普通高等教育材料成形及控制工程专业改革教材

材料成形计算机模拟

董湘怀 主编

机械工业出版社
China Machine Press

普通高等教育材料成形及控制工程专业改革教材

材料成形计算机模拟

主　编　董湘怀
参　编　王桂兰　刘建生　李付国　陈立亮　刘瑞祥
主　审　孙　胜　张端明

机械工业出版社

本书系统地介绍了有限元法和有限差分法这两种主要的数值分析方法的概念、公式和实施步骤，数值分析方法在工程分析中尤其在材料成形过程计算机模拟中的应用。主要内容包括：弹性、弹塑性及刚塑性问题的有限元分析，温度场及流动问题的有限差分分析等。这些内容将为读者提供为应用模拟软件分析工程问题所必需的较为完整的知识。

本书是为高等院校专业调整后的材料成形及控制工程专业本科生编写的教材，也可供材料学科、机械学科有关专业的师生以及从事材料加工和机械制造的科技人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

材料成形计算机模拟/董湘怀主编．—北京：机械工业出版社，2001.12

普通高等教育材料成形及控制工程专业改革教材

ISBN 7-111-09629-0

Ⅰ．材…　Ⅱ．董…　Ⅲ．工程材料-成型-计算机模拟-高等学校-教材　Ⅳ．TB3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 091135 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

责任编辑：王霄飞　张祖凤　版式设计：霍永明　责任校对：樊钟英

封面设计：姚　毅　责任印制：路　琳

中国建筑工业出版社密云印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2002 年 1 月第 1 版·第 1 次印刷

1000mm × 1400mmB5·5 印张·192 千字

0 001 — 3 000 册

定价：13.00 元

普通高等教育材料成形及控制工程专业
改革教材编审委员会

序

我国社会主义现代化建设浪潮不断高涨，高等教育与教学改革不断深入发展，长江后浪推前浪。

培养基础宽、素质高、能力强、适应面广，具有创新能力的人才，教材建设是一大关键。新的专业目录颁布以来，经过摸索和探讨，对一些改革力度大的专业组建和教材建设，各高校的观点和看法逐渐趋于大同。在这个基础上，编写一套适合于普通高等教育“材料成形及控制工程”专业系列改革教材是适时的，也是非常必要的。

该系列教材，内容合理而先进，充分体现了专业重心下移，着重于专业的基础性、共性课程的设置。而反映铸、锻、焊、热处理专业方向性的课程，绝大部分作为选修课程设置。其主要特点，一是系列教材覆盖面宽，不仅覆盖了4个老专业近40门专业教材的内容，而且还延伸到材料热加工的最新技术及发展的前沿；二是内容精练，选材新颖，结构合理，12门教材平均每门不足30万字，仅为4个老专业教材篇幅的1/4～1/5，且近一半的内容选自近10余年来的科研成果、国内外文献和国外原版教材；三是12门专业主干教材中，有4门是与计算机和信息技术相结合的教材，突出了计算机和信息技术的学习与应用。

我相信，通过这套专业系列教材的学习，可使材料成形及控制工程专业的学生较为充分地掌握系统的专业基础与共性知识，在先进的材料加工新技术和发展趋势方面较好了解乃至有所掌握，在计算机应用和外语水平方面能形成优势，这有利于培养较高的综合素质和较强的创新能力。

当然，任何事情不能一蹴而就。这套专业系列教材也有待于在教学实践中不断修改与完善。好的开始等于成功的一半。我祝愿在著者与读者的共同努力下，这套教材有一个更为美好的明天，谨此为序。

中科院院士 杨叔子

2000年8月

前　言

为了适应国家教育改革形势的发展，根据教育部最新颁布的新的专业目录，全国大部分工科院校已将原热加工专业的铸造、焊接、锻压、热处理四个专业合并为材料成形及控制工程大专业。1998 年 12 月，教育部热加工专业教学指导委员会在哈尔滨召开年会，探讨了专业改造和教材建设的问题。

推行专业改革，为社会培养综合素质高、知识结构全面的栋梁之材，在很大程度上取决于教材建设。教育部颁布新的专业目录已有一段时间，经过这一阶段的摸索和探讨，对材料成形及控制工程专业的改造和教材建设，各高校观点和方法逐渐趋于大同，在这个基础上，编写一套普通高等教育材料成形及控制工程专业系列教改教材是适时的。为此，机械工业出版社教材编辑室成立了以华中科技大学为牵头单位的系列教改教材编审委员会，共同组织编写材料成形及控制工程专业系列教材。

本书主要介绍有限元法和有限差分法在材料成形计算机模拟中的应用。

第一章概述了数值模拟技术的基本概念和发展，说明了本书的使用方法。从第二章开始介绍两种主要的数值分析方法，其中第二章至第四章为有限元部分，第五章至第七章为有限差分部分。第二章通过弹性力学问题，介绍有限元法的基本概念、基本公式和分析计算步骤，并阐述了有限元法的一般意义。第三章介绍弹塑性有限元法，阐述了材料非线性和几何非线性问题的处理方法。第四章介绍刚塑性有限元法，还包括刚粘塑性有限元法和热传导问题的有限元法。第五章介绍有限差分法的基本知识，为应用有限差分法奠定理论基础。第六章以铸件温度场数值模拟技术为例，讲述有限差分法在实际中的应用。第七章重点介绍了铸造领域的最新研究成果——铸件充型过程数值模拟技术。

本书的主编为华中科技大学董湘怀（第一章部分内容、第二章）。参编人员有华中科技大学王桂兰（第三章）、太原重型机械学院刘建生（第四章第一、二、三节）、西北工业大学李付国（第四章第四、五、六节）、华中科技大学陈立亮（第一章部分内容、第五章）、华中科技大学刘瑞祥（第六章、第七章）。本书的主审为山东大学孙胜教授（第一、二、三、四章）和华中科技大学张端明教授（第五、六、七章）。

鉴于作者水平所限，书中难免有不当之处，敬请读者批评指正。

编者

董湘怀 男，1955年11月出生。1991年于华中理工大学获工学博士学位，1993年至1996年在日本大阪大学和大阪工业大学任客座研究员，现为华中科技大学塑性成形模拟及模具技术国家重点实验室教授、全国锻压学会理论学术委员会委员兼秘书。主要研究方向为塑性加工过程的计算机模拟及工艺优化、宏微观结合的材料本构关系及其在材料加工中的应用、有限元法的工程应用等。已在国内外重要期刊和会议上发表论文40余篇，参编教材1本，获教育部二、三等奖各1项。

目　录

第一章 绪　论

第一节 材料成形数值模拟概述

广义地说，材料加工是人类利用自然，创造有用产品的一种基本的生产活动，它将贯穿于人类的全部历史。狭义地说，本书讨论的材料加工，主要是指现代金属材料的加工，即采用铸造、锻压等方法将金属原材料加工成所需的形状、尺寸，并达到一定的组织性能要求，这一过程又称为材料成形。在现代制造业中，材料成形是生产各种零件或零件毛坯的主要方法。

材料成形的方法种类繁多，涉及到的物理、化学和力学现象十分复杂，是一个多学科交叉、融合的研究和应用领域。例如，在液态金属成形过程中，涉及液态金属的流动，包含了相变与结晶的凝固现象。在固态金属的塑性成形中，金属在发生大塑性变形的同时，也伴随着组织性能的变化，有时也涉及到相变和再结晶现象。

材料成形过程的基本规律可以用一组微分方程来描述，例如流动方程、热传导方程、平衡方程或运动方程等，这些方程在所讨论的问题中常常称为场方程或控制方程。在《材料成形原理》这本书中，对这些方程进行了详细的阐述。为了分析一个具体的材料成形问题，除了要给出具有普遍意义的场方程以外，还要给出由该问题的特点所决定的定解条件，其中包括边值条件和初值条件。这样就把材料成形问题抽象为一个微分方程（组）的边值问题。一般说来，微分方程的边值问题只是在方程的性质比较简单、问题的求解域的几何形状十分规则的情况下，或是对问题进行充分简化的情况下，才能求得解析解。而实际的材料成形问题求解域往往是十分复杂的，而且场方程往往相互耦合，因此无法求得解析解，而在对问题进行过多简化后得到的近似解可能误差很大，甚至是错误的。

过去，由于缺乏科学的预测方法，材料成形工艺设计和模具设计的主要依据是设计人员在长期工作中积累的经验，以及由对简单模型的实验研究总结出的多种图表。对于复杂的零件，按照设计制造出工装模具以后，往往还需要通过反复的试验、修改，才能最终生产出合格的制品。这样，不但造成人力、物力、时间的巨大浪费，也难以保证产品质量。

近十几年来，随着计算机硬件、软件技术的飞速发展和对材料成形过程物理规律研究的深入，材料成形过程计算机模拟技术取得了很大的进展。计算机模拟

即是通过数值计算得到用微分方程边值问题来描述的具体材料成形问题中工件和模具的速度场（位移场）、应变场、应力场、温度场等，据此预测工件中组织性能的变化以及可能出现的缺陷；利用计算机图形技术将这些分析结果直观地、动态地呈现在研究设计人员面前，使他们能通过这个虚拟的材料加工过程检验工件的最终形状、尺寸、性能等是否符合设计要求，正确选用机器设备和模具材料。采用模拟技术，能在材料成形工艺设计和模具设计初步方案完成后立即对其进行检验，寻求可行的甚至最优的设计方案，然后再完成详细设计并进行模具制造。这样，在新产品开发时，就能使得产品设计、工装模具设计和制造等相关工作同时展开，即实现并行工程，达到降低成本、提高质量、缩短产品交货期的目的。

数值模拟方法的基本特点是将微分方程边值问题的求解域进行离散化，将原来欲求得在求解域内处处满足场方程、在边界上处处满足边界条件的解析解的要求降低为求得在给定的离散点（节点）上满足由场方程和边界条件所导出的一组代数方程的数值解。这样，就使一个连续的、无限自由度问题变成离散的、有限自由度问题。

已经发展的数值模拟方法可以分为两大类：一类以有限元法为代表，另一类以有限差分法为代表。有限元法的特点是将求解域离散为一组有限个形状简单且仅在节点处相互连接的单元的集合体，在每个单元内用一个满足一定要求的插值函数描述基本未知量在其中的分布。随着单元尺寸的缩小，近似的数值解将越来越逼近精确解。有限元法适应任意复杂的和变动的边界。有限差分法以差分代替微分，将求解对象在时间与空间上进行离散，对每个离散单元进行各种物理场分析（如温度场、流动场及应力场等），然后将所有单元的求解结果汇总，得到整个求解对象在不同时刻的行为变化，并对分析对象的可能变化（发展）趋势作出预测。有限差分法具有求解过程简单、速度快、前后置处理易于实现等优点。

材料成形数值模拟是一门应用性很强的课程，应注重上机操作的实践性环节。有条件的读者应该采用模拟软件建模、求解，考察计算结果的合理性和准确性，从中了解模拟技术应用于工程实际问题的方法，掌握有关技术和技巧。建议配合本书教学的上机操作时间不少于 20h。

目前，在工业发达国家，材料成形计算机模拟技术越来越广泛地在各工业部门中得到应用，产生了明显的经济效益，正在深刻地改变着传统的产品设计、制造方式。在工业需求的推动下，国外已涌现出一批用于材料成形计算机模拟的商业软件，如用于金属板料成形分析的 DYNAFORM、PAM - STAMP、OPTRIS 等，用于金属体积成形及热处理分析的 DEFORM 等。我国也研究开发了一些模拟软件，但在软件商品化尤其是模拟技术的实际应用方面与工业发达国家还有较大的差距。材料成形计算机模拟技术有着巨大的发展前景。一方面，人们对于模拟的精度、速度和能力的期望是没有止境的；另一方面，随着各种新材料的发明

和应用，必然会出现各种物理的、化学的甚至生物的材料成形新工艺，这将扩展材料成形计算机模拟的研究领域。随着计算机技术的发展和人们对材料成形基本规律，其中尤其是材料本构关系和边界条件研究的深入，模拟中将采用越来越精确的计算模型，更深刻地揭示材料的各种物理、力学性能和细观、微观组织性能与成形工艺的关系，以更短的计算时间得到更精确、全面的模拟结果。

第二节　本书的编写和使用说明

本书的编写目的是介绍材料成形数值模拟的基本原理和方法，为读者在工作中正确地应用数值模拟技术解决工程问题打下较为坚实的基础。本书在编写中对内容进行了精选，力求突出如下特点：着重介绍数值计算的模型和求解方法，而对前后置处理技术不作过多介绍；着重介绍与模拟技术的应用有关的概念和方法，对编程技术和算法不作过多介绍。我们认为，这样处理能满足绝大多数读者的实际需要。需要自己编写模拟计算软件的读者，可以在学完本书后根据本书所列参考文献进一步深入研究。

本书所必需的数学基础是高等数学和线性代数。读者最好先学过材料成形原理，若仅对书中某种模拟方法（例如弹性有限元法）感兴趣，则最好先具备有关的基本知识。但因为本书在编写中力求做到系统、完整，所以没有有关专业基础的读者也可学习。

本书的内容大致可分为两大部分：第二章到第四章针对金属塑性成形数值模拟，介绍有限元法；第五章到第七章针对液态金属成形数值模拟，介绍有限差分法。

第二章介绍线弹性问题的有限元法，对单元分析、整体集成等有限元法的基本分析步骤进行了详细阐述，给出了具体计算公式，还介绍了几种用于平面问题和三维问题的常用单元模型。这一章的内容具有独立性，因此，仅需了解线弹性结构的强度、刚度分析的读者可仅学习本章。同时，本章也为第三、第四两章的学习打下了必要的基础。本章最后将有限元法推广到求解一般微分方程的边值问题。

第三章将有限元法由线性分析推广到非线性分析。其中由于材料进入塑性变形而导致应力－应变关系出现的非线性称为材料非线性或物理非线性，由于材料发生大变形和/或大转动而在位移（速度）与应变（应变速率）之间的关系中引入的非线性称为几何非线性。在金属塑性成形中这两类非线性往往同时出现。

第四章针对塑性变形量很大且不考虑卸载的问题，从 Markov 变分原理出发，介绍了刚塑性有限元法；针对某些条件下材料性能与应变速率相关的情况，介绍了粘塑性有限元法。第四章还介绍了热传导问题的有限元法。刚塑性和粘塑

性有限元法作为简便高效的分析方法，主要应用于塑性成形模拟。第三章和第四章的内容是相对独立的，读者可根据需要选学其一或二者都学。为了突出重点，节省篇幅，第三章和第四章主要采用矩阵式进行公式推导。

第五章主要讲述有限差分法的一些基本知识，包括差分原理及逼近误差，差分方程、截断误差和相容性，收敛性与稳定性以及 Lax 等价定理等。这些基本知识为后续第六章、第七章的学习奠定了基础。

第六章以铸件温度场数值模拟技术为例，讲述有限差分法在实际中的应用。本章介绍了温度场数值模拟的数学模型，离散及差分化，收敛性约束条件，潜热问题处理以及编程算法的实现等知识。

第七章重点介绍了铸造领域的最新研究成果——铸件充型过程数值模拟技术，具体包括 N－S 方程、分离时间变量、方程的矢量形式、连续性方程、离散与差分化、SOLA－VOF 求解方法等内容。铸件充型过程数值模拟技术是有限差分法在实际领域的具体应用，充分体现了有限差分法在流动场数值模拟技术方面的优势。

本书作者开发了若干教学软件，另行发行，可供读者选用。另外，书末还列出了主要的参考文献目录，有志于深入钻研的读者可以从中找到进一步学习的资料。

第二章　弹性有限元法

本章介绍有限元法的基础知识。为了将注意力集中于有限元法的基本概念和分析处理步骤，本章仅考虑线弹性问题。对于各种非线性问题的有限元分析方法，将在第三章和第四章中讨论。本章首先针对弹性力学平面问题，通过最简单的三角形常应变单元，阐明有限元法用于弹性体应力分析的基本原理和方法。然后简要地介绍轴对称问题和三维问题的有限元法。对于有限元分析中广泛采用的等参单元以及数值积分方法也作了简要的介绍。这些内容为读者应用弹性有限元法进行工程中经常遇到的结构强度和刚度分析提供了必要的理论基础，也为继续学习非线性有限元法及其在材料加工工程中的应用作了必要的准备。本章最后讨论了有限元法的一般化，说明有限元法是一种求解微分方程边值问题和初值问题的一般化的离散化方法。因此，有限元法广泛地应用于科学与工程的许多领域，其中包括结构、热传导、流体、电磁场及其相互耦合的分析。

第一节　弹性力学的基本方程

此处我们仅考虑线弹性静力分析问题。我们假设：①位移梯度是小量，因此应变与位移之间的关系是线性的；②物体始终保持为弹性状态，应力与应变之间的关系是线性的；③边界条件中不包含接触边界条件。

弹性力学静力问题是一个边值问题，可以用场方程和边值条件建立其力学分析模型。图 2-1 所示为该问题的域 V 和边界 S，在域 V 中应满足的场方程包括：

应力平衡方程
$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \tag{2-1}$$

几何方程
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2-2}$$

本构方程
$$\sigma_{ij} = C^e_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{2-3}$$

式中，C^e_{ijkl}为弹性张量，对于平面问题，i，j，k，$l=1\sim2$，对于三维问题，i，j，k，$l=1\sim3$；b_i为单位体积的材料上作用的体积力。

将物体的边界 S 分为 S_u 和 S_p 两部分。在 S_u 上给定了位移$\overline{\boldsymbol{u}}$或速度$\overline{\boldsymbol{v}}$，而在 S_p 上给定了面积力$\overline{\boldsymbol{p}}$。我们在变量上加上划线表示给定值，则边界条

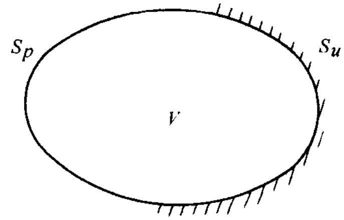

图 2-1　问题的域 V 和边界 S

件可写为

$$\sigma_{ij}n_j = \overline{p}_i \text{（在 } S_p \text{ 上）} \tag{2-4}$$

$$u_i = \overline{u}_i \text{ 或 } \dot{u}_i = \dot{\overline{u}}_i \text{（在 } S_u \text{ 上）} \tag{2-5}$$

其中，式（2－4）称为应力或力边界条件，式（2－5）称为运动学或位移边界条件。

求解以上静力问题，即是要求得满足场方程和边界条件的位移场、应力场和应变场。由于场方程式（2－1）～式（2－3）已建立了这些变量之间的关系，因此只需将其中某些变量作为基本未知量进行求解，其他的变量可以利用场方程由基本未知量求得。通常选取位移为基本未知量，这样的求解方法称为位移法。只有少数边界非常规则的静力问题才能求得解析解，在一般情况下只能借助于有限元法等方法求得数值解。

有限元方程可以利用熟知的虚功原理来建立。设物体处于平衡状态，给物体内各点以任意的虚位移 $\delta\boldsymbol{u}$，它仅是坐标 x 的函数，同时在 S_u 上满足 $\delta\boldsymbol{u}=0$。根据虚功原理，外力在虚位移上所作的虚功等于因虚位移引起的虚应变能，即

$$\int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V = \int_V b_i\delta u_i\mathrm{d}V + \int_{S_p}\overline{p}_i\delta u_i\mathrm{d}S \tag{2-6}$$

虚功原理是力学中的一个普遍原理。它不仅可用于线弹性问题，而且可以用于非线性弹性及弹塑性等材料非线性问题。

第二节　弹性力学平面问题的有限元列式

有限元法将连续的求解域离散为一组单元的组合体，用在每个单元内假设的近似函数来分片地表示求解域上待求的未知（位移）场函数，从而使一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题，通过虚功原理建立弹性力学问题的有限元列式。本节以平面问题 3 节点三角形单元为例，讨论建立有限元求解方程的原理和步骤。

一、平面问题 3 节点三角形单元的插值函数

（一）单元的位移模式及插值函数

三角形单元对复杂边界有较强的适应能力，很容易将任意平面域用三角形单元进行离散化。此外，采用三角形单元也便于在计算过程中根据需要局部调整单元的疏密，因此三角形单元是最常用的单元。我们首先考虑最简单的 3 节点三角形单元。在一个单元中，每个节点有两个位移分量，如图 2－2 所示。节点 i 的位移用列向量记为

$$\boldsymbol{u}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \qquad (i,\ j,\ m)$$

上式中（i，j，m）表示其他节点的相应分量，可以按下标 i、j、m 的轮换得到。以下将经常采用这种记号。每个单元共有 3 个节点，6 个位移自由度，可表示为如下单元节点位移列阵

$$\boldsymbol{u}^e = [\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{u}_m^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = [u_i\ v_i\ u_j\ v_j\ u_m\ v_m]^{\mathrm{T}}$$

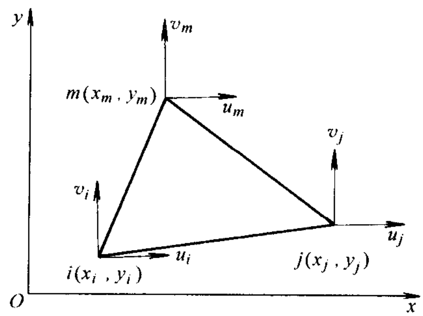

图 2－2　3 节点三角形单元

上式中，上标“T”表示转置。由于单元体本身也是一个二维的弹性体，单元内各点的位移分量是坐标 x、y 的函数，在进行有限元分析时，为了要用节点位移作为基本未知量，以便用单元节点位移表示单元内任意点的位移、应变和应力，需要假定一个位移模式进行位移的插值计算。有限元法中单元位移模式或位移函数一般采用多项式作为近似函数。3 节点三角形单元位移模式选取一次多项式

$$\begin{cases} u = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \ (1) \\ v = \beta_4 + \beta_5 x + \beta_6 y \ (2) \end{cases} \tag{2-7}$$

式中，$\beta_1 \sim \beta_6$ 是待定系数，称为广义坐标。分别将节点 i，j，m 的坐标和位移 u_i（i，j，m）代入式（2－7）（1）中得

$$\begin{cases} u_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 y_i \\ u_j = \beta_1 + \beta_2 x_j + \beta_3 y_j \\ u_m = \beta_1 + \beta_2 x_m + \beta_3 y_m \end{cases} \tag{2-8}$$

联立求解式（2－8）可得

$$\begin{cases} \beta_1 = \dfrac{1}{2A}\ (a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m) \\ \beta_2 = \dfrac{1}{2A}\ (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) \\ \beta_3 = \dfrac{1}{2A}\ (c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m) \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{vmatrix} = x_j y_m - x_m y_j \\ b_i = -\begin{vmatrix} 1 & y_j \\ 1 & y_m \end{vmatrix} = y_j - y_m \qquad (i,\ j,\ m) \\ c_i = \begin{vmatrix} 1 & x_j \\ 1 & x_m \end{vmatrix} = -x_j + x_m \end{cases} \tag{2-9}$$

$$2A=\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \tag{2-10}$$

从解析几何知，A 等于三角形 ijm 的面积。为了使求得面积的值不至于成为负值，节点局部编码 1，2，3（对应的整体编码为 i，j，m）应按逆时针方向排列，如图 2－2 中所示。

同理可求得 $\beta_4 \sim \beta_6$。将求得的广义坐标 $\beta_1 \sim \beta_6$ 代入式（2－7），可将位移模式写成

$$\begin{cases} u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ v = N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \end{cases} \tag{2-11}$$

其中

$$N_i = \frac{1}{2A}\ (a_i + b_i x + c_i y) \qquad (i,\ j,\ m) \tag{2-12}$$

N_i、N_j 和 N_m 是坐标的函数，它们反映单元的位移状态，因而称为形函数。将式（2－11）写成矩阵形式为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= [\boldsymbol{I}N_i \quad \boldsymbol{I}N_j \quad \boldsymbol{I}N_m] \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ \boldsymbol{u}_j \\ \boldsymbol{u}_m \end{Bmatrix} \\ &= [\boldsymbol{N}_i \quad \boldsymbol{N}_j \quad \boldsymbol{N}_m]\ \boldsymbol{u}^e = \boldsymbol{N}\boldsymbol{u}^e \end{aligned} \tag{2-13}$$

式中，$\boldsymbol{N}$ 为形函数矩阵；$\boldsymbol{I}$ 为二阶单位矩阵；$\boldsymbol{u}$ 为单元位移函数列阵；$\boldsymbol{u}^e$ 为单元节点位移列阵。

（二）形函数的性质和面积坐标

1．三角形单元的面积坐标

三角形 ijm 中任一点 P 与其三个角点相连形成三个子三角形，见图 2－3。我们以原三角形的边所对的角码来命名此三个子三角形的面积，如△Pjm 面积为 A_i。点 P 在三角形中的相对位置可表示为 $P(L_i,\ L_j,\ L_m)$，L_i，L_j，L_m 称为面积坐标，其中

$$L_i = \frac{A_i}{A} \qquad (i,\ j,\ m) \tag{2-14}$$

式中，A 为原三角形的面积。由于

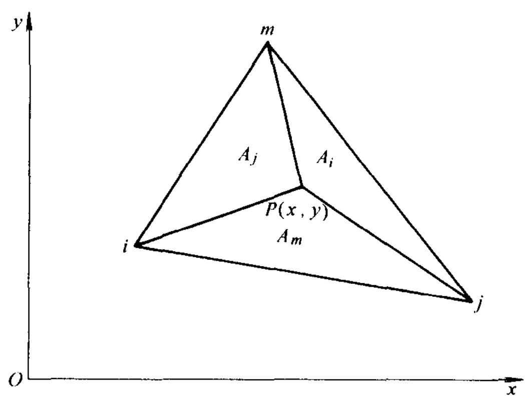

图 2－3　三角形单元的面积坐标