高等学校函授教材
(兼作高等教育自学用书)

线性代数

彭旭麟 编

L

高等教育出版社

高等学校函授教材

（兼作高等教育自学用书）

线性代数

彭旭麟 编

高等教育出版社

内容提要

本书是根据1981年12月教育部审订的高等工业学校《工程数学函授教学大纲(草案)》编写的.

全书共分五章,包括行列式,矩阵,线性方程组,实二次型,线性空间与线性变换.

每章开头有学习要点,指出该章的主要内容.每章之末有小结,包括该章的基本内容与基本要求,学习方法,解题方法的指导,也谈到相关内容的对比,联系与区别.

本书还安排了适量的思考题,练习题,综合习题及阶段测验题.这些题大都给了答案,较难的题还给了提示,便于读者复习和自我检查.

本书在教材编排上循序渐进,由浅入深,讲解清楚,层次分明,语言流畅,通俗易懂.在教材处理上也注意到各专业的不同需要,作了适当的安排.另外,除在正文中有例题外,在小结后的演题示例中,还安排了适量的例题,它们对阐明基本概念,帮助理解重点内容,培养解题技能等方面会起好的作用.

本书可作为高等工业学校函授教材兼作高等教育自学用书.

高等学校函授教材

(兼作高等教育自学用书)

线性代数

彭旭麟 编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 6.75 字数 162,000

1985年3月第1版 1985年3月第1次印刷

印数 00,001—26,250

书号 13010·0989 定价 1.40 元

前　言

本书是根据1981年12月教育部审订的高等工科学校《工程数学函授教学大纲(草案)》编写的.

1982年12月在武汉召开了《线性代数》初稿审稿会议，与会代表认真审阅了全稿，并就稿中的结构、选材和文字叙述提出了十分中肯的意见. 在此基础上编者又对全稿作了全面的修改. 谨此向戴昌国(主审，南京工学院)、钱文侠(北京钢铁学院)、杨绮玉(上海交通大学)、曹德镳(中南矿冶学院)、周笑明(哈尔滨建筑工程学院)、王心介(华中工学院)等同志表示衷心感谢.

由于水平有限，书中的缺点和错误在所难免，希望读者提出宝贵意见，以便进一步修改.

彭旭麟

1983年8月

说　明

线性关系是数量之间比较简单的一种关系，这种关系主要由加法和数乘来表现．在解析几何中，直线和平面是比较简单的图形，其坐标变量之间就存在线性关系．有些力学量之间也存在这种关系，如作用于一点的合力为所有作用于该点诸力的矢量和．

有些本来不属于线性关系的量，为了便于研究，也常常用“以直代曲”的办法求其解决．如在局部区域以微分代替增量，就是在容许误差范围内用增量的线性主部代替增量．这种处理问题的方法几乎渗透到各个科学技术领域．例如大量的工程实际问题的研究和计算通过某种线性化以后，最终常常归结到求解线性方程组．这就促使我们对于具有线性关系的代数量进行必要的考察和研究．线性代数就是研究这类数量及其关系的一门课程．目前，线性代数已成为高等工科院校数学课程中的基本内容之一，也为其他有关课程提供了必要的准备知识．

全书分五章．第一章行列式，它是后继各章的预备知识，内容偏重于计算．如果读者已在中学数学或高等数学中学习过这些内容，就可把这一章作为复习材料．

第二章矩阵是全书的重点，其中包括矩阵概念、矩阵运算、逆矩阵、矩阵的秩和初等变换、初等阵．这些内容都是基本的，要求读者很好掌握．

第三章是线性方程组，讨论了线性方程组的相容性，方程组的求解与解的结构，为了研究解的结构，引入了矢量组的线性相关性及其判别准则．

第四章是实二次型．介绍了二次型的化简和定号二次型及其

判别准则.

第五章是线性空间与线性变换. 前三节介绍了线性空间的定义、性质、线性空间的基与维和矢量在有序基下的坐标. 接着介绍了线性空间上的线性变换及其矩阵表示. 最后, 在§6介绍了矩阵的特征问题.

根据我们试用的情况,30学时左右可以讲授全部内容. 对于那些不准备讲授线性空间和线性变换的专业, 可讲授第一章至第四章,加上第五章§6(略去小字部分),这些内容可以自成体系.

每一章有学习要点、正文、小结及演题示例,综合习题等部分. 学习要点中列出了本章重点内容, 促请读者注意. 在正文中穿插了若干练习题和思考题,要求读者尽早完成,至少也要看懂它的含义,因为有些证明题的结论是随后就要用到的.

在学完每一章以后,建议读者根据自己对学习内容的理解,系统地进行小结,把本章的重要概念、主要定理、基本演算方法及注意事项加以整理. 至于本书每章后面的小结在这方面只能起到辅助作用. 演题示例主要用于介绍演算技巧和证题方法, 有的题难度较大,供读者选读.

附于每章末尾的综合习题当然是应该完成的 (个别难题除外). 但必须在学好课文的基础上才动手做题,否则便发挥不了巩固、提高的作用.

习题一般都附有答案或提示,主要供读者完成作业后校核,切忌不求甚解只凑答案的作法. 为了便于自我检查, 还安排了两次测验作业,要求每次在150分钟左右完成.

学习线性代数和学习微积分的方法不尽相同. 因为线性代数中的定义多,论证多,演题技巧性强,内容较抽象. 因此,在学习线性代数时,既要注意演算,更要耐心搞懂有关定义. 针对不同学科的特点采取相应的学习方法,常可收到事半功倍之效.

目　录

第一章　行　列　式

[学习要点]

1　行列式的定义、性质

2　行列式的计算

3　克莱姆法则

§1　二阶及三阶行列式

在中学数学中，我们已经遇到形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

的符号，叫做**二阶行列式**．在那里把二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$

的解 x_1, x_2 写成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

其中

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12}, \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1.$$

同样，三元线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\
a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3
\end{cases}
\tag{2}
$$

的解可借助于三阶行列式表示如下:

$$
x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}},\quad
x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}},
$$

$$
x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}},
\tag{3}
$$

其中

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}
$$

$$
+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}, \tag{4}
$$

$$
\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=b_1a_{22}a_{33}-b_1a_{32}a_{23}+b_2a_{32}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}
$$

$$
+b_3a_{12}a_{23}-b_3a_{22}a_{13},
$$

……………………………………………………

我们把形如

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad
\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}
$$

的符号叫做**三阶行列式**.

将方程组 (2) 的解用 (3) 来表示，一方面它给出了便于记忆的形式，另一方面我们将要看到，行列式作为一个工具在讨论线性方程组时所起的作用.

我们称(3)式右边的分母行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

为方程组(2)的**系数行列式**(横的叫行，竖的叫列). 这个行列式的元素 $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ 是把方程组的系数按顺序分成三行三列写出来的.

至于(3)式右端的三个分子行列式，它们是用方程组(2)右端项的三个数分别替换系数行列式中的第 1 列、第 2 列、第 3 列构成的.

三阶行列式可以利用下面的式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

进行计算. 这只要利用二阶行列式的(1)式算出(5)式的右边，然后再与(4)式比较就可证实.

因此，由(1)式定义了二阶行列式以后，我们便可以利用二阶行列式按(5)式来定义三阶行列式.

练习题 1 将下列方程组的待求量用行列式写出来(不必计算).

1) $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ 5x+2y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ x+y-6z=0 \\ 4x-y+z=6. \end{cases}$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} \quad \frac{4}{19} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} \quad \frac{2}{19}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}} \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}}$$

§2 行列式的性质

下面讨论三阶行列式的性质.

性质 1 行列式的行与列互换,行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

证 只要把(6)式的左右两边分别按(4)式展开, 然后进行比较便得证.

由行与列互换形成的新行列式叫做原行列式的**转置行列式**. 如(6)式右端那个行列式就是左端行列式的转置行列式; 同样, 左端那个行列式也是右端行列式的转置行列式.

如果将某一行列式简记为 D, 则它的转置行列式就记为 D'. 比如, 记

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad 则 \quad D'=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

于是, 性质 1 又可写成: 转置行列式与原行列式等值.

根据这一性质, 对行列式的行所具有的性质, 对列也成立; 反之, 对于列成立的性质对于行也成立.

性质 2 将行列式的两列(或两行)互换位置后, 行列式的值改变符号.

证 设将行列式的第 1 列和第 2 列互换, 则互换后的新行列式

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21}a_{33}-a_{12}a_{23}a_{31}+a_{22}a_{31}a_{13}$$

$$-a_{22}a_{11}a_{33}+a_{32}a_{11}a_{23}-a_{32}a_{21}a_{13}.$$

与(4)式比较，知结论正确．互换其他两列(或两行)的结果与此相同．

从以上性质可以给出以下推论．

推论 1 如果行列式有两列(或两行)相同，则行列式的值为零．

证 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix},$$

将 D 的第 1、2 两列互换后的行列式显然仍是 D．但据性质 2，互换后的行列式与原行列式异号，故 $D=-D$，移项得 $2D=0$，即 $D=0$．

性质 3 如果行列式一列(或一行)的元素有公因子 k，则公因子 k 可以移到行列式外相乘，即

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

证 只需把(7)式两边按(4)式写出，即知结论成立． → 性质 4

练习题 2 如果行列式两列的元素成比例（即一列元素为另一列元素的某倍数），则行列式的值为零．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0.$$

在讲性质 4 之前，请先注意如下等式：

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

证 按定义

$$\text{左边}=(a_{11}+a'_{11})\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-(a_{21}+a'_{21})\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

如果行列式的某一行(或列)的元素都是两个数的和，那么这个行列式的值等于两个行列式的和 343663

证明由此式

$$+(a_{31}+a'_{31})\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$+a'_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a'_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a'_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\text{右边}.$$

练习题 3 验明以下等式

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12}+a'_{12} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22}+a'_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}.$$

性质 4 给行列式一列(行)的元素加上另一列(行)相应元素的某倍数，所形成的新行列式与原行列式等值.

可以简化行列式

证 不失一般性，设在行列式第 1 列的元素上加上第 2 列相应元素的 k 倍，得

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+0$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

我们曾经说过，三阶行列式可以利用二阶行列式按(5)式来定

义．这就是说，一个三阶行列式可以按第 1 列展开，成为第 1 列元素与若干个二阶行列式乘积之和．但有了性质 2 以后，我们就不必拘泥于按第 1 列来展开，因为任一列经过互换，改变符号以后都可以变为第 1 列．另外，根据行与列互换的性质 1，则不按列而改为按行展开也是可以的．如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{转置}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

后一等式之所以成立乃是由于对三个二阶行列式也作了转置．

综合上述，我们可以归纳到下面将要证明的一个命题（性质 5）．为便于表述，先介绍两个名词和相应的符号．

(i) 元素 a_{ij} 的余子式

a_{ij} 表示行列式第 i 行第 j 列的元素．所谓 a_{ij} 的**余子式**就是划去行列式中以 a_{ij} 为交叉点的第 i 行和第 j 列所有元素以后剩下的低一阶的行列式．

例 1 对于三阶行列式

行列式的展开性质：行列式等于它的任意一列的各元素与其对应的代数余子式乘积之和

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots\cdots + a_{in}A_{in}$

来说，划去 D 中以 a_{11} 为交叉点的第 1 行和第 1 列：

或 $D = a_{1j}A_{1j} + \cdots\cdots + a_{nj}A_{nj}$ 。

A_{ij} 表示余子式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论：行列式任意一行(或列)的各元素与另一行(或列)对应元素的代数余子式之和等于0.

即 $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0$ $(i\neq j)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

剩下的二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ 当 $i=j$ 时上式为 D

便是 D 中对应于元素 a_{11} 的余子式.

同样，从 D 中划去以 a_{23} 为交叉点的第 2 行和第 3 列：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

剩下的二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

便是对应于元素 a_{23} 的余子式.

(ii) 元素 a_{ij} 的代数余子式

所谓元素 a_{ij} 的代数余子式，是指该元素的余子式乘以 $(-1)^{i+j}$ 所得的式子，记为 A_{ij}.

例 2 元素 a_{11} 的代数余子式

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

而 a_{23} 的代数余子式

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

性质 5 设行列式

展开性质

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

则以下等式成立:

$$a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}=D, \qquad j=1,2,3, \tag{9}$$

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+a_{3j}A_{3k}=0, \qquad j,k=1,2,3;\ j\neq k, \tag{10}$$

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=D, \qquad i=1,2,3, \tag{11}$$

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+a_{i3}A_{k3}=0, \qquad i,k=1,2,3;\ i\neq k. \tag{12}$$

在证明性质 5 以前,先说明带下标式子的含义. 如(9)式表示轮流取 $j=1, j=2, j=3$ 时的下面三个式子:

$$a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}=D,$$

$$a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}=D,$$

$$a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}=D.$$

(10)式则表示 j 和 k 都可取 1,2,3 三个值, 但规定 k 和 j 不能同时取相同的值. 因此, j 和 k 这一对值 (j,k) 的所有可能取值的情形是

$$(1,2) \quad (1,3) \quad (2,1) \quad (2,3) \quad (3,1) \quad (3,2).$$

可见(10)式实际上含有 6 个等式. 当 $j=2, k=3$ 时, 则(10)式为

$$a_{12}A_{13}+a_{22}A_{23}+a_{32}A_{33}=0.$$

其余 5 个等式由读者自己写出来.

此外, 我们再把上述各式的含义作进一步的说明.

一、(9) 式的意思是将行列式的任何一列的元素分别乘上各该元素的代数余子式, 相加之和等于原行列式 D.

二、(10)式的意思是将行列式的任何一列的元素分别乘上另