高等数学入门

Gaodeng Shuxue Rumen

王　文

青海人民出版社

高 等 数 学 入 门

王 文

青海人民出版社出版 青海省新华书店发行

人民交通出版社印刷厂制型 青海新华印刷厂印刷

开本：787×1092毫米1/32 印张：9.25 字数：203,000

1981年6月第1版 1981年6月第1次印刷

印数：1—8,500

统一书号：13097·41 定价：0.76元

目　　录

第一章　高 次 方 程

一、一元多项式

定义　称形如

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$的多项式为$x$的多项式，或一元多项式。其中$a_i\in k$、$n$为非负正数。

当$a_0\neq 0$时，称该多项式的次数为n。

显然，如果用函数的观点看多项式，那么，它就是多项式函数。所以，关于x的多项式可用$f(x)$、$g(x)$、$\varphi(x)$、$\psi(x)$等表示。$f(x)$的次数可记为$\deg f(x)$或$\partial(f(x))$。

初等数学中曾把多项式定义为“若干个单项式的代数和”。现在重新给出定义，是因为根据解高次方程的需要，我们必须进一步讨论一元多项式的代数性质。

定义　设$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$,

$$g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n,$$

当且仅当$a_i=b_i(i=0,1,2\cdots\cdots,n)$时，我们才称$f(x)$和$g(x)$相等，记为$f(x)=g(x)$。或叙述为$f(x)$和$g(x)$相等的充要条件为$a_i=b_i(i=0,1,2,\cdots\cdots,n)$。

二、多项式的加法与乘法

设　$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots a_{n-1}x+a_n$

$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_{m-1}x+b_m$$

由于在 $f(x)$ 或 $g(x)$ 中可以适当增加一些系数为零的项，因此在加法定义中，为叙述方便，可以假定 $\deg f(x)=\deg(x)$。

定义 多项式

$h(x)=C_0x^n+C_1x^{n-1}+\cdots\cdots+C_{n-1}x+C_n$ 称为多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和，其中 $C_i=a_i+b_i(i=0,1,2,\cdots\cdots,n)$，记为 $h(x)=f(x)+g(x)$。

定义 多项式

$d(x)=d_0x^{m+n}+d_1x^{m+n-1}+\cdots\cdots+d_{n+m-1}x+d_{n+m}$ 称为多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的乘积，其中 $d_s=\sum\limits_{i+j=s}a_ib_j(s=0,1,2,\cdots\cdots,n+m)$ 记为 $d(x)=f(x)\cdot g(x)$。

把 $g(x)$ 的每一项都变号后所得的多项式记为 $-g(x)$，那么，多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的差可定义为 $f(x)+[-g(x)]$，记为 $f(x)-g(x)$。

可以验证多项式的加法、乘法是满足通常所遇到的运算规律的。

例 已知 $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$，$g(x)=b_0x^2+b_1x+b_2$，试求它们的积的三次项的系数。

解：令 $f(x)\cdot g(x)=c_0x^5+c_1x^4+c_2x^3+c_3x^2+c_4x+c_5$，那么 $c_2=\sum\limits_{i+j=2}a_ib_j=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0$ 此即所求三次项的系数。

三、多项式的除法

1. 多项式的整除性

定义 设有两个多项式 $f(x)$、$g(x)$，它们的系数都属

于复数集 K（或属于实数集 R、有理数集 D），如果存在多项式 $h(x)$（其系数也属于相应的数集），使等式

$$f(x)=g(x)h(x)$$

成立，则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$，用 $g(x)\mid f(x)$ 表示。如果不存在使以上等式成立的 $h(x)$，则称 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$，记为 $g(x)\nmid f(x)$。

当 $g(x)$ 整除 $f(x)$ 时，称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的因式，称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的倍式。

2．带余除法

定理 设 $f(x)$、$g(x)$ 为系数属于 k（或 R）的两个多项式，其中 $g(x)\neq 0$，那么一定存在两个系数属于相应数集的多项式 $q(x)$、$r(x)$，使得

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$

成立，其中 $\deg r(x)<\deg g(x)$，或者 $r(x)=0$，并且这样的 $q(x)$、$r(x)$ 是唯一确定的。

关于 $q(x)$、$r(x)$ 的存在，可用归纳法证明；关于其唯一性的证明可用反证法（证明过程从略）。

$q(x)$ 称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的商，$r(x)$ 称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的余式。

例1． 已知 $f(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$，$g(x)=x^2-3x+1$，求 $q(x)$、$r(x)$。

解： 计算格式如下：

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -3x^3 & +4x^2 & -5x & +6 & x^2-3x+1 \\ \cline{6-6}
2x^4 & -6x^3 & +2x^2 & & & 2x^2+3x+11 \\ \cline{1-5}
 & 3x^3 & +2x^2 & -5x & +6 & \\
 & 3x^3 & -9x^2 & +3x & & \\ \cline{2-5}
 & & 11x^2 & -8x & +6 & \\
 & & 11x^2 & -33x & +11 & \\ \cline{3-5}
 & & & 25x & -5 &
\end{array}$$

得到 $q(x)=2x^2+3x+11$，$r(x)=25x-5$

即 $2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$

$$=(2x^2+3x+11)(x^2-3x+1)+25x-5。$$

上述算法还可以简化：(1)把多项式按 x 的降幂排列后，省去字母 x（对于处于中间系数为零的项应补上零）；(2)把除式按 x 的降幂排列后，省去字母 x，并把系数变号，这样就把每一次的减法运算变成了加法运算。

简化后，例 1 的计算格式如下：

$$
\begin{array}{rrrrr|rrr}
2 & -3 & +4 & -5 & +6 & -1 & +3 & -1 \\
\cline{6-8}
-2 & +6 & -2 & & & 2 & +3 & +11 \\
\hline
 & 3 & +2 & -5 & +6 & & & \\
 & -3 & +9 & -3 & & & & \\
\cline{2-5}
 & & 11 & -8 & +6 & & & \\
 & & -11 & +33 & -11 & & & \\
\cline{2-5}
 & & & 25 & -5 & & &
\end{array}
$$

仍得 $q(x)=2(x)^2+3x+11$，$r(x)=25x-5$。

以上方法，称为分离系数法。

如果除式是一次多项式 $x-a$，对于上述运算还可以进一步简化，这就是“综合除法”。

3. 综合除法

设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$，

$g(x)=x-a$，

那么由带余除法定理，得

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$
$$=(x-a)q(x)+r$$

其中 $q(x)$ 是 x 的 $n-1$ 次多项式，r 为一个数。可设

$q(x)=b_0x^{n-1}\ b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\cdots\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1}$，代入

右端，整理后，可得

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots\cdots + a_{n-1}x + a_n$$
$$= b_0x^n + (b_1 - ab_0)x^{n-1} + (b_2 - ab_1)x^{n-2} + \cdots\cdots$$
$$+ (b_{n-1} - ab_{n-2})x + (r - ab_{n-1})$$

根据多项式相等的条件，可得

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1 - ab_0, \quad a_2 = b_2 - ab_1, \quad \cdots\cdots,$$
$$a_{n-1} = b_{n-1} - ab_{n-2}, \quad a_n = r - ab_{n-1}$$
$$\therefore \quad b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1 + ab_0, \quad b_2 = a_2 + ab_1, \quad \cdots\cdots,$$
$$b_{n-1} = a_{n-1} + ab_{n-2}, \quad r = a_n + ab_{n-1}$$

我们的目的是求出 $q(x)$ 的各项的系数 b_0、b_1、b_2……、b_{n-1} 及余数 r，以上式子给了我们具体的求法。为简便计，这种求法还可以简化为如下形式：

$$\begin{array}{cccccc|c}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_{n-1} & a_n & a \\
 & +ab_0 & +ab_1 & & +ab_{n-2} & +ab_{n-1} & \\
\hline
a_0 & a_1+ab_0 & a_2+ab_1 & & a_{n-1}+ab_{n-2} & a_n+ab_{n-1} & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\
b_0 & b_1 & b_2 & & b_{n-1} & r &
\end{array}$$

象这样求 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得的商及余数的方法，叫做综合除法。

例2． 求 $f(x)=x^3+6x^2+11x+6$ 除以 $x+3$ 所得的商和余数。

解：

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & +6 & +11 & +6 & -3 \\
 & -3 & -9 & -6 & \\
\hline
1 & +3 & +2 & 0 &
\end{array}$$

$\therefore$ 商是 x^2+3x+2，余数是0。

例3． 试按 $x-2$ 的各次幂展开多项式 $f(x)=x^3+2x-5$。

解： 根据题意，需把 $f(x)$ 展开成如下形式：

$f(x)=p_3(x-2)^3+p_2(x-2)^2+p_1(x-2)+p_0$

问题在于，如何求出 p_0，p_1、p_2、p_3

$\because\quad f(x)=[p_3(x-2)^2+p_2(x-2)+p_1](x-2)+p_0$

$\therefore\quad f(x)$除以 $x-2$，得

商式 $q(x)=p_3(x-2)^2+p_2(x-2)+p_1$，余式 $r(x)=p_0$

同样地，$q(x)$除以 $x-2$，得

商式 $q_1(x)=p_3(x-2)+p_2$，余式 $r_1(x)=p_1$；

$q_1(x)$除以 $x-2$，得

商式$q_2(x)=p_3$，余式$r_2(x)=p_2$

通过连续进行综合除法可求得 p_0、p_1、p_2、p_3

其计算方法如下：

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & +2 & -5 & 2 \\
 & 2 & +4 & +12 & \\
\hline
1 & +2 & +6 & +7 & 2 \\
 & +2 & +8 & & \\
\hline
1 & +4 & +14 & & 2 \\
 & +2 & & & \\
\hline
1 & +6 & & &
\end{array}$$

$\therefore\quad p_0=7,\ \ p_1=14,\ \ p_2=6,\ \ p_3=1$

$\therefore\quad f(x)=(x-2)^3+6(x-2)^2+14(x-2)+7$。

例4. 求 $f(x)=4x^3-5x^2+6x+3$除以$4x+3$所得的商。

解: $$\frac{4x^3-5x^2+6x+3}{4x+3}=\frac{1}{4}\times\frac{4x^3-5x^2+6x+3}{x+\dfrac{3}{4}}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
4 & -5 & +6 & +3 & -\dfrac{3}{4} \\
 & -3 & +6 & -9 & \\
\hline
4 & -8 & +12 & -6 &
\end{array}$$

$\therefore\quad q_1(x)=4x^2-8x+12,\ \ r_1(x)=-6$

$$\therefore\quad \frac{4x^3-5x^2+6x+3}{4x+3}=\frac{4x^2-8x+12}{4}+\frac{-6}{4x+3}$$

$\therefore \quad q(x)=x^2-2x+3, \quad r(x)=r_1(x)=-6$

一般地，如果 $f(x)$ 除以 $ax-b$，可用 $f(x)$ 除以 $x-\dfrac{b}{a}$，把所得商式除以 a，而所得余数为所求余数。

4. 余数定理

定理 多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$，所得的余数 $r=f(a)$。

证明： 由带余除法定理，得

$$f(x)=(x-a)q(x)+r$$

$$\therefore \quad f(a)=(a-a)q(a)+r$$

$$\therefore \quad r=f(a)$$

结合多项式整除的概念，可得出如下定理。

定理 含 x 的多项式 $f(x)$ 能被 $x-a$ 整除的充要条件是 $f(a)=0$。

证明： 先证明充分性：

在 $f(x)=q(x)(x-a)+r$ 中，

$\because \quad f(a)=0 \qquad \therefore \quad r=0$。

$\therefore \quad f(x)=q(x)(x-a)$ 即 $f(x)$ 能被 $x-a$ 整除。

再证必要性：

$\because \quad f(x)$ 能被 $x-a$ 整除 $\qquad \therefore \quad f(x)=q(x)(x-a)$

$\therefore \quad f(a)=q(a)(a-a)=0 \qquad$ 即 $\quad r=f(a)=0$

四、多项式的标准分解式

定义 如果当 $x=a$ 时，$f(x)$ 的值是0，则称 a 是多项式 $f(x)$ 的根。

代数基本定理： 每个次数大于或等于 1 的复系数多项式，在复数集中至少有一个根。

在目前的知识范围内，我们只能承认它，还不能证明

它。

$f(a)=0$ 是 $f(x)$ 能被 $x-a$ 整除的充要条件。显然，$f(a)=0$ 也是 $f(x)$ 含有因式 $x-a$ 的充要条件。

根据代数基本定理，结合 $f(x)$ 含有因式 $x-a$ 的充要条件，不难证明如下定理：

设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 为任意一个关于 x 的 n 次多项式，那么，它必定可以表示成 n 个一次因式的乘积。即

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_n)$$

其中，并不要求 x_1、x_2、……、x_n 各不相同。设这 n 个数中有 k_1 个 x_1、k_2 个 x_2、……、k_j 个 x_j，$k_1+k_2+\cdots\cdots+k_j=n$，那么

$$f(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots\cdots(x-x_j)^{k_j}$$

这个多项式，叫做多项式 $f(x)$ 的标准分解式，

其中 $(x-x_i)^{k_i}$，当 $k_i>1$ 时，称为 $f(x)$ 的 k_i 重因式；当 $k_i=1$ 时，称为 $f(x)$ 的单因式，相应地，x_i 称为 $f(x)$ 的 k_i 重根、单根。

由此，不难得出如下定理：

多项式根的个数定理：n 次多项式 $f(x)$ 有、并且只有 n 个根。这里 k_i 重根应以 k_i 个根计算。

以上一些定理都是在复数集范围内讨论的，在实数集 R、有理数集 D 内就会有不同的情况。因此，讨论多项式的因式分解，确定多项式的根，都必须弄清楚是在哪个数集范围里。例如，$f(x)=x^2+4$，在实数范围里不能分解，或称其为不可约多项式，因而也没有根；而在复数范围里，它是可以分解的，或称为是可约的。$x^2+4=(x-2i)(x-2i)$，因

而 $f(x)$ 也有两个根 $x_1=-2i$，$x_2=2i$。

五、用辗转相除法求最高公因式

定义 如设 $\varphi(x)$、$f(x)$、$g(x)$ 都是系数在复数集 k（或实数集 R、有理数集 D）上的多项式。如果 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的因式，又是 $g(x)$ 的因式，则称 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式。

定义 设 $f(x)$、$g(x)$ 是系数在复数集 k（或 D、R）上的两个多项式（且不全为零）。如果系数在相应数集上的多项式 $d(x)$ 满足（1）$d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式，（2）$f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式全是 $d(x)$ 的因式，则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最高公因式。

例如，$f(x)=(x^2-4)(x+3)^2$，$g(x)=(x-2)^2(x+3)$，那么，它们的最高公因式 $d(x)=C(x-2)(x+3)$，其中 C 为相应数集中的非零常数。

由此可以看出，两个多项式的最高公因式，在首项系数没有特殊规定的情况下，不是唯一的。一般地，有如下定理：

对于系数在数集 k（或 D、R）上的任意两个不全为零的多项式，它们一定存在最高公因式；在可以相差一个非零常数倍的意义下是唯一确定的。

我们约定，最高公因式总是指首项系数是 1 的那一个。在这种约定下，最高公因式就唯一确定了。多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的唯一确定的最高公因式用 $[f(x), g(x)]$ 表示。求任意两个多项式的最高公因式，一般用辗转相除法。

例 设 $f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3$，$g(x)=3x^3+10x^2+2x-3$，求 $d(x)=[f(x), g(x)]$。

解：用辗转相除法，其格式如下：

	$g(x)$	$f(x)$	
$3x-5$	$3x^3+10x^2+2x-3$	$x^4+3x^3-x^2-4x-3$	$\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}=q_1(x)$
$=q_2(x)$	$3x^3+15x^2+18x$	$x^4+\frac{10}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2-x$	
	$-5x^2-16x-3$	$-\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x^2-3x-3$	
	$-5x^2-25x-30$	$-\frac{1}{3}x^3-\frac{10}{9}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{1}{3}$	
（提出公因数9）	$9x+27$	$-\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3}$	（提出公因数 $-\frac{5}{9}$）
	$r_2(x)=x+3$	$r_1(x)=x^2+5x+6$	$x+2=q_3(x)$
		x^2+3x	
		$2x+6$	
		$2x+6$	
		0	

$r_2(x)$是最后一余式，且$r_2(x)\mid r_1(x)$，故$d(x)=r_2(x)=x+3$。

六、一元 n 次方程

设 $f(x)$ 为关于 x 的 n 次多项式，那么，$f(x)=0$，即 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$，构成为一个一元 n 次方程。当 $n>2$时，称其为高次方程。

由多项式 $f(x)$的根的定义及方程的根的定义可知，$f(x)$的根与 $f(x)=0$的根完全一样。多项式 $f(x)$的每个一次因式的根，都是方程 $f(x)=0$的根。除此之外，方程 $f(x)=0$ 再无其它的根。

由多项式的根的个数定理可以得出：一元n次方程$f(x)=0$有且仅有 n 个根。这里，多项式 $f(x)$ 的 k 重根也是方程 $f(x)=0$的 k 重根。在谈根的个数时，应视为 k 个根。

方程 $f(x)=0$有 k 重根，就是多项式 $f(x)$有 k 重因式。由此可以得出：

方程 $f(x)=0$有 k 重根 a 的充要条件是 $(x-a)^k\mid f(x)$，但 $(x-a)^{k+1}\nmid f(x)$。

例1.已知方程 $f(x)=x^3+8x^2+5x-50=0$，（1）求证 -5 是该方程的二重根；（2）求这个方程的另一个根。

（1）证明：

$$\because\quad \begin{array}{rrrr|l} 1 & +8 & +5 & -50 & -5 \\ & -5 & -15 & +50 & \\ \hline 1 & +3 & -10 & +0 & r_1=0 \\ & -5 & +10 & & \\ \hline 1 & -2 & +0 & & r_2=0 \\ & -5 & & & \\ \hline 1 & -7 & & & r_3\neq 0 \end{array}$$

$\therefore \quad (x+5)^2 \mid f(x)$，$(x+5)^3 \nmid f(x)$。

$\therefore \quad -5$是 $f(x)=0$ 的二重根。

（2）解：

通过（1）中综合除法的运算过程可以看出，原方程可变形为$(x+5)^2(x-2)=0$，故原方程的另一个根为2。

例2. 已知方程 $f(x)=2x^4-11x^3+18x^2-ax-2a=0$ 有三重根2。

（1）求 a 的值；

（2）解这个方程。

解：（1） $\because$ 2是 $f(x)=0$的根，

$\therefore \quad f(2)=0$，

即 $\quad 16-4a=0$，

$\therefore \quad a=4$。

（2）把 $a=4$ 代入原方程，得 $2x^4-11x^3+18x^2-4x-8=0$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2 & -11 & +18 & -4 & -8 & 2 \\
 & 4 & -14 & +8 & +8 & \\
\hline
2 & -7 & +4 & +4 & +0 & \\
 & 4 & -6 & -4 & & \\
\hline
2 & -3 & -2 & +0 & & \\
 & 4 & +2 & & & \\
\hline
2 & +1 & +0 & & &
\end{array}
$$

$\therefore \quad f(x)=(x-2)^3(2x+1)$

$\therefore \quad x_1=x_2=x_3=2$，$x_4=-\dfrac{1}{2}$。