高等学校试用教材

工程数学

概率论与数理统计

浙江大学数学系高等数学教研组编

人民教育出版社

本书是按照1977年高等学校工科数学教材编写会议上确定的编写大纲编写的，包括概率论、随机过程、数理统计三部分，每章均附有相应的习题，可作高等学校工科试用教材，也可供工程技术人员参考。

高等学校试用教材

工程数学

概率论与数理统计

浙江大学数学系高等数学教研组编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 11 4/16 字数 271,000

1979年3月第1版 1982年3月第5次印刷

印数 413,001—463,300

书号 13012·0258 定价 0.82元

目　录

第一章　概率论的基本概念

自然界和社会上发生的现象是多种多样的．有一类现象，在一定条件下必然发生(或必然不发生)，例如，向上抛一石子必然下落，同性电荷必不相互吸引，等等．这类现象称为确定性现象．过去我们学过的微积分学和线性代数等就是研究这类现象的数学工具．然而在自然界和社会中也还存在着另一类现象，例如，在相同条件下抛同一枚硬币，其结果可能是花这面朝上，也可能是数字一面朝上，并且不论怎样控制抛掷条件，在每次抛掷之前无法肯定抛掷的结果是什么；用同一门炮向同一目标射击，各次弹着点不尽相同，并且不论怎样控制射击条件，在一次射击以前无法预测弹着点的确切位置．这类现象归纳起来可以看作在相同条件下一系列的试验或观察，而每次试验或观察的可能结果不止一个，在每次试验或观察之前无法预知确切的结果，即呈现出不确定性．

人们经过长期实践并深入研究之后，发现这类现象虽然就每次试验或观察结果来说，它具有不确定性，但在大量重复试验或观察下它的结果却呈现出某种规律性，例如，多次重复抛一枚硬币得到花这面朝上大致有半数，同一门炮射击同一目标的弹着点按照一定规律分布，等等．这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性，就是我们以后所说的统计规律性．

一类现象，在个别试验中呈现出不确定性；在大量重复试验中，又具有统计规律性，我们称之为随机现象．概率论与数理统计是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科．

概率统计的理论与方法在应用上是很广泛的，目前它已几乎遍及所有科学技术领域，工农业生产和国民经济的各个部门之中．

例如，使用概率统计方法可以进行气象预报，水文预报及地震预报，产品的抽样验收；在研制新产品时，为寻求最佳生产方案可用以进行试验设计和数据处理；在可靠性工程中使用概率统计方法可以给出器件或装置的使用可靠程度及平均寿命的估计；在自动控制中可用以给出数学模型以便通过电子计算机来控制工业生产；在通讯工程中可以提高信号的抗干扰性和分辨率等。

§1 随机试验

我们遇到过各种试验，在这里，我们把试验作为一个广泛的术语，它包括各种各样的科学实验，甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验．下面举一些例子来说明．

E_1: 抛一枚硬币，观察正面 H（有花的一面）、反面 T 出现的情况。

E_2: 将一枚硬币抛二次，观察正、反面出现的情况。

E_3: 掷一颗骰子，观察出现的点数．

E_4: 记录某电话交换台一分钟内接到的呼唤次数．

E_5: 一口袋中装有红白二种颜色的乒乓球．从袋中任取一只球，观察其颜色．

E_6: 一射手进行射击，直到击中目标为止，观察其射击情况。

E_7: 在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命．

E_8: 记录某地一昼夜的最高温度(℃)和最低温度．

上面举了 8 个试验的例子，它们有着共同的特点．例如试验 E_1，它有二种可能结果：出现 H 或者出现 T，但在投掷之前不能确定出现 H 还是出现 T，这个试验可以在相同的条件下重复地进行．又如试验 E_3，它有 6 种可能结果，即出现点数为 1, 2, …, 6 中之一，但在投掷之前不能确定会出现几点，这个试验可以在相同的条件下重复地进行．再如试验 E_7，我们知道灯泡的寿命（以小时

计)$t\geqslant 0$，但在测试之前不能确定它的寿命有多长，这一试验也可以在相同的条件下重复地进行. 概括起来，这些试验都具有以下特性:

1° 可以在相同的条件下重复地进行;

2° 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果;

3° 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

在概率论中，我们将具有上述三个特性的试验称为**随机试验**，简称**试验**.

我们就是通过研究随机试验研究随机现象的.

§2 随机事件、样本空间

(一)随机事件 一个随机试验的所有可能的结果是可以知道的，但在每次试验之前却不能确定哪个会出现. 例如在试验 E_1 中"出现 H"这件事情可能发生也可能不发生，但如果重复抛许多次，就能看出它的发生是具有某种规律性的(这一点将在下一节说明). 在试验 E_3 中"出现 2 点"这件事情也是这样.

在随机试验中，对一次试验可能出现也可能不出现，而在大量重复试验中却具有某种规律性的事情，称为此随机试验的**随机事件**，简称**事件**.

在大量重复试验中随机事件的发生具有某种规律性，揭示和研究这种规律性就是概率论所要研究的问题.

在一随机试验中，它的每一个可能出现的结果都是一个随机事件，它们是这个试验的最简单的随机事件，我们称这些简单的随机事件为**基本事件**.

例如，在试验 E_1 中，"出现 H"、"出现 T"就是试验的基本事件;在试验 E_3 中，"出现 1 点"、"出现 2 点"、…、"出现 6 点"就是

基本事件.

一试验中，除基本事件以外还有其它的随机事件. 例如，在 E_3 中“出现偶数点”也是一个随机事件，它是由“出现 2 点”、“出现 4 点”、“出现 6 点”这三个基本事件所组成的，当且仅当这三个基本事件中有一个发生，“出现偶数点”这一事件发生. 又如“点数小于3”也是随机事件，它由“出现 1 点”、“出现 2 点”这两个基本事件所组成，当且仅当这两个基本事件中有一个发生，“点数小于3”这一事件就发生.

在试验 E 中必然会发生的事情叫做**必然事件**；不可能发生的事情叫做**不可能事件**. 例如，在 E_3 中“点数不大于 6”是必然事件；“点数大于 6”是不可能事件. 必然事件和不可能事件本来没有不确定性，也就是说它们不是随机事件，但为了今后讨论方便起见，我们把它们当作一种特殊的随机事件.

（二）**样本空间** 为了便于研究随机试验 E，我们将随机试验 E 的所有基本事件所组成的集合叫做 E 的**样本空间**，记为 S. S 中的元素就是试验 E 的基本事件. 基本事件也称样本点.

下面写出了 §1 中试验 $E_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$ 的样本空间 S_k.

S_1: $\{H,\ T\}$

S_2: $\{(H,\ H),\ (H,\ T),\ (T,\ H),\ (T,\ T)\}$①

S_3: $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

S_4: $\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$

S_5: {白色，红色}

S_6: $\{+,\ -+,\ --+,\ \cdots\}$，这里“+”表示击中，“−”表示没有击中

S_7: $\{t \mid t \geqslant 0\}$

S_8: $\{(x,\ y) \mid T_0 < x < y < T_1\}$，这里 x 表示最低温度，y 表示

① 这里所用的记号，例如 $(H,\ T)$ 表示第一次出现 H，第二次出现 T.

最高温度，并设这一地区的温度不会小于 T_0，不会大于 T_1.

要注意的是：样本空间中的元素是由试验的内容所确定的. 例如在试验 E_5 中，如果将球自 1 到 n 编号(设袋中装有 n 只球)，若试验为在袋中任取一球观察其号码，那么样本空间不再是 {白色，红色} 而是 $\{1, 2, \cdots, n\}$.

由于随机事件是基本事件，或是由基本事件所组成的，引入了样本空间 S 之后，我们看到试验 E 的事件是样本空间 S 中的子集，而且事件发生，当且仅当子集中的一个样本点发生. 例如，上面所说的事件 A："出现偶数点"是由基本事件"2""4""6"所组成的，A 是 S_3 的子集，即 $A=\{2, 4, 6\}$. 又如事件 B："点数小于 3"是子集 $\{1, 2\}$，即 $B=\{1, 2\}$. 特别，必然事件就是样本空间 S；不可能事件就是空集 ϕ.

下面再举几个事件的例子.

例 1 在 E_2 中，事件 A_1："第一次出现 H"，即

$$A_1=\{(H, H), (H, T)\}$$

事件 A_2："两次出现同一面"，即

$$A_2=\{(H, H), (T, T)\}$$

事件 A_3："只有一次出现 H"，即

$$A_3=\{(H, T), (T, H)\}$$

在 E_7 中，事件 A_4："寿命小于 5 小时"，即

$$A_4=\{t \mid 0 \leqslant t<5\}$$

在 E_8 中，事件 A_5："最高温度与最低温度相差 10 度"，即

$$A_5=\{(x, y) \mid y-x=10,\ T_0<x<y<T_1\}$$

(三) 事件之间的关系与事件的运算 为了研究事件的需要，下面介绍事件之间的关系与事件的运算.

设试验 E 的样本空间为 S, A, B, A_k $(k=1, 2, \cdots)$ 是 E 的事件.

1° 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含事件** A，记为 $B\supset A$，或 $A\subset B$.

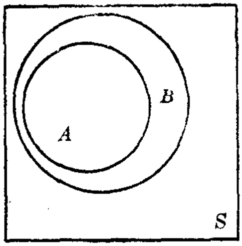

图 1-1

这可用图 1-1 来直观地说明，图中正方形表示样本空间 S，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，事件 B 包含事件 A.

若事件 B 包含事件 A，事件 A 也包含事件 B，即 $B\supset A$、$A\supset B$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A=B$.

2° 事件 A 与事件 B 至少有一个发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的**和**，记为 $A\cup B$.

图 1-2 中正方形表示样本空间 S，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，图中阴影部分即表示事件 A 与事件 B 的和.

类似地，事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生，这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，简记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$；事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个发生，这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cdots$，简记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

3° 事件 A 与事件 B 同时发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的**积**，记为 $A\cap B$ 或 AB.

图 1-3 中阴影部分表示 $A\cap B$.

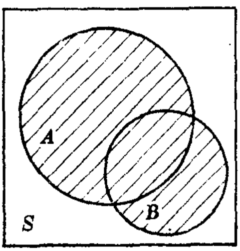

图 1-2

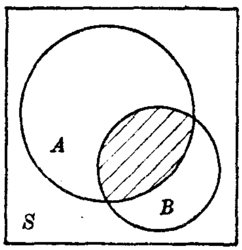

图 1-3

类似地，可以定义 $A_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 的积：

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{k=1}^{n}A_k;$$

以及 $A_k(k=1,\ 2,\ \cdots)$ 的积：

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cdots=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k.$$

4° 事件 A 发生而事件 B 不发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的**差**，记为 $A-B$.

图 1-4 中的阴影部分表示 $A-B$.

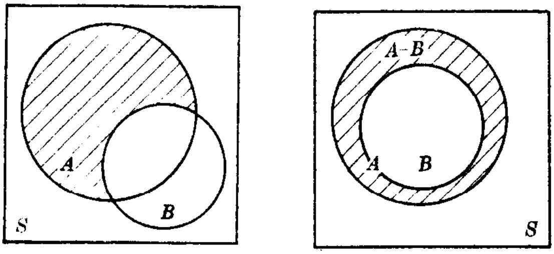

图 1-4

5° 若事件 A 与事件 B 不能同时发生，亦即 $AB=\phi$，则称事件 A 与事件 B 是**互不相容的**. 基本事件是互不相容的.

图 1-5 直观地表示了事件 A 与事件 B 是互不相容的.

若在试验中，事件 A 与事件 B 中必然有一个发生，且仅有一个发生，亦即，事件 A 和事件 B 满足条件

$$A\cup B=S,\quad AB=\phi$$

则称事件 A 与事件 B **互逆**，又称 A 是 B 的**对立事件**(或 B 是 A 的对立事件)记为 $A=\overline{B}$(或 $B=\overline{A}$).

图 1-6 直观地表示事件 A 与事件 B 互逆.

例 2 在例 1 中

$$A_1\cup A_2=\{(H,\ H),\ (H,\ T),\ (T,\ T)\}$$

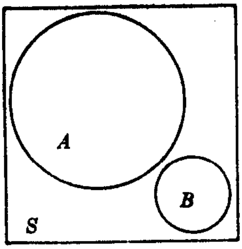

图 1-5

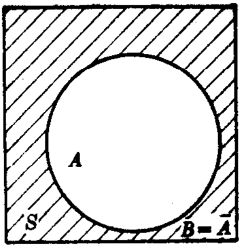

图 1-6

$$A_1A_2=\{(H,\ H)\}$$

$$A_1-A_2=\{(H,\ T)\}$$

因为 $A_2\cup A_3=S$，且 $A_2A_3=\phi$，因而事件 A_2 和事件 A_3 互逆.

例 3 如图 1-7 所示的电路中，以 A 表示“信号灯亮”这一事件，以 B, C, D 分别表示事件继电器接点 I, II, III 闭合，那么容易知道

$$BC\subset A,\ BD\subset A,\ BC\cup BD=A,$$

而 $\overline{B}A=\phi$，即事件 $\overline{B}$ 与事件 A 互不相容.

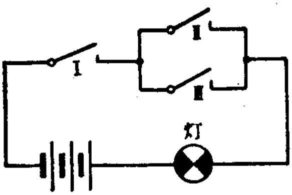

图 1-7

从上面的讨论可以看到，概率论中事件之间的关系与运算和集合论中集合之间的关系与运算是一致的. 为了便于对照，我们列出下面的表格.

记 号	概 率 论	集 合 论
S	样本空间，必然事件	全集
ϕ	不可能事件	空集
e	基本事件	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 的余集
$A\subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
$A\cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	A 与 B 的和集
AB	事件 A 与事件 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB=\phi$	事件 A 和事件 B 互不相容	A 与 B 没有相同的元素

这样，我们常常可以把对事件的分析转化为对集合的分析，利用集合间的运算来分析事件间的关系.

§3 频率与概率

（一）频率　一个随机试验有许多可能结果，我们常常希望知道某些结果出现的可能性有多大. 例如，要在某河流上建筑一座防洪水坝，为了确定水坝的高度，就要知道该河流在造水坝地段每年最大洪水达到某高度的可能性的大小. 最大洪水达到某一高度是随机事件，我们希望能将一个随机事件发生的可能性的大小用一个数来表达.

先来分析一个简单的例子. 考虑"抛硬币"这个随机试验. 为了要知道 H 出现的可能性的大小，我们将硬币抛 n 次，观察在 n 次试验中 H 出现的次数. 现在将硬币连抛 5 次、50 次、500 次各做了十遍，得数据如表 1（表中，n_H 表示在 n 次试验中 H 出现的次数，比值 $\frac{n_H}{n}=f_n(H)$ 叫做在这 n 次试验中出现 H 的频率）.

表 1

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

从表 1 可以看出，抛硬币次数较少时，H 出现的频率差异较大，但是随着抛硬币的次数的增多，H 出现的频率呈现出稳定性。

这种试验从前也有人做过，得出如表 2 所示的数据。

表 2

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
蒲丰	4040	2048	0.5070
K. 皮尔逊	12000	6019	0.5016
K. 皮尔逊	24000	12012	0.5005

从表 2 更能看出，不管什么人去抛，当试验的次数逐渐增多时，$f_n(H)$ 总是在 $0.5=\frac{1}{2}$ 附近摆动而逐渐稳定于 0.5. 这个数能反映出现 H 的可能性的大小.

一般，设随机事件 A 在 n 次试验中出现 n_A 次，比值

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

叫做事件 A 在这 n 次试验中出现的频率.

下面我们再来分析随机试验 E: 在一口袋中装有 6 只乒乓球，其中 4 只是白球 2 只是红球，从袋中任意取一只球，现在来考察取到白球的可能性有多大. 设 W 为取出白球这一事件. 现在来作许多试验，观察取到白球的次数，并算出它出现的频率. 做了 600 次试验（从袋中任意取一球，观察其颜色后放回袋中，搅匀后再任意抽取一球观察其颜色，这样继续下去），得数据如表 3 所示.

表 3

n	100	200	300	400	500	600
n_W	69	139	198	261	337	401
$f_n(W)$	0.690	0.695	0.660	0.653	0.674	0.668

从表3中可以看出，$f_n(W)$在$0.66\cdots=\frac{2}{3}$附近摆动，如再试验下去，将逐渐稳定于$\frac{2}{3}$. 这个数能反映W发生的可能性的大小. 这一事实不因人而异，这就是说在同样的条件下，不管谁去做试验，只要做大量的试验，尽管具体的数字略有出入，但频率总是逐渐稳定于$\frac{2}{3}$.

从上面的二个例子可以看出，一个随机试验的随机事件A，在n次试验中出现的频率$f_n(A)$，当试验的次数n逐渐增多时，它在一个常数附近摆动，而逐渐稳定于这个常数. 这个常数是客观存在的，这就是下面我们定义事件的概率的客观基础. “频率稳定性”的性质，不断地为人类的实践活动所证实，它揭示了隐藏在随机现象中的规律性. 这种规律性就是通常所说的统计规律性.

(二)频率的性质 设随机试验E，它的样本空间为S，A、B为E的二个随机事件，则在n次试验中的频率具有下列性质.

1° $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$,

2° $f_n(S)=1$,

3° 若A, B互不相容，即$AB=\phi$，则

$$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B).$$

[证] 1° 因为$0\leqslant n_A\leqslant n$，所以有$0\leqslant\frac{n_A}{n}\leqslant 1$，即为$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.

2° 因为S是必然事件，所以$n_S=n$，从而$f_n(S)=1$.

3° 因为$A\cup B$发生为A、B中至少有一个发生，又因A、B互不相容，所以在n次试验中$A\cup B$发生的次数必为A发生的次数与B发生的次数之和，即

$$n_{A\cup B}=n_A+n_B,$$

从而
$$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B).\qquad\blacksquare$$

这个性质对随机试验E的任意m个两两互不相容的事件

$(k=1,2,\cdots,m)$也成立,即

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_m).$$

(三)概率的定义 频率的重要意义在于一方面它能一定程度地反映事件 A 发生的可能性的大小,另一方面它比较简单容易掌握. 用频率来刻划事件发生可能性的大小是直观的,但有缺点,因为它有随机波动性. 不过当 n 逐渐增多时频率 $f_n(A)$ 逐渐稳定于某个常数 $P(A)$,即当 n 很大时就有 $f_n(A)\approx P(A)$. 这个数 $P(A)$ 是客观存在的,即对于每一随机事件 A 总有这样一个数 $P(A)$ 与之相对应. 并且还可以推想 $P(A)$ 也具有频率的几条性质,于是用稳定值 $P(A)$ 来刻划事件发生的可能性的大小是比较恰当的. 然而,在进行理论研究时,我们不可能对每一个事件,都做大量的试验从中得到频率的稳定值. 所以我们采取抽象化的方法从以上的分析中吸取最本质的素材,给出如下度量事件发生可能性大小的概率的定义.

概率的定义 设 E 是随机试验,S 是它的样本空间. 对于 E 的每一事件 A 赋予一实数,记为 $P(A)$,称为事件 A 的概率①,如果它满足下列条件

1° 对于每一事件 A 有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$,

2° $P(S)=1$,

3° 对于两两互不相容的事件 $A_k(k=1,2,\cdots)$有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n), \qquad (3.1)$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots) = P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots② . \qquad (3.2)$$

---

① 严格地说,事件是指 S 中的满足某些条件的子集概率是定义在这样的事件上的。关于这方面的讨论已超出本书的范围。

② 为了兼顾样本空间是无限的情况,因而在概率的定义中需要考虑可列个事件和的运算。