高等学校教材

专科适用

高等数学

江苏水利工程专科学校 茅人文
南昌水利水电高等专科学校 雷仲庄
合编

980106

高等学校教材

专科适用

高等数学

江苏水利工程专科学校 茅人文
南昌水利水电高等专科学校 雷仲庄 合编

水利电力出版社

（京）新登字115号

内 容 提 要

本书是根据"一九九〇——一九九五年高等学校水利水电类专业专科教材选题和编审出版规划"编写的。

本书内容包括函数、极限与连续，导数与微分，不定积分，定积分，中值定理与导数的应用，定积分的应用微分方程向量代数与空间解析几何，多元函数微分法及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数等十二章。每节配有习题，每章有复习题，书末有附录和习题答案。

本书可作为工程高等专科学校《高等数学》的教材或参考书。

高等学校教材

专科适用

高等数学

江苏水利工程专科学校 茅人文
南昌水利水电高等专科学校 雷仲庄 合编

*

水利电力出版社出版

（北京三里河路6号）

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

北京市朝阳区小红门印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 35.25印张 806千字

1995年5月第一版 1995年5月北京第一次印刷

印数 0001—1860册

ISBN7-120-02117-6/TV·812

定价19.70元

前　　言

为了适应高等工程类高等专科学校数学教学的需要，根据"一九九〇——一九九五年高等学校水利水电类专业专科教材选题和编审出版规划"，编写这本《高等数学》专科教材

目　　录

第一章　函数、极限与连续

第一节　函　　数

函数是高等数学研究的主要对象．本节介绍函数及其有关的且在学习微积分中所必须的一些基本知识．

一、实数集与区间

高等数学里所说的数，若无特殊声明均指实数．所论的集为实数集，简称数集．全体实数所成的集，称为实数系．

实数系具有两种性质，一是所谓有序性，即实数里任何两个实数之间，有且只有大于、小于、等于三者之一的关系成立．一是所谓稠密性，即实数系里任何两个不同的实数之间必有无穷多个实数．

实数x的绝对值$|x|$定义为

$$|x|=\begin{cases} x, & x>0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

它有下列基本性质：

（1）对于任何实数x，恒有$|x|>0$，当且仅当$x=0$时才有$|x|=0$．

（2）对于任何实数x，恒有$-|x|<x\leqslant|x|$．

（3）若$|x|<a(a>0)$，则$-a<x<a$；反之，亦然．

（4）对于任何两个实数x与y，恒有

$$|x+y|<|x|+|y|,\quad |x+y|>|x|-|y|$$

$$|xy|=|x||y|;\quad \frac{|x|}{|y|}=\frac{|x|}{|y|}\quad (y\neq 0)$$

在一元微积分学里常用的数集是区间和数轴上点的邻域．

现将各种区间的名称、定义及表示记号列于表1-1(其中a与b是二实数，且$a<b$)：

表 1-1

名　称	定　义	记　号	名　称	定　义	记　号
开区间	$\{x\|a<x<b\}$	(a, b)	无穷区间	$\{x\|a<x\}$	$[a, +\infty)$
闭区间	$\{x\|a<x<b\}$	$[a, b]$	无穷区间	$\{x\|x<b\}$	$(-\infty, b)$
半开区间	$\{x\|a<x<b\}$	$(a, b]$	无穷区间	$\{x\|x<b\}$	$(-\infty, b]$
半开区间	$\{x\|a<x<b\}$	$[a, b)$	无穷区间	$\{x\|$一切实数$x\}$	$(-\infty, +\infty)$
无穷区间	$\{x\|a<x\}$	$(a, +\infty)$			

满足不等式 $|x-x_0|<\delta(\delta>0)$ 的一切实数x所构成的数集称为以点x_0为心的δ邻域，简称点x_0的δ邻域．显然,点x_0的δ邻域就是开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)(\delta>0)$．

在点x_0的δ邻域 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 内去掉点x_0，即 $\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$,称为点x_0的去心邻域，它是 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$．

二、函数的概念

世界上任何事物都在变化着．在考察事物的某种变化过程中，常会遇到两种量，一种量在变化过程中可取不同的数值，称之为变量；另一种量在变化过程中仅取同一定值，称之为常量．事物的运动是绝对的，静止是相对的．常量也是相对的，如同匀速直线运动可以看成变速直线运动的特例一样，常量亦可视为变量的特例．

在研究自然现象或科学技术过程中，常有几个变量同时变化着，它们的变化往往是互相联系，互相依赖的．在高等数学里主要研究变量之间的确定的依赖关系，即所谓函数关系．

定义　设X和Y是两个非空的数集，若对于数集X中的每一个数x，按照确定的规则f,数集Y中只有一个确定的数y与之对应,则称f是定义在集X上的函数．X称为函数f的定义域．与x对应的实数y记作$f(x)$.如果对于任意的$x_0\in X$,对应的唯一的y值存在,则说函数f在x_0处有定义，且记这个y值为$f(x)|_{x=x_0}$或$f(x_0)$．数集$Y_f=\{y|_{y=f(x)},\ x\in X\}$ 称为函数f的值域．显然，$Y_f\subseteq Y$．

通常，称x为自变量，称y为因变量．要注意区别：f是函数，而$f(x)$是与x对应的因变量的值，称之为x的函数值.但是习惯上也将$f(x)$称为x的函数,或y是x的函数,f称为函数关系．

如果对于变量x的一个值,变量y有多个值与之对应,这时称y是x的多值函数、对于多值函数,我们经常限制y值的范围使之成为单值函数．例如，反三角函数$y=\mathrm{arc}\ \cos x$是多值函数，限制$0<y<\pi$，就得到反余弦函数$y=\mathrm{arc}\cos x$．

函数关系与函数的定义域是函数概念的两个要素．同一个函数关系，由于定义域不同就是不同的函数．例如，函数$\varphi(x)=x^2-1,\ x\geqslant1$．由于当$x\geqslant1$时，$x^2-1\geqslant0$，所以函数$\varphi(x)$的定义域是 $[1,+\infty)$，值域是 $[0,+\infty)$．函数$f(x)=x^2-1$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,\ +\infty)$．$f(x)$与$\varphi(x)$是两个不同的函数．

函数关系的表示法有三种：解析法，图象法，表格法．在分析研究中常用解析法．图象法的优点是直观，在工程技术中常用．表格法也在工程技术中常用，它的好处是可以直接查到表中所列出的函数值．

例1　将边长为a的正方形铁皮四角剪去相等的小正方形，制成一无盖方盒．试求此盒的体积与小正方形边长间的函数关系．

解：设剪去的小正方形的边长为x，盒子体积为V，易得

$$V=x(a-2x)^2$$

此函数的定义域应为$\left(0,\ \dfrac{a}{2}\right)$．

此例说明对于实际问题中的函数关系，其定义域应依实际问题中的条件而定．如果认

为函数$V=x(a-2x)^2$的定义域为$(-\infty, +\infty)$，那就不是所求的函数关系了.

例2 函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ 2, & x<0 \end{cases}$$

是定义在区间$(-\infty, +\infty)$上的一个函数，它的图象如图1-1.

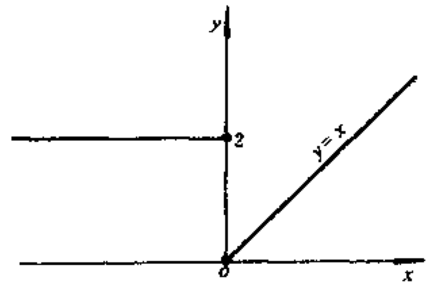

图 1-1

这种在定义域中的不同变化范围内用不同解析式子表示的函数称为分段函数. 在自然科学与工程技术中，常会遇到分段函数，它有着现实的意义.

例3 函数

$$D(x)=\begin{cases} 1, & x\text{ 为有理数} \\ 0, & x\text{ 为无理数} \end{cases}$$

称为狄利克雷（Dirichlet）函数，它是分段函数，其定义域是$(-\infty, +\infty)$.

三、具有某种简单性质的函数

熟悉一个函数具有某种简单性质，如有界性、单调性、奇偶性、周期性等，对以后的分析研究是有帮助的.

1.有界函数

定义 设存在正常数M，函数$f(x)$定义在数集X上，若对于数集X_x $(X_x\subseteq X)$中的每一个数x，恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数$f(x)$在数集X_x上是有界函数.

有时也这样定义有界函数：设存在常数M与m，函数$f(x)$的定义域是数集X，若对于数集$X_x(X_x\subseteq X)$中的一切x，恒有$m\leqslant f(x)\leqslant M$，则称函数$f(x)$在数集$X_x$上是有界函数，或称函数$f(x)$在数集$X_x$上是有上界又有下界的函数.

显然，这两个定义是等价的.

如果存在常数M（或m），对于任意的$x\in X_x$，有

$$f(x)\leqslant M(\text{或} f(x)\geqslant m)$$

则称函数$f(x)$在数集X_x上是有上界（或有下界）的函数，并称M是函数$f(x)$在数集X_x上的上界（或m是函数$f(x)$在数集X_x上的下界）.

显然，函数$f(x)$在数集X_x上的上界（或下界）不是唯一的.

如果不存在正常数M，使得对于X_x中的一切x，恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称$f(x)$在X_x上无界. 或者说，对于任何正数M，在X_x中总有数x^*，使得$|f(x^*)|>M$成立.

同理，函数$f(x)$在X_x上无上界（或无下界）是指：对于任何常数M（或m），总有数$x_1\in X_x$（或$x_2\in X_x$）使得$f(x_1)>M$（或$f(x_2)<m$）.

例4 证明函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0, +\infty)$内有下界，但无上界.

证：对于任何$x\in(0, +\infty)$，恒有$f(x)=\dfrac{1}{x}>0$，故存在$m=0$，使得$f(x)>m$成立，即$f(x)$在$[0, +\infty)$内有下界.

对于任何常数M，总有数$x^*=\frac{1}{|M|+1}\in(0,\ +\infty)$，使得

$$f(x^*)=|M|+1>|M|\geqslant M$$

故$f(x)=\frac{1}{x}$在$(0,\ +\infty)$内无上界.

2. 单调函数

定义 设函数$f(x)$在数集X上有定义，若对于数集$X_x(X_x\subseteq X)$中的任意两个数x_1及x_2，且$x_1<x_2$，恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\ [\text{或} f(x_1)\geqslant f(x_2)]$$

则称函数$f(x)$在X_x上是单调增加（或单调减少）函数. 若上述不等式设为

$$f(x_1)<f(x_2)\ [\text{或} f(x_1)>f(x_2)]$$

则称函数$f(x)$在X_x上是严格单调增加（或严格单调减少）函数.

函数$f(x)$在X_x上严格单调增加、严格单调减少与单调增加、单调减少统称函数$f(x)$在X_x上单调. 严格单调增加与严格单调减少统称为严格单调. 如果数集X_x是区间，那末称此区间为函数$f(x)$的单调（或严格单调）区间.

例5 指数函数$y=a^x$当$a>1$时，在$(-\infty,\ +\infty)$内严格单调增加；当$0<a<1$时，在$(-\infty,\ +\infty)$内严格单调减少.

对数函数$y=\log_a x$当$a>1$时，在$(0,\ +\infty)$内严格单调增加；当$0<a<1$时，在$(0,\ +\infty)$内严格单调减少.

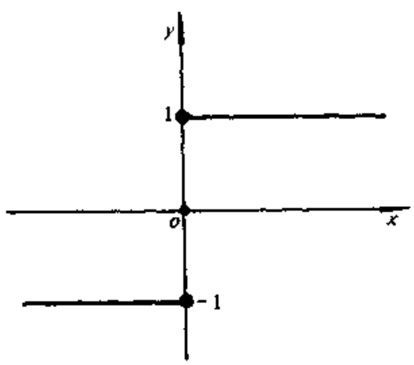

图 1-2

函数（符号函数）

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & \text{当} x>0 \text{时}\\ 0, & \text{当} x=0 \text{时}\\ -1, & \text{当} x<0 \text{时}\end{cases}$$

在$(-\infty,\ +\infty)$内单调增加（如图1-2）.

3. 奇函数与偶函数

定义 设函数$f(x)$在数集X上有定义，若对于每一个$x\in X$，有$-x\in X$；对于X中的一切x，恒有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称函数$f(x)(x\in X)$是奇函数. 若对于每一个数$x\in X$，有$-x\in X$；对于X中的一切x，恒有

$$f(-x)=f(x)$$

则称函数$f(x)(x\in X)$是偶函数.

例6 函数$f(x)=c$（c为常数）的定义域是$(-\infty,\ +\infty)$，它是偶函数，因为$f(-x)=f(x)=c$.

例7 判定狄利克雷函数的奇偶性.

解：对于任何$x\in(-\infty,\ +\infty)$，必有$-x\in(-\infty,\ +\infty)$，当x为有理数时，$-x$亦为有理数；当x为无理数时，$-x$亦为无理数，故恒有$D(-x)=D(x)$，即$D(x)$是偶函数.

函数$\sin x$、$\operatorname{tg}x$、$\operatorname{ctg}x$、$\csc x$都是奇函数，$\cos x$、$\sec x$都是偶函数．偶函数的图象对称于y轴，奇函数的图象对称于坐标原点．这些已为大家所熟知．

关于奇、偶函数，下列命题成立：

（1）奇函数的代数和仍为奇函数，偶函数的代数和仍为偶函数．

（2）两个奇函数的积（或商）、两个偶函数的积（或商）均为偶函数．

（3）奇函数与偶函数的积（或商）为奇函数．

我们只论证（1），其余请读者自证．事实上，若$f(x)$、$g(x)$均为奇函数，即$f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=-g(x)$，如果令$F(x)=f(x)+g(x)$，则

$$F(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-[f(x)+g(x)]=-F(x)$$

故$F(x)$为奇函数．同理可证，$F(x)=f(x)+g(x)$与$f(x)$、$g(x)$同为偶函数．

例如，$x+\operatorname{tg}x$为奇函数，$x\sin x$为偶函数，$x\sec x$为奇函数．

4.周期函数

定义　设函数$f(x)$定义在数集X上，l为非零常数，若对于任何$x\in X$，必有$(x\pm l)\in X$；对于X中的一切x，恒有$f(x\pm l)=f(x)$，则称函数$f(x)$是以l为周期的周期函数．

据定义，如果非零常数l是函数$f(x)$的周期，那末常数$\pm nl\,(n=1,2,\cdots)$都是函数$f(x)$的周期，通常说的周期函数的周期l系指最小正周期．

例8　试证任何非零有理数r都是周期函数狄利克雷函数$D(x)$的周期．

证：任取有理数$r(r\neq 0)$．对于任何$x\in(-\infty,+\infty)$，必有$(x\pm r)\in(-\infty,+\infty)$．对于一切$x\in(-\infty,+\infty)$，当$x$为有理数时，$x\pm r$亦为有理数，从而$D(x\pm r)=D(x)=1$；当$x$为无理数时，$x\pm r$亦为无理数，从而$D(x\pm r)=D(x)=0$．即不论$x$是有理数还是无理数，恒有

$$D(x\pm r)=D(x)$$

这就证明了狄利克雷函数$D(x)$是周期函数，且以任何非零有理数为周期．

由于正有理数集不存在最小的正有理数，故狄利克雷函数$D(x)$不存在最小正周期．

例6中的函数$f(x)=c$（c为常数）也是周期函数，其周期为任何非零实数，它也不存在最小正周期．

这说明除三角函数外，还有别的周期函数．

在科学技术中，许多周期函数可以看成是另一个定义在有限区间上的函数作周期延拓而成．例如，在电学中称为三角波的周期函数$y=|x|$，$-l\leqslant x<l$，且$f(x\pm 2l)=f(x)$，$-\infty<x<+\infty$（其图象如图1-3所示），可以认为它是由函数$f(x)=|x|$，$-l\leqslant x<l$以$2l$为周期延拓成为定义在$(-\infty,+\infty)$上的周期函数．

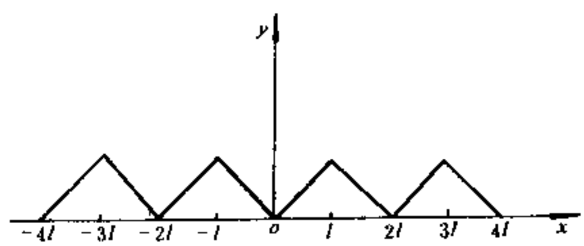

图 1-3

四、反函数、复合函数、参数方程所确定的函数

1.反函数

定义　设有函数$y=f(x)$，定义域是X，使域为Y．如果对于任意的数$y\in Y$，按照法

则f^{-1}，有唯一一个数$x\in X$与之对应，使得$f(x)=y$，则在Y上定义了函数$y=f(x)$的一个反函数，记为

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in Y$$

由反函数定义不难看出，如果函数$x=f^{-1}(y)(y\in Y)$是函数$y=f(x)(x\in X)$的反函数，则函数$y=f(x)(x\in X)$也是函数$x=f^{-1}(y)(y\in Y)$的反函数.

通常把函数$y=f(x)(x\in X)$的反函数$x=f^{-1}(y)(y\in Y)$写成$y=f^{-1}(x)(x\in Y)$.此时，函数$y=f(x)(x\in X)$与其反函数$y=f^{-1}(x)(x\in Y)$的图象在同一平面直角坐标系里关于直线$y=x$对称.

指数函数$y=a^x(a>0,\ a\neq 1)(-\infty<x<+\infty)$与对数函数$y=\log_a x(a>0,\ a\neq 1)(x>0)$互为反函数,三角函数与其在主值下的反三角函数互为反函数. $y=c$(c为常数), $y=x^2$等是不具有反函数的. 这说明并非所有函数都存在反函数. 现不加证明地将反函数存在定理叙述如下.

反函数存在定理　在X上严格单调的函数$y=f(x)$一定存在反函数，且反函数$y=f^{-1}(x)(x\in Y)$在Y上也严格单调.

注意，函数严格单调仅是反函数存在的充分条件，而不是必要条件. 例如，函数

$$y=f(x)=\begin{cases}-x+1, & -1\leqslant x<0\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

在区间$[-1,1]$上不是单调函数（图1-4)，但它在y的变化区间$[0,2]$上存在反函数

$$x=f^{-1}(y)=\begin{cases}y, & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 1-y, & 1<y\leqslant 2\end{cases}$$

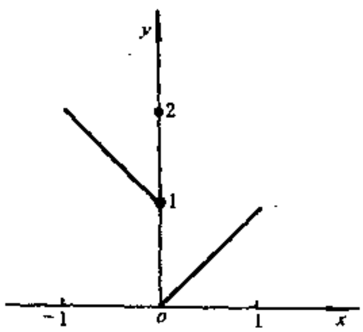

图 1-4

一般说来,函数在其定义域内不一定存在反函数. 但是，函数在其定义域中的某个子集上可能存在反函数. 例如，$y=x^2$在定义域$(-\infty,+\infty)$内不存在反函数,但是它在$[0,+\infty)$内是严格单调增加的,存在反函数$x=\sqrt{y}$, $y\in[0,+\infty)$。同理，函数$y=x^2$在$(-\infty,0]$内也存在反函数$x=-\sqrt{y}$，$y\in[0,+\infty)$. 又如，三角函数$\sin x$、$\cos x$、$\mathrm{tg}\,x$、$\mathrm{ctg}\,x$在各自的定义域内都不存在反函数，但如果把它们分别定义在其定义域内严格单调的子区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$、$[0,\pi]$、$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$、$(0,\pi)$内,则它们分别都有了反函数$\arcsin y\times[y\in(-1,1)]$、$\arccos y(y\in[-1,1])$、$\mathrm{arctg}\,y[y\in(-\infty,+\infty)]$、$\mathrm{arc\,ctg}\,y[y\in(-\infty,+\infty)]$.

2.复合函数

定义　设函数$y=f(u)$定义在数集U上；函数$u=\varphi(x)$定义在数集X上，其值域为U_x，且$U_x\subseteq U$. 如果对于任意$x\in X$，按照规则φ，对应唯一一个$u\in U_x$，再按照规则f，对应唯一一个y，即对于任意$x\in X$都对应唯一一个y，于是在X上定义了一个函数$y=f(u)$与函数$u=\varphi(x)$的复合函数，记为

$$y=f[\varphi(x)],\quad x\in X$$

u称为中间变量.

例如，函数$y=\sqrt{u}$的定义域是 $[0,+\infty)$. 函数$u=-x^2-x+2$的定义域是 $(-\infty,+\infty)$. 为了使它们构成复合函数，必须要求

$$u=-x^2-x+2\geqslant 0,\ 即\ -2\leqslant x\leqslant 1$$

于是，对于任意$x\in[-2,1]$，函数$y=\sqrt{u}$与$u=-x^2-x+2$构成了复合函数

$$y=\sqrt{-x^2-x+2}$$

复合函数概念可以推广到有限个函数构成复合函数的情形. 例如，三个函数

$$y=\sqrt{u},\quad u=\ln v,\quad v=3x-2$$

构成复合函数

$$y=\sqrt{\ln(3x-2)},\quad x\in[1,+\infty)$$

3.参数方程所确定的函数

定义 设参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad t\in T(\text{数集}) \tag{1}$$

其中函数$x=\varphi(t)\,(t\in T)$存在反函数$t=\varphi^{-1}(x)\,(x\in X(\text{数集}))$，则在$X$上可以唯一确定变量$y$关于变量$x$的函数$y=\psi(\varphi^{-1}(x))\,(x\in X)$. 此函数称为由参数方程（1）所确定的函数.

同理，如果函数$y=\psi(t)\,(t\in T)$存在反函数$t=\psi^{-1}(y)\,(y\in$数集$Y)$，则在Y上可以唯一确定变量x关于变量y的函数$x=\varphi(\psi^{-1}(y))\,(y\in Y)$.

例如,参数方程$x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(a>0,b>0)$, $0\leqslant t\leqslant\pi$,因为$x=a\cos t$, $0\leqslant t\leqslant\pi$存在反函数$t=\arccos\frac{x}{a}$, $-a\leqslant x\leqslant a$,故此参数方程确定了函数$y(x)=b\sin\left(\arccos\frac{x}{a}\right)=b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$, $-a\leqslant x\leqslant a$.

五、初等函数、双曲函数

1.初等函数

常数函数$y=c$(c为常数)、幂函数$y=x^a$（a为实常数)、指数函数$y=a^x$($a>0,a\neq 1$)、对数函数$y=\log_a x$($a>0$，$a\neq 1$)、三角函数及反三角函数这六类函数统称为基本初等函数. 由于读者对这些函数比较熟悉，这里仅将它们的一些结论与图象列出如下：

（1）常数函数$y=c$.

定义域是 $(-\infty,+\infty)$. 它的图象是平行于x轴且与y轴的截距为c的直线.

（2）幂函数$y=x^a$ (a为实常数).

定义域随a的不同而不同，但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义. 只讨论$x>0$的情形. 当$a>0$时，函数图象均通过点 $(0,0)$ 与点 $(1,1)$，都是严格单调增加函数. 当$a\leqslant 0$时，函数的图象均通过点 $(1,1)$，且都为严格单调减少函数，如图1-5.

（3）指数函数$y=a^x$ ($a>0$，$a\neq 1$)，$(-\infty<x<+\infty)$.

因对任何实数x，$a^x>0$，所以其图象均在x轴的上方，且都过点 $(0,1)$. 当$0<a<1$时，函数严格单调减少；当$a>1$时，函数严格单调增加，如图1-6.

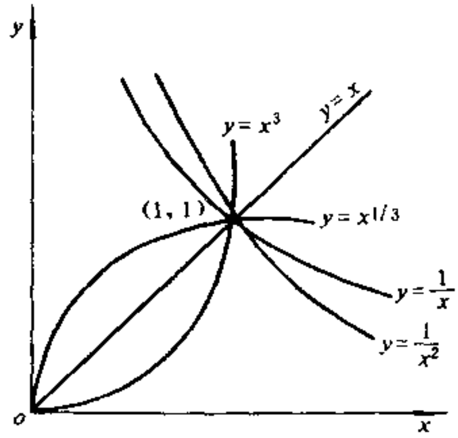

图 1-5

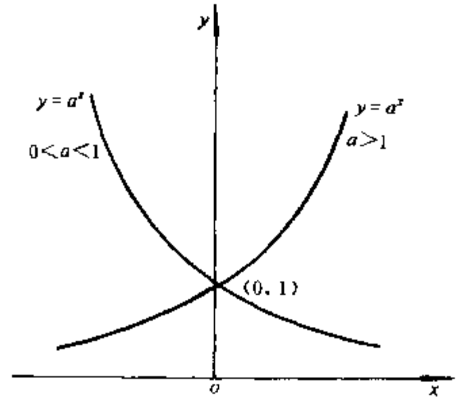

图 1-6

（4）对数函数$y=\log_a x(a>0,\ a\neq 1)$，$(x>0)$.

它是指数函数$y=a^x(a>0,\ a\neq 1)$的反函数，如图1-7.

（5）三角函数.

$y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$均是以2π为周期的周期函数，$y=\mathrm{tg}\,x$、$y=\mathrm{ctg}\,x$均是以π为周期的周期函数．如图1-8、图1-9和图1-10.

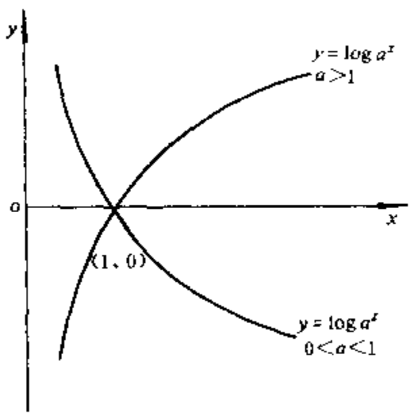

图 1-7

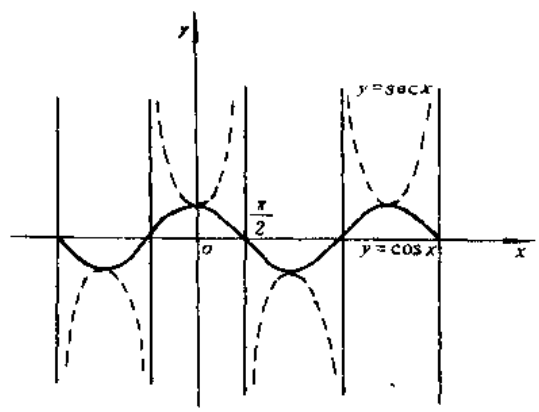

图 1-8

（6）反三角函数.

$$y=\mathrm{arc}\sin x,\ x\in[-1,1],\ y\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y=\mathrm{arc}\cos x,\ x\in[-1,1],\ y\in[0,\ \pi]$$

$$y=\mathrm{arc}\,\mathrm{tg}\,x,\ x\in(-\infty,\ +\infty),\ y\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y=\mathrm{arc}\,\mathrm{ctg}\,x,\ x\in(-\infty,\ +\infty),\ y\in(0,\ \pi)$$

它们分别是$y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\mathrm{tg}\,x$、$y=\mathrm{ctg}\,x$的反函数，如图1-11～图1-14.

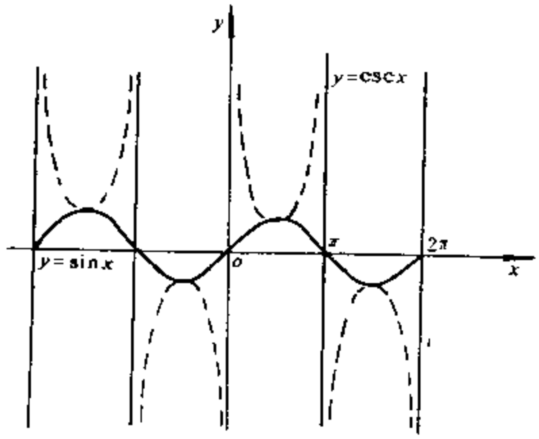

图 1-9

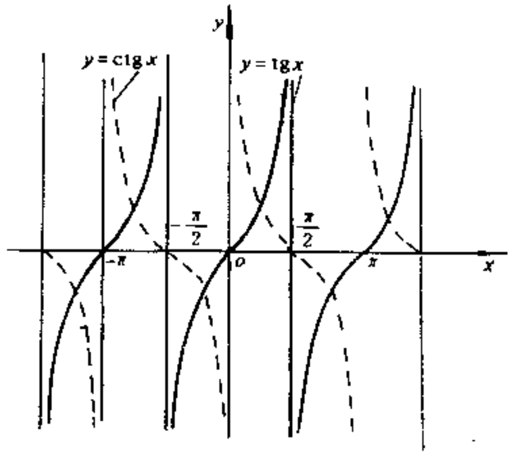

图 1-10

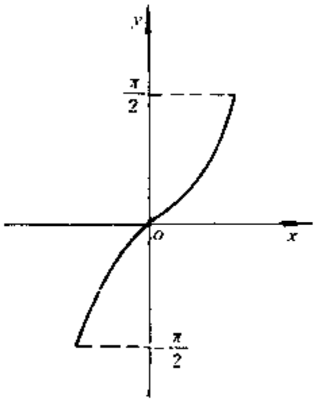

图 1-11

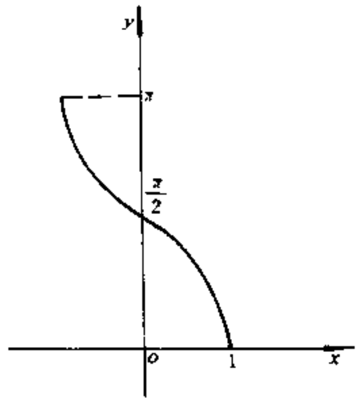

图 1-12

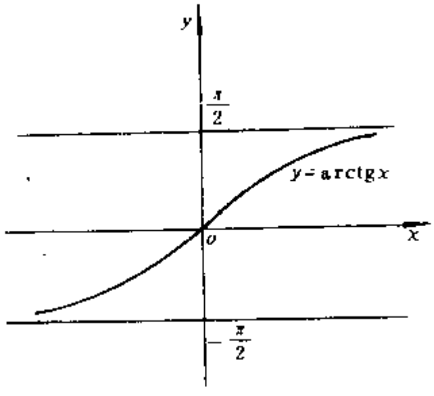

图 1-13

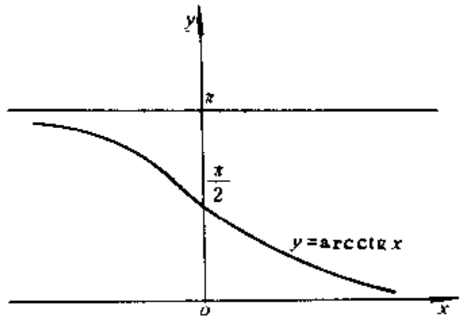

图 1-14

凡由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合而成的且由一个解析式表示的函数称为初等函数.

不是初等函数的函数称为非初等函数.例如,分段函数是非初等函数,$y=x^x$ 亦是非

初等函数.

初等函数是一类重要的函数，它具有一些好的性质，应用很广泛. 下面介绍在工程技术中经常用到的一类初等函数，即所谓双曲函数.

2. 双曲函数

双曲函数的定义如下：

双曲正弦函数　$\mathrm{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$

双曲余弦函数　$\mathrm{ch}x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$

双曲正切函数　$\mathrm{th}x=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$

双曲余切函数　$\mathrm{cth}x=\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$，$x\neq 0$

双曲正割函数　$\mathrm{sech}x=\frac{1}{\mathrm{ch}x}$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$

双曲余割函数　$\mathrm{csch}x=\frac{1}{\mathrm{sh}x}$，$x\neq 0$

下面仅研究$\mathrm{sh}x$、$\mathrm{ch}x$和$\mathrm{th}x$的性质和图象.

因为

$$\mathrm{sh}(-x)=\frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2}=-\frac{e^x-e^{-x}}{2}=-\mathrm{sh}x$$

$$\mathrm{ch}(-x)=\frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\mathrm{ch}x$$

$$\mathrm{th}(-x)=\frac{\mathrm{sh}(-x)}{\mathrm{ch}(-x)}=-\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=-\mathrm{th}x$$

故$\mathrm{sh}x$、$\mathrm{th}x$都是奇函数，$\mathrm{ch}x$是偶函数.

利用函数$y=\frac{1}{2}e^x$与函数$y=\frac{1}{2}e^{-x}$的图象，再把同一x的值所对应的两个函数值作代数和，可以得到$\mathrm{sh}x$与$\mathrm{ch}x$的图象，如图1-15.

因为$\mathrm{th}x$是奇函数，且由

$$\mathrm{th}x=\frac{1-\frac{1}{2^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}$$

知当$x>0$，$\mathrm{th}x$的值不超过1；且当x增大时，$\mathrm{th}x$的值亦增大，故可大致作出$\mathrm{th}x$的图象，如图1-16.

根据双曲函数的定义可得一些恒等式，它们与三角函数的恒等式的形式相似.

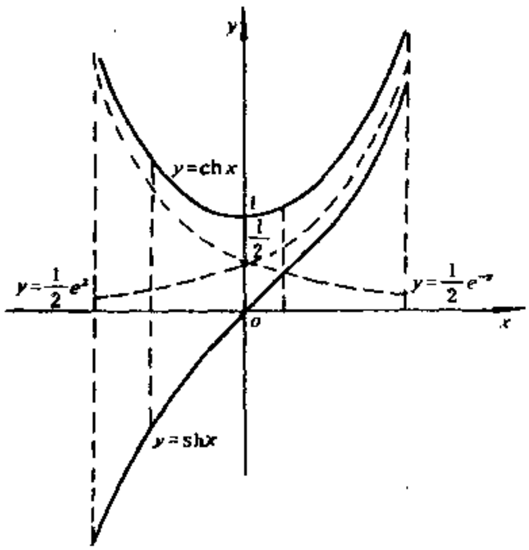

图 1-15

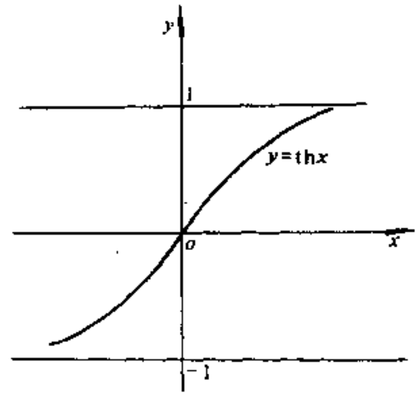

图 1-16

$$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$$
$$\mathrm{sh}(x+y)=\mathrm{sh}x\mathrm{ch}y+\mathrm{ch}x\mathrm{sh}y$$
$$\mathrm{ch}(x+y)=\mathrm{ch}x\mathrm{ch}y+\mathrm{sh}x\mathrm{sh}y$$
$$\mathrm{th}(x+y)=\frac{\mathrm{th}x+\mathrm{th}y}{1+\mathrm{th}x\mathrm{th}y}$$
$$\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x$$
$$\mathrm{ch}2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x=1+2\mathrm{sh}^2x=2\mathrm{ch}^2x-1$$

双曲函数的反函数称为反双曲函数，$\mathrm{sh}x$、$\mathrm{ch}x$、$\mathrm{th}x$的反函数分别记为$\mathrm{arsh}x$、$\mathrm{arch}x$、$\mathrm{arth}x$。

双曲正弦函数$y=\mathrm{sh}x(-\infty<x<+\infty)$是严格单调增加函数，它存在反函数．现求$\mathrm{arsh}x$的解析式．

由$y=\mathrm{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，有

$$(e^x)^2-2ye^x-1=0$$

可解得

$$e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$$

因$e^x>0(-\infty<x<+\infty)$，故应舍去负号，即

$$e^x=y+\sqrt{y^2+1}$$

得

$$x=\mathrm{arsh}y=\ln(y+\sqrt{y^2+1})\quad(-\infty<y<+\infty)$$

而双曲余弦函数$y=\mathrm{ch}x(-\infty<x<+\infty)$在$[0,+\infty)$上严格单调增加，其值域为$[1,+\infty)$，它存在反双曲余弦函数

$$x=\mathrm{arch}y=\ln(y+\sqrt{y^2-1})\quad(1\leqslant y<+\infty)$$