高等学校函授教材

高等数学

第二分册

张之良编著

水利电力出版社

013
2212

高等学校函授教材

高等数学

第二分册

张之良编著

水利电力出版社

高等学校函授教材
高 等 数 学
第 二 分 册
张之良编著
*
水利电力出版社出版
(北京德胜门外六铺炕)
水利电力出版社印刷厂印刷
*
787×1092毫米 32开本 $20^{1}/_{4}$ 印张 450,700字
1979年6月第一版 1979年6月北京第一次印刷
印数 00001—24220册 每册2.10元
书号 15143·3467

目　录

第七章　预备知识、函数

［学习指示］　从这一章起，我们要开始学习数学分析，这一部分的主要内容就是微分学、积分学、级数和常微分方程。为此我们还须作一些准备工作，所以可以把这一章看做是学习微积分学的序幕，本章内容包括两部分。

1.预备知识——绝对值、不等式。

2.函数概念。

因为函数概念是数学分析的基本概念，它反映着存在于物质世界中的各种变量间的联系以及它们的依从关系。当我们研究存在于自然界及工程中的数量关系时，经常借助于函数的依从关系。在这样研究下所获得函数的性质是物质世界的规律的反映。

关于第一部分要求能正确的理解绝对值，会解简单的不等式；对于第二部分要求能深入了解函数概念，函数表示法，对于函数符号要会正确运用，记住初等函数的图形，能够看出复合函数是由哪些最简单的函数所组成的，能够画出由基本初等函数的和、差或简单复合函数的图形。

§1　绝对值与不等式

（一）绝对值

当我们对于一个物理量进行测量时，测量所得的数值并

不是实际值，它比实际值可能大一点，也可能小一点，如果不计到底是大了还是小了，而仅注意测量的误差，这个用以表示误差的数字，就是绝对值；例如向东行八里或向西行八里，这本是两个不同的概念，若不考虑方向，仅注意到行程的大小，这个数字“8”就是绝对值。绝对值用下式表示：

$$|8| = 8, \quad |-8| = 8$$

绝对值在数轴上表示某点到原点的距离，如点A距原点O为5个单位，B点距原点为3个单位如图7-1。

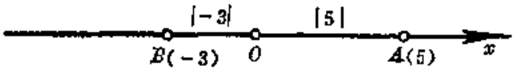

图 7-1

一般地，设a为任一实数，我们定义a的绝对值$|a|$如下：

$$|a| = \begin{cases} a, & 若 a \geqslant 0 \\ -a, & 若 a < 0 \end{cases}$$

式中$a \geqslant 0$符号表示：

$a > 0$　或者是$a = 0$　两种情形

例如　当$a = 2$，　$|a| = |2| = 2$

当$a = 0$，　$|0| = 0$

当$a = -3$，$|a| = |-3| = -(-3) = 3$

现在再把当$a < 0$时，$|a| = -a$解释一下，因为当$a < 0$时，若把上式写为$|a| = a$就不对了，因此时a为一负数，而$|a|$永远代表正数，一个正数是不会与一个负数相等的。因此

$$|-3| \neq -3$$

的写法是错误的，若写为：

$$|-3|=-(-3)=3$$

时就正确了。

讲到这里，我们还要提到一个与$|A|$相当的（或说等价的）定义，即

$$\sqrt{A^2}=\begin{cases}A, & 当A\geqslant 0\\ -A, & 当A<0\end{cases}$$

例如 $\sqrt{2^2}=2$，$\sqrt{0^2}=0$，$\sqrt{(-2)^2}=-(-2)=2$
这说明开平方这一符号"$\sqrt{\ }$"永远表示算术根，开出的数值是不带有负号的。

关于绝对值以及开平方的正负号使用方法，今后常要用到，希读者能正确的理解，以免造成计算上的错误。由定义可以看出实数a的绝对值的几何意义是表示以a为坐标的点到原点的距离，而不论该点是在原点的左边还是右边。

（二）绝对值的一些性质及有关不等式的运算

（1）关于实数绝对值的一些性质，均可由定义直接推得。

对任一实数a有：

1. $|a|\geqslant 0$，这是显然的。

2. $\pm a\leqslant|a|$，此式表示既有$a\leqslant|a|$，也有$-a\leqslant|a|$。前者当$a>0$时，为$a=|a|$，而当$a<0$时，为$a<|a|$；后者当$a>0$时，为$-a<|a|$，当$a<0$时，为$-a=|a|$。

3. $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$

当$a>0$时，$-|a|<a=|a|$

当$a<0$时，$-|a|=a<|a|$

当$a=0$时，$-|a|=a=|a|$

4.乘积的绝对值等于各绝对值的乘积。

即 $$|abc\cdots l| = |a|\ |b|\ |c|\cdots |l|$$

5.商的绝对值等于分子、分母绝对值的商（分母必须不为零）。

即 $$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\quad b \neq 0$$

（2）下面证明几个不等式，在以后我们要经常用到它们。

1.若对某一实数 a，有一正数 $\varepsilon > 0$，使

$$|a| < \varepsilon \qquad (1)$$

则必然有：
$$-\varepsilon < a < \varepsilon \qquad (2)$$

成立，反之亦然。

证 若 $a = 0$，则（1）式成立，显然（2）也成立。

若 $a > 0$，则有 $|a| = a$，但 $|a| < \varepsilon$，从而 $a < \varepsilon$；另一方面，$a > -\varepsilon$，这是因为任何正数大于任何负数，因此（2）式成立。

若 $a < 0$，则 $|a| = -a$，但 $|a| < \varepsilon$，从而 $-a < \varepsilon$，将此式两端各乘以负号，不等式应改向，即 $a > -\varepsilon$；另一方面，$a < \varepsilon$（任何负数小于任何正数），于是（2）式

$$-\varepsilon < a < \varepsilon$$

成立。反之，如果 a 满足不等式

$$-\varepsilon < a < \varepsilon, \qquad (\varepsilon > 0)$$

则
$$|a| < \varepsilon.$$

证 若 $a > 0$，则 $|a| = a$，但 $a < \varepsilon$，从而 $|a| < \varepsilon$；

若 $a < 0$，则 $|a| = -a$，由假设 $-\varepsilon < a$，所以 $-a < \varepsilon$，以 $|a|$ 代 $-a$，因得 $|a| < \varepsilon$，由此证明（2）

式成立时，（1）式也成立。

在几何上（1）式表示 a 到原点的距离小于 ε。第(2)式表示 a 在两点 $A(-\varepsilon)$，$A'(\varepsilon)$之间的一个点 B（图7-2）。

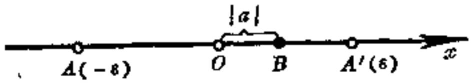

图 7-2

因为由 $|a|<\varepsilon$ 可以推得 $-\varepsilon<a<\varepsilon$；反之，由 $-\varepsilon<a<\varepsilon$ 亦可推得 $|a|<\varepsilon$，所以今后在叙述定理或在推导过程中有时写为 $|a|<\varepsilon$，有时写为 $-\varepsilon<a<\varepsilon$，意思是完全一样的。

2.若对某一实数 a，有一个正数 N，使

$$|a|>N$$

则必有 $$a>N, \text{或者} \quad a<-N$$

证 因为 $N>0$，又由 $|a|>N$，故知 $a\neq 0$

若 $a>0$，则 $|a|=a$ 故得 $a>N$；

若 $a<0$，则 $|a|=-a$ 从而 $-a>N$

即 $a<-N$

例如 $a=10$，$N=9$，即 $10>9$

$a=-10$，$N=9$，即 $-10<-9$

在几何上，第一式：$|a|>N$ 表示点 a 到原点的距离大于 N；第二式：$a>N$ 表示点 a 在点 N 之右；第三式：

$a<-N$ 表示点 a 在点 $-N$ 之左（图7-3）。

这个定理的逆定理也是正确的，即

若 $a>N$，或 $a<-N$ 时 则有 $|a|>N$

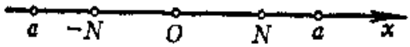

图 7-3

证 若 $a>0$，则 $|a|=a$，即 $|a|>N$

若 $a<0$，则 $|a|=-a$,由假设 $a<-N$从而有：

$-a>N$，用 $|a|$ 代 $-a$，得 $|a|>N$。

和前边类似，$|a|>N$与 $a>N$及 $a<-N$通用，但有一点不同，即当我们用 $a>N$及 $a<-N$ 的写法时，却不能把它们连写到一起，如：

$$N<a<-N$$

的形式，这是因为不等式有传递性，这样写法表明$N<-N$，可是N表示一正数，$N<-N$显然不合理。

3.若 a 和 b 是任意两个实数，则有：

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

证 由
$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$$
$$-|b|\leqslant b\leqslant|b|$$

相加得到：　$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant(|a|+|b|)$

由第 3 页（1）有：$|a+b|\leqslant|a|+|b|$

当 a，b 同号时，等号成立，即

$$|a+b|=|a|+|b|$$

例如　$|3+5|=|3|+|5|=3+5$

当 a，b 符号相反时，不等号成立，即

$$|a+b|<|a|+|b|$$

例如　$|(-3)+5|<|(-3)|+|5|=8$

推论1：　$|a-b|\leqslant|a|+|b|$

因　$|a+(-b)|\leqslant|a|+|(-b)|=|a|+|b|$

推论2：$|a_1+a_2+\cdots+a_k|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_k|$

4．若 a 和 b 是任意两个实数，则有：

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|$$

证 因 $a=a-b+b$

所以 $|a|=|a-b+b|\leqslant|a-b|+|b|$

移项后即得：$|a-b|\geqslant|a|-|b|$

当$a>b>0$时 则$|a-b|=|a|-|b|$

当a,b异号时 则$|a-b|>|a|-|b|$

推论1． $|a-b|\geqslant|b|-|a|$

推论2． $|a+b|\geqslant|a|-|b|$

推论证明请读者自己完成。

思 考 问 题

1．在什么条件下，从 $ac=bc$ 可以推出 $a=b$。

2．指出下列推理过程中的错误：

设 $x=y$，则 $x^2=xy$，从而 $x^2-y^2=xy-y^2$

$(x-y)(x+y)=y(x-y)$，故有

$x+y=y$ 所以 $2y=y$，因得 $2=1$。

3．如果$xy>0$，问 x 与 y 的符号关系应当如何？又若 $xy<0$，问 x 与 y 的符号关系应当如何？

4．在什么条件下，从 $ac>bc$ 可以推出 $a>b$。

5．指出下列推理过程中的错误：

因 $2>1$，则有 $2\lg\frac{1}{3}>1\cdot\lg\frac{1}{3}$

故 $\lg\left(\frac{1}{3}\right)^2>\lg\left(\frac{1}{3}\right)$，所以

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2>\frac{1}{3}$$

6. x 与 y 同号，问 $\frac{1}{x}$ 与 $\frac{1}{x+y}$ 谁大？

7. $|x-y|$、$|y-x|$、$-|x-y|$、$|-(y-x)|$ 相同否？

8. 从 $|a|>|b|$ 能否推出 $a>b$？

从 $a>b$ 能否推出 $|a|>|b|$？

9. ① $|x|\div x=$？ ② $|x|-x=$？ ③ $|x|\cdot x=$？

10. x、$\sqrt{x^2}$、$(\sqrt{x})^2$、$|x|$ 相等否？

§2 变　　量

（一）概念的引出

在工农业生产中，我们常会遇到各种各样的量，如水库中水的深度、丰产田的面积、汽油的消耗量、机车安全运行的时间、高炉的温度、等等。这些量都有个共同的特征，即可以用通过度量得到的数来表示，这些数就叫做**量所取的值**。

在一定的运动过程中，有的量是变化的，即取不同的值；有的量则保持一个固定值不变。前者叫做**变量**，后者叫做**常量**。例如人造卫星与地球间的距离是一个变量。将密闭容器内的气体加热，其体积、分子数目不变，是常量。而压力增大、温度升高，压力、温度是变量。又如飞机飞行时，乘客人数、全部行李的重量、两翼长度这些都是不变的，都是常量；至于飞机距到达地的距离、或距起飞地的距离、距地面的高度、汽油的储存量、周围空气的压力、空气的温度等都随着时间、地点而变化，它们都是变量。若一个量在所讨论的过程中变化很小，以致于对某个实用目的来讲可以忽略不计时，我们也往往把它算做常量。例如在不同的地点落体

的重力加速度是不同的，因而它是个变量。但通常在较小地区内研究落体运动时，因为它变化较小，一般可将重力加速度看作常量，因此，一个量是常量还是变量，要根据具体情况来决定。

对于经济或技术问题，刚好是那些变动的量有着最重要的意义，这是很自然的，因为自然界的动态是由不停止的变化所组成，人类的实际行动则是以这种变化的规律作指导，人们为了控制自然现象或技术过程的运动，使它能满足生产实践中所提出的种种要求，就必需把问题中所涉及的各个变量变化的情况弄清楚。例如，为了把电压控制在220伏特左右，或是把设备利用率提高到100%附近，就必须弄清电压或设备利用率的变化情况，只有这样才能拟定出适当的措施以达到上述的目的。至于问题中的常量，通常有的是一时无法改变的，有的是不必加以改变的，所以对常量的考察就比较次要，而重要的课题则是研究变量。

变量的性质与类型是多种多样的，可以从各个不同的角度来加以考察。如钟摆与其铅直位置间的夹角是个连续变化着的变量，它的值是有界限的，譬如说它总界于$-\frac{\pi}{6}$与$\frac{\pi}{6}$之间。又如多边形的边数这个变量则只能取3、4、5…这些值，所以它不是连续变量，此外，它的值可以无限增大，所以它不是有界的。由此可见，仅就变量变化的状态和变量所能取的值的范围来说，就有连续与不连续；有界与无界之分。若就变量变化的趋势来说，也有种种不同，有的是不断增大的变量，有的是不断减小的变量。再如就变量变化的速度来说，也有快慢之别等等。系统地研究变量的这些特点，找出它们相互联系的规律，以便利用这些规律去解决生产中

的问题，便是我们学习这门课程的目的。在今后的讨论中，经常采用 x、y、z、…等字母来代表变量，用 a、b、c …等字母来代表常量。

（二）区间、不等式

当我们讨论一个变量时，常常要考虑到它的变化范围，例如人体的温度在 35～42℃ 之间变化，牛顿是生活在公元 1642～1727 年间等，我们说 35～42℃ 是人体体温的变化区间，1642～1727是牛顿的生活区间，通常我们把变量所能取的值的范围（即变量的变化区间）用不等式来表示，例如若以 θ 代表钟摆与铅直位置间的夹角，则按上面一般所述情况，θ 变化的范围可以用不等式：

$$-\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}\text{来表示。}$$

为了看起来更加清楚起见，我们常常采用下述的几何表示法，把变量 x 所能取的每一个值都用数轴上的一个点来表示。于是变量就可以用变点或通常所说的动点来表示，面常量就相当于数轴上的一个定点，从而变量变化的范围就用数轴上一段直线表示出来。例如：若变量 x 的变化范围是在 a、b 两数之间，即 $a<x<b$，那么，相应的变点就在数轴上的两个点（即代表数 a 和 b 的那两个定点）之间变化，这些点构成一个不包括端点在内的线段，我们称之为开区间，并简记为（a、b）（图7-4）。

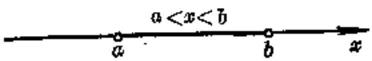

图 7-4