初等数学日日谈

顾可敬编

上海翻译出版公司

“百年星期历”使用说明

使用方法　若要知道哪天是星期几，那么先查月、日和月、日相交的字，再找年里那行相同的字，由下向上看到顶，就知是星期几.

实　例　(1)1985年10月1日是星期几？先查左栏第四横格的“十”，上栏第一竖格的“1”和十、1相交的“碧”字，再找右栏第五栏横格“85”左面的“碧”字，由下向上看到顶，便知1985年10月1日是星期二.

(2)1988年1月28日是星期几？因为1988是4的倍数，所以该年是闰年. 因此要查左栏第五横格的“闰年一月”，上栏第七竖格的“28”和它们相交的“远”字. 再找右栏第二横格“88”左面的“远”字，由下向上看到顶，便知1988年1月28日是星期四.

注意事项　在查月份时，要对一月与二月区分出是平年的一、二月还是闰年的一、二月(黑体)，其它月份则不必区分. 右栏中的黑体数字表示是闰年。

“百年星期历”原理说明

(1)只要知道一年中某一天，譬如说3月1日，是星期几，以及该年是平年或闰年，便可推算出该年每月1日是星期几，从而也就知道此年每月每日的星期数．这是因为月、日的星期数是以7循环的，一旦知道某年中某月某日是星期几，那么只要再知道另外一日与该日的间隔天数，便可确定出另外一天是星期几．具体的内容请见表一．

在以上推算中要用到：$31\equiv3(\mathrm{mod}7)^*$，$30\equiv2(\mathrm{mod}7)$，$28\equiv0(\mathrm{mod}7)$，$29\equiv1(\mathrm{mod}7)$．将表一中1日的星期数相同的月份进行归类，便得到表二．

这样假定3月1日是星期W后便可得到全年中每天的相对星期数，这也是用本历表时查月、日和月、日交会的字的用意和机理．

*≡表示同余，即≡号左、右的两个数字用7除后的余数相同，如$8\equiv1(\mathrm{mod}7)$，$9\equiv2(\mathrm{mod}7)$，$7\equiv0(\mathrm{mod}7)$，$-3\equiv-4(\mathrm{mod}7)$，$-1\equiv6(\mathrm{mod}7)$．关于同余运算的一些性质可参见一般初等数论的书籍．

黄鹤楼送孟浩然之广陵

李白

故人西辞黄鹤楼
烟花三月下扬州
孤帆远影碧空尽
惟见长江天际流

(2)余下的是只要确定每年的3月1日具体是星期几．而一般如果Y年3月1日是星期V，那么

表 一

每月1日		1月1日	2月1日	3月1日	4月1日	5月1日	6月1日	7月1日	8月1日	9月1日	10月1日	11月1日	12月1日
星期数	平年	W+4	W	W	W+3	W+5	W+1	W+3	W+6	W+2	W+4	W	W+2
	闰年	W+3	W+6										

表 二

星期数	W	W+1	W+2	W+3	W+4	W+5	W+6
代用字	孤	帆	远	影	碧	空	尽
1日的星期数相同的月份	二、三、十一	六	九、十二	四、七、闰年一月	一、十	五	八、闰二月

$$(Y+1)\text{年3月1日的星期数} \equiv \begin{cases} V+1, & \text{当}(Y+1)\text{年是平年}, \\ V+2, & \text{当}(Y+1)\text{年是闰年}. \end{cases}$$

那是因为$365\equiv 1(\mathrm{mod}\,7)$，$366\equiv 2(\mathrm{mod}\,7)$之故．再因为现行使用的公历，其历法为四年一闰，逢百年不闰，逢四百年又闰．而1943年3月1日是星期一，所以根据本历表中“孤”字在各行的位置，就决定了历表中右栏所有年份数的填入位置．（注意公元2000年是闰年，而公元1900年与2100年均不是闰年，所以历表右栏中四年一串再空一格的填法，只能在公元1900年至2099年之间适用！）这样我们便可从所查年份同行的“孤”字由下向上看，便得到了该年3月1日是具体星期几．

(3)有了某月某日相对于该年3月1日的相对星期数（即由日、月找字）以及该年3月1日的具体星期数（即由年、字找星期），便可得到该年某月某日具体是星期几．这便是查“百年星期历”表的全部过程和该历表的制作机理．

年、月、日 关于星期的一些变化规律

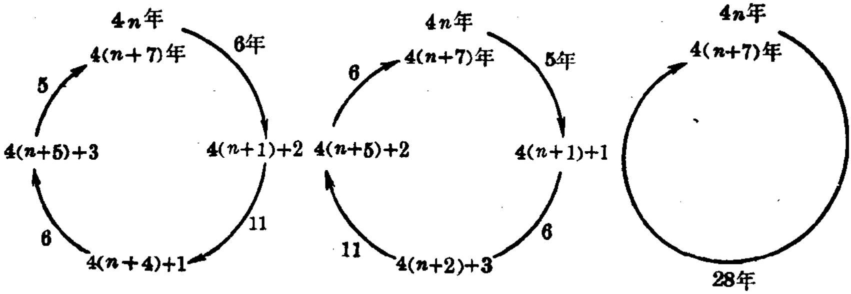
（在公元1901～2099年间适用）

（1）“今年5月4日是星期六，还有哪些年的5月4日也是星期六？”这一类问题的一般答案是：

当月份、日期数是3月1日至12月31日间的某一天时，同星期数的年份按以下规律分布：

当月份、日期数是1月1日至2月28日间的某一天时，同星期数的年份按以下规律分布：

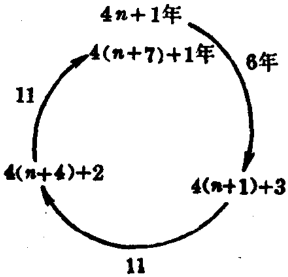
2月29日的同星期数的年份按以下规律分布：

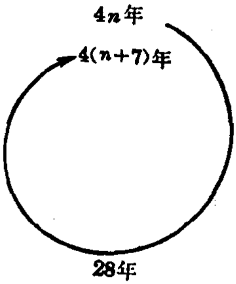


从中还可以看出：只要相隔28年，同月份、日期数的星期数一定是相同的.

（2）如果某年（按月排出）的星期历（即一般年历）只要更改年名后，就成为另一年的年历（如1974年与1985年，1956年与1984年），便称这两年的年历是同一类型的，总共有14种类型的年历．而且根据（1）可知，具有同类型年历的年份按以下规律分布：

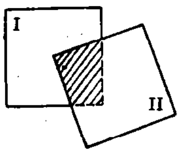
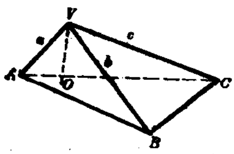
平年　　　　　　　　　　闰年

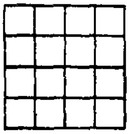




(3)如果从某年(Y年)起(包括这一年),将每年的年历都收存,那么经V年后把所有类型的年历都收齐了,Y和V有以下的关系:

Y	4n	4n+1	4n+2	4n+3
V	25	28	27	26

$(1+3+5+7+9)\cdot 5^2\cdot 111=69375$	一个三位数其各位数字均是奇数. 求所有这些三位数的和
24个　18个	由 1、9、8、5 组成而没有重复的四位数共有几个? 比 1985 大的有几个?
$p\neq 1$ 时前者大	若 $p>0$, p^p 与 $\left(\frac{1}{p}\right)^{-\frac{1}{p}}$ 哪个大?
	 有一样大小的两个正方形 I 和 II .证明:当II绕I的中心转动时, 其重叠部份的面积恒为正方形面积的 1/4
等边 Δ	ΔABC 中, 已知$tg^2A+tg^2B+tg^2C=9$, $tgA\ tgB\ tgC=3\sqrt{3}$, 问: 这是一个怎样的Δ?
$\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$	 $\angle AVB=\angle BVC=\angle CVA=90°$, 求高 $VO=?$
6	求最小的那个与 150 相乘后其积成为平方数的数

-21	在 $\left(a-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^7$ 的展开式中, $a^{-\frac{1}{2}}$ 项的系数是多少?
$k<-3-2\sqrt{2}$ 或 $k>-3+2\sqrt{2}$	k取什么实数值时, 方程 $x=k(x-1)(x-2)$ 有实根?
	 对左面的 16 个小方格, 如果只有其中的 6 个着色, 证明: 至少有一矩形, 其四角未被着色
n为偶数	自然数 n 取何种数值时, $20^n+16^n-3^n-1$ 能被 323 除尽?
	若 a、b、c 是直角 Δ 的勾、股、弦, 证明: 当 $n\geqslant 2$ 时, $a^n+b^n\leqslant c^n$
	若 A、B、C 是正实数, 而且 $A^2-B=C^2$, 则 $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{2}}$
13	$a=6^{85}+8^{85}-1$. 求 a 被 49 除后所得的余数

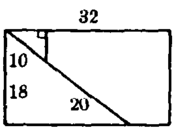
	证明: $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1$
-2	$\dfrac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}-\dfrac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}=?$
$\sqrt{10}$	化简 $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$
$1+\sqrt{2}$	化简 $\sqrt{2+\sqrt{3+2\sqrt{5+12\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}}$
	证明: $\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$\sqrt{R^2+\dfrac{Ra}{2}}-\sqrt{R^2-\dfrac{Ra}{2}}$	化简 $\sqrt{R(2R-\sqrt{4R^2-a^2})}$
20	方程 $19x+85y=1985$ 有解 $(x,y)=(100,1)$. 求此方程的另一组正整数解. 此解的 $y=?$

	证明：方程 $x^4-8x^2+9=0$ 的四个根是 $\pm\sqrt{\frac{7}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$
$\sqrt{2(x+\lvert x-2\rvert)}$	化简 $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$，其中 $x\geqslant 1$
4	化简 $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$
$-\sqrt[3]{2}$	化简 $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}$
一元二次方程	谜面：坐汽车，五角钱一趟（打代数名词一）
$(2^{100}-1)x+(2-2^{100})$	求 x^{100} 除以 x^2-3x+2 后所得的余式
27	用字母集合 {E, F, N, W} 来代替数字集合 {1,9,8,5}，问：当使 FEW+NEW+WEN 为最大值时，$W\cdot(N-F)\cdot E=?$

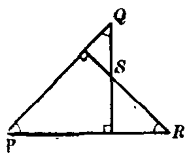
2.4 元	有甲、乙两堆糖果, 甲堆糖果每斤 2 元, 乙堆糖果每斤 3 元, 而此两堆糖果的价值相同. 问: 混合后每斤多少元?
$\lg a$	$a>1$, 问: $a^{\frac{\lg \lg a}{\lg a}}=?$
26	一个等腰Δ腰的中线为 $3\sqrt{41}$, 底边的高为 24. 问: 腰长多少?
是	如果 $\frac{a}{b}$ 是既约分数, 那么 $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$ 是不是既约分数?为什么?
0	如果 z 满足 $z^2+z+1=0$, 问: $z^{333}+z^{35}+z=?$
0	求 $\lg tg1°+\lg tg2°+\cdots\cdots+\lg tg88°+\lg tg89°$ 之值
3	下一世纪中二月三日是星期天的最早一年是 $(2000+n-1)$ 年. 问: $n=?$

24	数 360 有多少个约数?
	证明: 如一整数的各位数字之和可被 3 除尽, 则该数可被 3 除尽
	证明: 如一整数的末尾两位数可被 4 除尽, 则该数可被 4 除尽
	证明: 如一整数的末尾三位数可被8除尽, 则该数可被 8 除尽
	证明: 若一整数的各位数字之和可被 9 除尽, 则该数可被 9 除尽
	证明: 若一整数, 其奇数位数字之和与其偶数位数字之和的差可被 11 除尽, 则该数可被 11 除尽
10	x,y 是自然数, 满足 $x+y+xy=34$. 问: $x+y=?$

	证明: 若一整数, 除去个位数后得一数, 该数与个位数两倍的差可被 7 除尽, 则原数可被 7 除尽
	反复运用前题中的原则, 说明 864192 可被 7 除尽
2	有一个五位数 6789*, 问: 要在 * 的位上放什么数, 此五位数便是 11 的倍数?
□□ =24	62□□427 是 99 的倍数. 请填出空缺的数字
	n 为自然数, 证明: $1492^n-1770^n-1863^n+2141^n$ 始终是 1946 的倍数
abcd = 1089	求四位数 abcd, 使 abcd × 9 = dcba
17	函数 $f(x)=ax^7+bx^3+cx-5$, 其中 a、b、c 是常数, 有 $f(7)=7$, 问: $-f(-7)=?$

$\overline{abcd}=2178$	求四位数 $\overline{abcd}$, 使 $\overline{abcd}\times 4=\overline{dcba}$
$\overline{abcde}=42857$	求六位数 $\overline{1abcde}$, 使 $\overline{1abcde}\times 3=\overline{abcde1}$
$\overline{aabb}=7744$	求四位的平方数 $\overline{aabb}$
	利用关系式 $111111=1001\times 111$, 说明 $7\times 15873=111111=91\times 1221$
	利用关系式 $111111111111=1000001\times 1001\times 111$, 说明 $900991\times 123321=111111111111$
	a 为自然数, 且 $1\leqslant a\leqslant 9$. 证明: $12345679\times 9\times a=\overline{aaaaaaaaa}$
24	 请将左图中的三块图形拼成一个正方形. 其边长 $a=?$

	k 是自然数, 且 $1 \leqslant k \leqslant 9$. 证明: $123 \cdots k \times 9+(k+1)=11 \cdots 1$
	证明: $\sqrt{\underbrace{111 \cdots 111}_{2n位}-\underbrace{22 \cdots 22}_{n位}}=\underbrace{33 \cdots 33}_{n位}$
	证明: 任何一个三位数, 数字倒转后得另一数,将其大者减掉小者得差数, 再将差数数字倒转并与差数相加, 其和必为 1089
	验证: $3529411764705882 \times 2 \div 3 = 2352941176470588$
	从 $1/7=0.\dot{1}4285\dot{7}$, 说明 $142857 \times 7+1=10^6$
$(\overbrace{11 \cdots 1}^{n位}0-n)/9$	$1+11+111+\cdots+\underbrace{111 \cdots 111}_{n位}=?$
3	$x_1=3^{75}$, $x_2=2^{100}$, $x_3=5^{50}$, 上述三数中大小居中的是 X_n. 问 $n=?$

	证明：四个连续整数的乘积一定可以被 2^3 除尽
	证明：n 个连续整数的乘积一定可以被 n 除尽
	利用前两题，证明：多项式 $x^9-6x^7+9x^5-4x^3$ 当 x 为整数时一定可被 8640 除尽
	n 为自然数，证明：n^3-n 必能被 3 除尽
	证明：当 n 为非负整数时，$7^{n+2}+8^{2n+1}$ 可被 57 除尽
58	求具有性质：除 3 余 1，除 4 余2，除 5 余 3，除 6 余 4 的最小自然数
10	 $\angle P=\angle Q=\angle R=45°$，$PS=10$，问：$QR=?$