

上海研究生教育丛书

# 混沌研究中的解析方法

刘曾荣 编著

上海大学出版社

上海研究生教育丛书

本教材得到上海市研究生教育专项经费资助

# 混沌研究中的解析方法

刘曾荣 编著

上海大学出版社

· 上 海 ·

## 图书在版编目(CIP)数据

混沌研究中的解析方法/刘曾荣编著. —上海:上海  
大学出版社, 2002. 1  
ISBN 7-81058-337-9

I. 混... II. 刘... III. 混沌学-解析法  
IV. 0415. 5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 098187 号

## 混沌研究中的解析方法

---

编 著 刘曾荣

责任编辑 王悦生

封面设计 王春杰

责任出版 张继新

出版发行 上海大学出版社

上海市延长路 149 号 200072

86-21-56331806(发行部) 86-21-56332131(编辑部)

经 销 各地新华书店

印 刷 上海广服电脑印刷厂印刷

开 本 850×1168 1/32

印 张 10.25

字 数 264 千字

版 次 2002 年 1 月第一版 2002 年 1 月第一次印刷

印 数 1-1350

ISBN 7-81058-337-9/O · 016

定 价 22.00 元

---

本版图书如有印装错误,可向出版社随时调换。

# 前 言

自然科学的发展,正在改变着传统的学科划分.数学、物理、力学、化学、生物等这些基础学科,与新技术相结合,采用了一些新的研究方法,推出了横跨多种学科的新兴领域.这些新领域的最杰出的代表之一为非线性科学.非线性科学在最近 20 年来能得到迅速发展的一个极为重要原因是在描述各类自然现象的动力系统中发现了混沌运动.现在大家都认识到混沌运动是普遍存在的.通常可以通过 Lyapunov 特征指数、Fractal 维数和拓扑熵的研究来判定一个系统是否存在混沌运动.除了这些数值研究上常用的判据外,从理论角度上来看也存在着两种判别混沌运动不变集存在性的解析办法,本书就是围绕着这两种判别方法开展的.

许多实际问题,可以归结为讨论带有弱周期扰动项的具有同宿轨道或异宿圈的二阶常微分方程.对于这类系统,利用一定技巧,可以化为等价的二维 Poincaré 返回映射加以讨论.由动力系统理论,如果一个平面映射存在 Smale 马蹄变换,这个映射就具有反映混沌性质的不变集.这样我们可以通过证明等价的 Poincaré 返回映射存在 Smale 马蹄变换或判定横截同宿点存在的 Melnikov 方法来判断原有系统是否存在混沌不变集.讨论这类系统时,我们把这两种方法称为低维系统中 Smale 马蹄存在性判定和 Melnikov 方法,它们在 20 世纪 80 年代得到了充分的发展.自 20 世纪 90 年代以来,上述两种方法在高维动力系统得到了迅速发展.目前可以说已经从理论上建立了讨论任意有限维动力系统在一定条件下存在 Smale 马蹄变换的框架,这部分工作的数学技巧比较强,对于缺乏较强数学基础的读者阅读可能有一定难度.上述“一定条件”往往都包含着原

系统存在同宿轨道和异宿圈,因而对应的 Melnikov 方法也发展到任意有限维系统,用这个方法可以判定系统存在同宿轨道或异宿圈,从而保证系统具有 Smale 马蹄意义下的不变集.

值得指出的是这些结果在近两年内已经推广到特定类的无穷维系统.当然这方面的工作还仅仅是一个开始,许多问题还有待进一步研究和解决.为了使更多读者通过本书内容知道如何判定实际系统是否存在混沌不变集,我们把更多的注意力放在 Melnikov 方法这个实用的判据分析上.对于 Smale 马蹄存在性证明,除了一些必要的基本证明外,有许多我们就只描述证明框架和思路.至于一些必需的准备知识就只能作一简单叙述.对于后两部分有兴趣的读者可以进一步参阅有关文献.

考虑到对于低维动力系统处理我们已经出版过一本小册子《混沌的微扰判据》(上海科技教育出版社,1994年),所以对于低维系统处理只作一些简单介绍,内容分布在第一、三两章.第二章主要介绍高维系统的 Smale 马蹄存在性;第四章讨论了高维系统的 Melnikov 方法;最后一章介绍了无穷维动力系统中 Melnikov 方法.由于本书讨论内容是当前的前沿问题之一,因而大量的工作散见于各类期刊之中,我们这里仅仅选择我们认为最有意义且必不可少的部分作为本书的内容.

本工作得到了上海市研究生教育课程改革与教材建设基金的资助,作者在此表示衷心的感谢.作者多年来的工作得到了国家自然科学基金会和中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放实验室的资助,使工作得以开展,在此也向上述资助机构表示作者的谢意.多年来,作者与许多合作者进行过愉快而有意义的合作研究,在此一并表示作者对他们的感激之情.

限于作者水平,书中一定有不少不妥和错误之处,还望读者给予批评和指正.

作 者

2000年7月28日

## 内 容 提 要

本书介绍了混沌研究中的两种主要解析方法——Smale 马蹄存在性的判定和 Melnikov 方法. 这些方法既可应用于低维动力系统, 也可应用于高维动力系统. 对于近年来这些方法在无穷维动力系统中的应用也作了介绍.

由于注意到理论性和实践性结合的原则, 本书省略了一些数学证明, 故可以作为应用数学和理工科相关专业的研究生教材.

# 目 录

|      |                                    |       |
|------|------------------------------------|-------|
| 第一章  | 预备知识                               | (1)   |
| § 1  | 符号动力系统简介                           | (1)   |
| § 2  | Smale 马蹄变换                         | (5)   |
| § 3  | 横截同宿点理论                            | (8)   |
| 第二章  | Smale 马蹄存在定理                       | (13)  |
| § 4  | $\mathbb{R}^2$ 上映射中的 Smale 马蹄存在定理  | (13)  |
| § 5  | 高维空间中映射的 Smale 马蹄存在定理              | (20)  |
| § 6  | 常微分方程中的分析技巧                        | (31)  |
| § 7  | 具有鞍焦型奇点的三阶常微分方程分析                  | (44)  |
| 第三章  | 低维 Hamilton 系统的 Melnikov 方法        | (56)  |
| § 8  | 平面 Hamilton 系统                     | (56)  |
| § 9  | 同宿轨道的 Melnikov 函数                  | (59)  |
| § 10 | 有关 Melnikov 函数的一些问题                | (67)  |
| § 11 | 次谐轨道的 Melnikov 函数                  | (75)  |
| § 12 | 高阶 Melnikov 函数                     | (83)  |
| § 13 | Josephson 结的 $I$ - $V$ 特性曲线        | (95)  |
| 第四章  | 高维 Hamilton 系统的 Melnikov 方法        | (111) |
| § 14 | 不变流形及法向双曲性                         | (111) |
| § 15 | 高维 Hamilton 系统的 Melnikov 方法(非共振情况) | (124) |

|             |                                          |              |
|-------------|------------------------------------------|--------------|
| § 16        | 高维 Hamilton 系统的 Melnikov 方法(共振情况)        | (160)        |
| § 17        | 两个例子                                     | (179)        |
| <b>第五章</b>  | <b>可积系统的 Melnikov 方法</b>                 | <b>(202)</b> |
| § 18        | 可积系统的一些基本性质                              | (202)        |
| § 19        | 非线性 Schrödinger 方程的一些结果                  | (226)        |
| § 20        | 扰动非线性 Schrödinger 方程的 Melnikov 方法        | (245)        |
| § 21        | 非线性 Schrödinger 方程在离散情况下的<br>Melnikov 方法 | (275)        |
| <b>参考文献</b> |                                          | <b>(310)</b> |

# 第一章 预 备 知 识

本章扼要介绍符号动力系统理论,指出它是研究混沌行为的数学原型.然后利用拓扑共轭的思想,可把动力系统混沌行为存在性研究化为系统中 Smale 马蹄存在性或者横截同宿点存在性证明.

## § 1 符号动力系统简介

$A$  表示一个有限元素构成的集合,  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ , 称  $A$  为字母表,  $A$  中元素  $a_j (j = 1, 2, \dots, N)$  为符号. 在  $A$  上引进如下度量:

$$d(a_i, a_j) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } i = j, \\ 1, & \text{如果 } i \neq j. \end{cases} \quad (1.1)$$

则  $A$  在度量(1.1)下构成一个紧致的、完全不连通的度量空间.

以  $\Sigma_A$  表示一切双向无限的符号序列

$$S = (\dots, s_{-2}, s_{-1}; s_0, s_1, s_2, \dots)$$

的集合, 其中  $s_j \in A (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ , 记号“;”加在零位元素的左方. 在  $\Sigma_A$  上定义度量为:  $\forall S, T \in \Sigma_A$

$$d(S, T) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{d(s_j, t_j)}{2^{|j|}}. \quad (1.2)$$

按照此距离定义,  $\Sigma_A$  中两个点接近是指这两点所代表的两个序列的中间很长一段是一样的. 事实上, 由度量(1.2)可知, 对于任意  $S, T \in \Sigma_A$ . 如果  $d(S, T) < 2^{-k}$ , 则就有  $s_i = t_i$  对  $|i| \leq k$ ; 反之,

如果  $s_i = t_i$ , 对  $|i| \leq k$ , 则  $d(S, T) \leq 2^{-k+1}$ . 在数学上可以证明: 在度量(1.2)下,  $\Sigma_A$  是一个紧致、完全的, 完全不连通的距离空间. 根据拓扑学上“任何紧致、完全的, 完全不连通的距离空间都同胚于 Cantor 集”的结果, 可以推出  $\Sigma_A$  同胚于 Cantor 集.

在  $\Sigma_A$  上定义一个映射  $\sigma: \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ , 对于任意一个  $S \in \Sigma_A$  有

$$\begin{aligned} \sigma(S) = \sigma(\cdots, s_{-2}, s_{-1}; s_0, s_1, s_2, \cdots) = \\ (\cdots, s_{-2}, s_{-1}, s_0; s_1, s_2, \cdots), \end{aligned} \quad (1.3)$$

即有  $(\sigma(S))_j = s_{j+1}$  ( $j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ ). 可以证明  $\sigma$  是  $\Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$  的一个同胚映射, 习惯上称为移位映射. 显然,  $\sigma$  确定了  $\Sigma_A$  上的一个动力系统, 称这个离散动力系统为符号动力系统.

动力系统  $(\sigma, \Sigma_A)$  有如下一些动力学性质.

**性质 1**  $\sigma$  具有周期为任意自然数的周期点, 即存在可列无穷多个周期点.

事实上, 对于任意自然数  $n$ , 当  $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$  时, 取  $S \in \Sigma_A$  是由以  $\underbrace{(a_1, a_1, \cdots, a_1, a_N)}_{n \text{ 个}}$  作为生成节所生成的序列, 即  $S$  以此节循环所生成的循环序列, 则  $S$  就是  $\sigma$  的周期为  $n$  的周期点.

**性质 2**  $\sigma$  的周期点在  $\Sigma_A$  中是稠密的.

按照稠密性定义, 此性质就是说在(1.2)距离意义下, 在任意  $S \in \Sigma_A$  的小邻域内都可找到  $\sigma$  的周期点. 事实上, 对于任意  $\epsilon > 0$ , 总能找到充分大的正整数  $m$  和  $\bar{S} \in \Sigma_A$ , 其中  $\bar{S}$  是  $\sigma$  的周期为  $2m+1$  的周期点, 它是由  $S$  的中间  $2m+1$  个符号  $(s_{-m}, s_{-m+1}, \cdots, s_{-1}; s_0, s_1, \cdots, s_{m-1}, s_m)$  作循环得到的, 并使得  $d(S, \bar{S}) < \epsilon$ .

**性质 3**  $\sigma$  有稠轨道, 即存在  $\bar{S} \in \Sigma_A$ , 使得  $\Sigma_A$  中的集合

$$\{S | S = \sigma^k(\bar{S}), k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$$

在  $\Sigma_A$  中是稠密的.

事实上,只要依次取所有周期 1 点、所有周期 2 点、所有周期 3 点……的排列作为  $\bar{S}$  的正半序列. 对于任意  $S \in \Sigma_A$  和充分小  $\epsilon > 0$ , 由性质 2 可以找到  $\sigma$  中周期点  $\bar{S} \in \Sigma_A$ , 使得  $d(S, \bar{S}) < \epsilon/2$ ; 同时由  $\bar{S}$  的构成可知, 总可找到一个正整数  $k$ , 使得  $\sigma^k(\bar{S})$  的中间足够长的一段与  $\bar{S}$  中相应一段完全相同, 从而有  $d(\sigma^k(\bar{S}), \bar{S}) < \epsilon/2$ , 这样就得到最后结果  $d(\sigma^k(\bar{S}), S) < \epsilon$ .

**性质 4**  $\Sigma_A$  中存在不可数集合  $\Delta \subset \Sigma_A - \text{per}(\sigma)$ , 其中  $\text{per}(\sigma)$  是代表  $\sigma$  的所有周期点集合, 满足

- (1)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) \geq 1, \forall x, y \in \Delta, x \neq y$ ;
- (2)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) = 0, \forall x, y \in \Delta$ ;
- (3)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) \geq 1, \forall x \in \Delta, \forall y \in \text{per}(\sigma)$ .

众所周知, T. Y. Li 和 J. A. Yorke 在其著名论文《周期 3 意味着混沌》<sup>[2]</sup> 一文中, 就是证明: 区间  $I$  上的连续映射  $f$  若有周期 3 点, 则就存在不可数集合  $\bar{I} \subset I - \text{per}(f)$ , 满足上述三条性质. 他们就把  $f$  在  $\bar{I}$  上的这些性质称为混沌, 即上述三条性质是混沌动力学的标志, 因而这个性质事实上就是告诉我们,  $\sigma$  在  $\Sigma_A$  的一个不可数子集上具有 Li-Yorke 意义下的混沌.

**性质 5**  $\Sigma_A$  上的移位映射  $\sigma$  有拓扑熵

$$\text{ent}(\sigma) = \log N, \quad (1.4)$$

其中  $N$  为字母表  $A$  中符号的个数.

拓扑熵是一个较复杂的数学概念, 其本质类同于热力学中熵的概念, 因而可以用来度量动力系统的无序程度. 对于符号动力系统, 由于  $N > 1$ , 故  $\text{ent}(\sigma) > 0$ , 即移位映射  $\sigma$  具有一定的无序性质.

从以上讨论的结果来看,  $\Sigma_A$  上移位映射具有可列多个稠密的周期点且具有稠轨道. 它在 Li-Yorke 意义下对初值具有敏感依赖性, 并有拓扑熵大于零的性质. 所有这些性质是客观世界中混沌运动所表现的主要基本属性, 因而把动力系统  $(\sigma, \Sigma_A)$  作为描述混沌的一种原始数学模型是非常合理的.

**附注 1** 如果以  $\Sigma_A^+$  表示一切单侧无限的符号序列

$$S = (s_0, s_1, s_2, \dots)$$

的集合, 其中  $s_j \in A (j = 0, 1, 2, \dots)$ , 在  $\Sigma_A^+$  上引进移位映射  $\sigma: \Sigma_A^+ \rightarrow \Sigma_A^+$ , 即对于任意  $S \in \Sigma_A^+$ , 有

$$\sigma(S) = \sigma(s_0, s_1, s_2, \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots), \quad (1.5)$$

则也可类似说明动力系统  $(\sigma, \Sigma_A^+)$  也具有上述性质.

**附注 2** 设  $M$  是一个  $N \times N$  矩阵,  $M$  中元素为“1”或“0”, 引进符号序列空间

$$\Sigma_A^M = \{S = (\dots, s_{-2}, s_{-1}; s_0, s_1, s_2, \dots) \in \Sigma_A \mid (M)_{s_i s_{i+1}} = 1, \forall i\}.$$

显然,  $\Sigma_A^M$  是  $\Sigma_A$  的一个子空间 (这里把  $A$  中元素记为  $1, 2, \dots, N$ ),  $M$  称为转移矩阵. 在  $\Sigma_A^M$  上引入移位映射  $\sigma$ , 其定义与 (1.3) 相同, 这里称为有限型子移位 [(1.3) 中  $\sigma$  称为全移位映射]. 在  $M$  为不可约条件下, 即存在正整数  $k$  使得  $M^k$  中所有元素为 1, 也可以得到动力系统  $(\sigma, \Sigma_A^M)$  具有上述的一系列性质.

在实际问题中, 由于自然科学各学科所讨论的动力系统都很难直接与符号动力系统联系起来, 因而必须借助于拓扑共轭的数学概念来建立两个不同动力系统之间的动力学等价性, 把所讨论的动力系统的性质转化为用符号动力系统的性质来刻画.

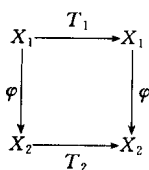


图 1-1 拓扑共轭示意图

两个动力系统  $T_i: X_i \rightarrow X_i (i = 1, 2)$ , 如存在同胚映射  $\varphi: X_1 \rightarrow X_2$ , 使得图 1-1 成立, 即  $\varphi \circ T_1 = T_2 \circ \varphi$  (或者等价于  $T_2 = \varphi \circ T_1 \circ \varphi^{-1}$ ), 则称两个动力系统  $(T_1, X_1)$  和  $(T_2, X_2)$  为拓扑共轭. 数学上可以证明两个拓扑共轭的动力系统在动力学行为上是等价的. 在图 1-1 中, 取  $X_1 = \Sigma_A$ ,  $T_1 = \sigma$ ,  $(T_2, X_2)$  为所要研究

的动力系统,那么由拓扑共轭性质,从 $(\sigma, \Sigma_A)$ 的混沌性质可以推出 $T_2$ 在 $X_2$ 上也有混沌性质.在下面两节中,利用这种思想,介绍了如何把动力系统混沌属性的判定转化为 Smale 马蹄存在性和横截同宿点存在性的判定.

## § 2 Smale 马蹄变换

与移位映射 $\sigma$ 在 $\Sigma_2$ ( $\Sigma_2$ 是指仅由两个数字,记为“0”或“1”,所构成的序列空间)上建立的动力系统拓扑共轭的最典型例子是 Smale 马蹄变换在其不变集上所产生的动力系统.

考虑平面 $\mathbb{R}^2$ 上的正方形 $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ .把正方形 $Q$ 在竖直方向上拉长(拉伸比 $\mu > 2$ ),在水平方向上压缩(压缩比 $\lambda < \frac{1}{2}$ ),形成一竖直窄长条,然后弯成马蹄形,放回

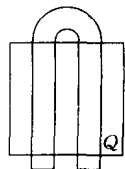


图 2-1 Smale 马蹄变换示意图

$Q$ (如图 2-1 所示),用这样的方法所构造的映射 $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,通常就称为 Smale 马蹄变换<sup>[3]</sup>.

显然, $V = f(Q) \cap Q$ 是由两条不相交竖条 $V_0$ 和 $V_1$ 组成,即 $V = V_0 \cup V_1$ ,每条竖条宽度小于 $Q$ 的宽度的一半; $V$ 的逆像 $U = f^{-1}(V)$ 是由两条不相交的横条 $U_0 = f^{-1}(V_0)$ 和 $U_1 = f^{-1}(V_1)$ 组成,即 $U = U_0 \cup U_1$ ,每条横条的厚度小于 $Q$ 的厚度的一半.

为了建立上述映射与符号动力系统的联系,我们把 $f(Q) \cap Q$ 的两条竖条记为 0. 和 1.,  $f^{-1}(V)$ 的两条横条分别记为.0 和.1, 这样两条横条和两条竖条交成四个小块为 0.0, 0.1, 1.0, 1.1 (如图 2-2 所示).在上述记号下, $Q \cap f(Q) = (0., 1.)$ ,其逆像 $f^{-1}(Q) \cap Q = (.0., .1.)$ ,两者交集为

$$A_1 = (0.0, 0.1, 1.0, 1.1) = f^{-1}(Q) \cap Q \cap f(Q). \quad (2.1)$$

因为  $f(\Delta_1) = Q \cap f(Q) \cap f^2(Q) \subset Q$ , 所以  $\Delta_1$  中的点在  $f$  的一次作用下没有跑出  $Q$ . 同样可以验证  $f^{-1}(\Delta_1) \subset Q$ , 故  $\Delta_1$  中的点在  $f$  的一次逆作用下也留在  $Q$  内.

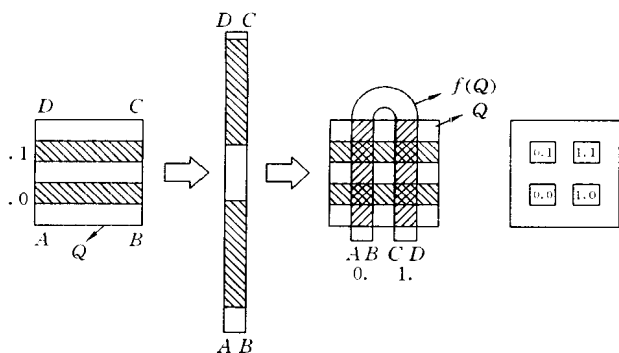


图 2-2  $\Delta_1$  示意图

接着再考虑  $f^2(Q)$ . 它与  $Q \cap f(Q)$  交于四条竖条, 这四条竖条可以记为

$$Q \cap f(Q) \cap f^2(Q) = (00., .10., .11., .01.). \quad (2.2)$$

它是由  $V$  中两条竖条经过  $f$  的作用后生成的. 同样, 此四条竖条经过  $f$  的逆映射作用后生成四条横条, 它们可以记为

$$f^{-2}(Q) \cap f^{-1}(Q) \cap Q = (.00., .10., .11., .01.). \quad (2.3)$$

四条竖条和四条横条交成 16 个小方块 (见图 2-3). 这 16 个小块可以记为

$$\begin{aligned} \Delta_2 = f^{-2}(Q) \cap f^{-1}(Q) \cap Q \cap f(Q) \cap f^2(Q) = \\ (00.00, 00.01, 00.11, 00.10, \dots \\ 01.00, 01.01, 01.11, 01.10). \end{aligned} \quad (2.4)$$

同样可以验证,  $\Delta_2$  内的点经过  $f$ ,  $f^2$  和  $f^{-1}$ ,  $f^{-2}$  作用后仍留在

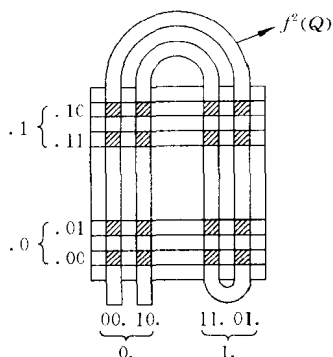


图 2-3  $A_2$  示意图

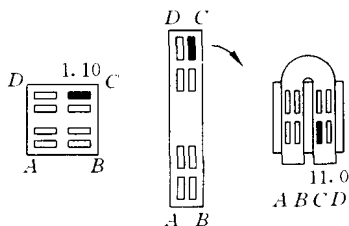


图 2-4  $(f, \Delta)$  与  $(\sigma, \Sigma_2)$  关系示意图

$Q$  内.

按同样方法重复进行  $n$  次, 可以求得集合

$$\Delta_n = f^{-n}(Q) \cap \cdots \cap f^{-1}(Q) \cap Q \cap f(Q) \cap \cdots \cap f^n(Q). \quad (2.5)$$

它是由  $2^{2n}$  个小块组成的, 每一个小块可以用长为  $2n$  的符号串表示, 其典型形式为

$$a_{-n} \cdots a_{-1} a_1 \cdots a_n, \quad (2.6)$$

其中  $a_j (j = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm n)$  为 0 或 1.  $\Delta_n$  中的点经过  $k (k \leq n)$  次映射或逆映射后仍留在  $Q$  内.

令  $n \rightarrow \infty$ , 从数学上可以证明得到  $f$  的不变集

$$\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n. \quad (2.7)$$

$\Delta$  内的点不论进行多少次映射或逆映射都仍留在  $Q$  内. 由于  $\mu > 2$  和  $\lambda < \frac{1}{2}$ , 故当  $n \rightarrow \infty$  时, 每一个小块都收缩为一个点, 因而  $\Delta$  是一个无穷点集, 且  $\Delta$  中每一点都可以用 0 和 1 构成的双向无穷序列表示, 这种对应关系是一一对应的, 这样就建立了  $\Delta$  和  $\Sigma_2$  之间

的对应关系.

现在再来观察  $\Delta$  中的点在  $f$  的作用下的变化情况. 由图 2-4 (见第 7 页) 可见, 如果  $\Delta$  中的一点原先在方块 1.10 之中, 它在  $f$  的作用下成为 11.0 所代表的方块中的点, 那么  $f$  对  $\Delta$  中点的作用相当于移位映射  $\sigma$  对于  $\Sigma_2$  中点的作用. 依照上述讨论的线索, 可以从数学上严格证明  $(f, \Delta)$  和  $(\sigma, \Sigma_2)$  是拓扑共轭的. 换句话说,  $f$  在  $\Delta$  上的动力学行为是混沌的. 因而从动力系统中证明 Smale 马蹄变换存在来判定该动力系统具有混沌性质是混沌解析研究的一种重要手段.

当然上述讨论的 Smale 马蹄变换完全是一种理想化的模型, 在实际问题中不可能出现如此理想化的变换. 在处理实际问题时, 我们要抓住上述理想化变换的一些本质东西, 建立严格数学意义下的 Smale 马蹄变换. 这方面的详细工作我们将在第二章中作出叙述.

### § 3 横截同宿点理论

讨论一个动力系统是否具有混沌性质, 除了用上节提出的证明 Smale 马蹄变换的存在性以外, 另一个更为切实可行的方法是判定横截同宿点的存在性. 为了说明横截同宿点理论的主要框架, 同时又使问题不至于过分抽象化, 这里就以平面映射为例来进行讨论.

设  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  是一个微分同胚映射. 如果  $x \in \mathbb{R}^2$ , 满足  $f(x) = x$ , 则称  $x$  为  $f$  的不动点. 如果  $x \in \mathbb{R}^2$ , 满足  $f^n(x) = x$ ,  $f^i(x) \neq x (1 \leq i < n)$ , 则称  $x$  为  $f$  的  $n$  周期点, 轨道  $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$  就称为  $f$  的一条周期轨道.

设  $x$  为  $f$  的不动点. 如果  $f$  在  $x$  处的 Jacobi 矩阵  $Df(x)$  的特征值的模不为 1, 则称  $x$  为  $f$  的双曲不动点. 类似地, 对于  $f$  的过  $x$  的周期为  $n$  的周期轨道, 若  $f^n$  在  $x$  处的 Jacobi 矩阵  $Df^n(x)$  的特征值的模不为 1, 则称周期轨道  $\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$  为双曲周

期轨道. 特别地, 在双曲不动点  $x$  处,  $Df(x)$  的特征值为实数且满足  $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$  时, 称  $x$  为  $f$  的鞍点. 当然, 鞍点的概念也可以推广到鞍型周期点.

设  $x$  为  $f$  的鞍点, 由双曲不动点的稳定流形存在定理可知, 在包含  $x$  的充分小邻域  $U$  内存在与  $f$  的光滑性相同的局部稳定流形和局部不稳定流形. 它们可以表示为

$$\begin{cases} W_{\text{loc}}^s(x) = \{y \in U \mid f^n(y) \rightarrow x, \text{ 当 } n \rightarrow \infty; \\ \quad \text{且 } f^n(y) \in U, \forall n \geq 0\}, \\ W_{\text{loc}}^u(x) = \{y \in U \mid f^{-n}(y) \rightarrow x, \text{ 当 } n \rightarrow \infty; \\ \quad \text{且 } f^{-n}(y) \in U, \forall n \geq 0\}. \end{cases} \quad (3.1)$$

$W_{\text{loc}}^s(x)$  和  $W_{\text{loc}}^u(x)$  在  $x$  处分别与  $Df(x)$  的特征方向所决定的特征子空间  $E_x^s$  和  $E_x^u$  相切. 由定义可知, 鞍点  $x$  的局部稳定流形和局部不稳定流形是指在  $x$  的充分小邻域内存在两条足够光滑流形, 位于这两个流形上的点在  $f$  的正向迭代或逆向迭代过程中分别沿着这两个流形趋于  $x$ .  $x$  的稳定流形  $W^s(x)$  和不稳定流形  $W^u(x)$  分别是指它们对应的局部流形在无穷次逆向迭代或正向迭代所得到的并集, 即

$$\begin{cases} W^s(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_{\text{loc}}^s(x)), \\ W^u(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_{\text{loc}}^u(x)). \end{cases} \quad (3.2)$$

稳定流形和不稳定流形的概念可以推广到鞍型周期轨道. 记  $f$  的鞍型周期轨道为  $\bar{x} = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ ,  $\bar{x}$  的稳定流形和不稳定流形是指在  $f$  的  $n$  次迭代下, 其轨道上每一点的稳定流形和不稳定流形的并集, 即为

$$\begin{cases} W^s(\bar{x}, f) = \bigcup_{k=0}^{n-1} W^s(f^k(x), f^n), \\ W^u(\bar{x}, f) = \bigcup_{k=0}^{n-1} W^u(f^k(x), f^n). \end{cases} \quad (3.3)$$