,h)$是有界线性算子,在$\{h\in X: \|h\|=1\}$上一致成立:

$$
\lim_{t\to 0+} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} = \mathrm{d}f(x,h).
$$

此定理请读者自行证明.

由此定理可以看出在经典情形下,G-导数就是熟知的方向导数. F-导数与 G-导数还有其他一些性质,我们留作习题.

例 2.5 Урысон 算子

$$
Af(x) = \int_0^1 k(x,y,f(y))\mathrm{d}y,
$$

$$
x,y \in [0,1],\ f \in C([0,1]),
$$

$C([0,1])$为$[0,1]$上的复值连续函数空间. 设函数 $k(x,y,z)$关于第三个变量 z 的偏导数

$$
\frac{\partial k}{\partial z}: [0,1]\times[0,1]\times \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}
$$

一致连续,计算 A 在 $g\in C([0,1])$处的 F-导数.

由于

$$
\begin{aligned}
&\left| k(x,y,g(y)+h(y)) - k(x,y,g(y)) - \frac{\partial k}{\partial z}(x,y,g(y))h(y) \right| \\
&\quad = \left| \int_0^1 \left\{ \frac{\partial k}{\partial z}(x,y,g(y)+th(y)) - \frac{\partial k}{\partial z}(x,y,g(y)) \right\} h(y)\mathrm{d}t \right| \\
&\quad \leqslant \|h\| \int_0^1 \left| \frac{\partial k}{\partial z}(x,y,g(y)+th(y)) - \frac{\partial k}{\partial z}(x,y,g(y)) \right| \mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

又由于 $\frac{\partial k}{\partial z}$ 的一致连续性,故

$$\left|A(g+h)(x)-Ag(x)-\int_0^1 \frac{\partial k}{\partial z}(x,y,g(y))h(y)\mathrm{d}y\right|$$
$$\leqslant \sup_{x\in[0,1]}\left|\int_0^1\left\{k(x,y,g(y)+h(y))-k(x,y,g(y))\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\partial k}{\partial z}(x,y,g(y))h(y)\right\}\mathrm{d}y\right|$$
$$=o(\|h\|).$$

从而

$$\mathrm{D}A(g)h(x)=\int_0^1 \frac{\partial k}{\partial z}(x,y,g(y))h(y)\mathrm{d}y,\quad h\in C([0,1]).$$

例 2.6 微分算子 $A: C^1([0,1])\to C([0,1])$，其中

$$Af(x)=f'(x)+[f(x)]^2.$$

试求 $Af(x)$的导数.

计算后得

$$\mathrm{D}A(g)(h)(x)=h'(x)+2g(x)h(x).$$

例 2.7 设 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ 为有界开子集，$u:\Omega\times\boldsymbol{R}^k\to\boldsymbol{R}$ 为 $n+k$ 个变元的 Borel 可测函数. 若对每个 $t\in\Omega$，函数 $x\to u(t,x)\in C^1$，且存在 $a\in L^2(\Omega)$与常数 $b>0$，使

$$|u'_y(t,y)|\leqslant|a(t)|+b|y|,\quad \forall y\in\boldsymbol{R}^k.$$

又若 $\int_\Omega|u(t,0)|\mathrm{d}t<+\infty$，则函数

$$U(x)=\int_\Omega u(t,x(t))\mathrm{d}t: L^2(\Omega\times\boldsymbol{R}^k)\to\boldsymbol{R}$$

是 F-可导的.

事实上，对每个固定的 $t\in\Omega$，对于 $v\in L^2(\Omega)$，我们有

$$g(t)\equiv\frac{\partial}{\partial s}(u(t,x(t)+sv(t)))=\mu'_y(t,x(t)+sv(t))v(t).$$

故

$$|g(t)|\equiv\left|\frac{\partial}{\partial s}u(t,x(t)+sv(t))\right|$$
$$\leqslant|v(t)|\,|a(t)|+b|x(t)+sv(t)|$$

$$\leqslant |v(t)||a(t)| + b(|x(t)| + |v(t)|), \quad s \in [0,1].$$

$g(t)$为 t 的可积函数. 于是

$$|u(t,v(t))| = \left| u(t,0) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} u(t,sv(t))\mathrm{d}s \right|$$
$$\leqslant |u(t,0)| + |g(t)|.$$

从而有

$$|U(v)| \leqslant \int_\Omega |u(t,0)|\mathrm{d}t + \int_\Omega |g(t)|\mathrm{d}t < +\infty.$$

这表明 U 有意义. 另一方面,

$$J \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} U(x+sv)\bigg|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_\Omega u(t,x(t)+sv(t))\mathrm{d}t\bigg|_{s=0}.$$

由 Lebesgue 控制收敛定理,上式中积分与求导可交换次序,因而

$$J = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial s} u(t,x(t)+sv(t))\bigg|_{s=0}\mathrm{d}t$$
$$= \int_\Omega u'_y(t,x(t)+sv(t))v(t)\bigg|_{s=0}\mathrm{d}t,$$

其中

$$\int_\Omega u'_y(t,x(t))v(t)\mathrm{d}t = \langle u'_y \circ x, v\rangle,$$

$\langle \cdot,\cdot \rangle$为 $L^2(\Omega\times\boldsymbol{R}^k)$中的内积. 由于 $u'_y \circ x \in L^2(\Omega\times\boldsymbol{R}^k)$,故

$$\mathrm{d}U(x,v) = \langle u'_y \circ x, v\rangle.$$

由此,再据 $u'_y \circ x$ 在 $L^2(\Omega\times\boldsymbol{R}^k)$中的连续性,便不难推出 U 是 F-可导的.

还有很多应用的例,我们不一一列举了. 读者可见参考书目[4],[6],[9]等.

在现代数学、物理学以及许多应用科学中,我们还会遇到严格可导、Gibbs 可导、p 型可导等概念,这诸多导数概念各有各自的背景、意义和应用. 虽然这些内容已经超出本书的范围,但强调一下引进这些导数的思路是有益的. 这里仅举一例.

设 X 为实数直线 $X=\boldsymbol{R}$,对于 $x=(x_m,x_{m+1},\cdots)\in\boldsymbol{R}$,$x_j\in$