

目 录

前 言	1
第一章 彈性理論平面問題的基本方程	4
§ 1. 各向同性介質彈性理論的平面問題, Н. И. 穆斯海里什維里的方法	4
§ 2. 映象函数	9
§ 3. 各向异性介質彈性理論的基本方程	16
第二章 被任意孔削弱的平面各向同性場中應力的分布	41
§ 1. 解法	41
§ 2. 單向拉伸或壓縮	45
§ 3. 二向均勻应力状态	81
§ 4. 結弯	86
§ 5. 在常剪力条件下梁的弯曲	91
§ 6. 長条(梁)弯曲的較复杂类型	97
§ 7. 在帶孔的彈性平面里自重对应力分布影响的計算	100
§ 8. 被圓孔削弱的有限寬長条中的应力	103
§ 9. 圓柱面上孔附近的应力集中	112
§ 10. 被两个圓周或一个圓周和一条直綫所限定区域的应力集中	115
§ 11. 在帶有無限多排相等圓孔的彈性平面里的应力	143
第三章 橢圓孔或圓孔附近材料的各向异性性質对应力集中的影响	150
§ 1. 对帶有橢圓孔区域第一基本問題的解	150
§ 2. 对帶有橢圓孔区域第二基本問題的解	191
第四章 圓孔附近超过彈性極限的应力集中	199
§ 1. 双調和函数的一般“接合”問題	199
§ 2. 帶有圓孔的無限平面的彈塑性問題(平面应变)	200
§ 3. 应力場的非均匀性对圓孔附近塑性区域的影响	210
§ 4. 二向拉伸平板里圓孔附近的塑性区域	220
§ 5. 單向拉伸平板里圓孔附近的塑性区域	225
第五章 被彈性圓环加强的孔附近的应力集中	229
§ 1. 在插有彈性环(由一些不同材料的环彼此焊接而成的)的圓孔附近的应力状态	229

§ 2. 被圓孔(其中焊接一彈性環)削弱的平板的單向拉伸·····	234
§ 3. 被圓孔(其中嵌入一彈性環)削弱的平板的拉伸·····	248
§ 4. 純剪·····	255
§ 5. 被圓孔(被彈性環加強)削弱長條(梁)的純彎·····	260
§ 6. 被帶有焊接彈性環的圓孔所削弱的懸臂梁的彎曲·····	270
§ 7. 帶有被彈性環加強的曲綫孔的板的拉伸·····	275
§ 8. 曲綫孔(其中焊接一絕對剛性環)附近的應力。板的各向異性材 料的影响·····	278
§ 9. 在被焊接或嵌入的彈性墊圈附近的應力集中·····	291
第六章 在薄板彎曲條件下孔附近的應力 ·····	292
§ 1. 薄板彎曲理論的基本方程·····	292
§ 2. 純柱面彎曲·····	309
§ 3. 純彎·····	316
§ 4. 板的扭轉·····	321
§ 5. 三角板的彎曲·····	326
§ 6. 板材料的各向異性對孔附近應力集中的影响·····	332
第七章 被焊有彈性環的圓孔所削弱的薄板的彎曲 ·····	344
§ 1. 解法·····	344
§ 2. 純彎·····	350
§ 3. 純柱面彎曲·····	354
§ 4. 板的扭轉·····	360
§ 5. 長條的純柱面彎曲·····	365
§ 6. 三角板的彎曲·····	371
§ 7. 具有軸對稱環板的彎曲接觸問題的近似解法·····	376
第八章 孔附近應力集中的實驗數據以及它們與理論結果的 比較 ·····	385
§ 1. 概述·····	385
§ 2. 帶孔平板的拉伸·····	386
§ 3. 帶孔長條(梁)的純彎·····	394
§ 4. 被圓孔削弱的懸臂梁的彎曲·····	399
§ 5. 自重作用下短矩形孔附近的應力·····	406
參考文獻 ·····	412

前 言

在現代所有的工程結構和機械面前提出了一個普遍的要求，那就是如何最經濟地應用建築材料而又能夠建造得堅固和穩定。

在設計這些建築物和機器的時候，必須考慮到各種因素。其中的一個因素就是在平面和空間構件中孔和槽附近的應力集中。

雖然這個問題是很重要的，但在個別應力集中問題上所得到的理論解還沒有為廣闊的工程界所掌握，因為在我們的文獻里還缺少合適的並且相當全面地把散布在雜誌文獻中的這些結果收集在內的手冊。

例如，G. 諾依別爾的“應力集中”一書（其中包含很多對工程有意義的材料）已經是太陳舊了，特別是在討論關於平面構件里孔附近應力集中問題的那部分。其實，這本書中只包含在拉伸、純彎、純剪情況里關於橢圓孔附近應力集中問題（Г. Б. 柯洛索夫問題，1910）的解，以及在其特殊情況里的圓孔附近應力集中問題（G. 克爾希，1898）的解。在這本書里完全沒有反映出近三十年来蘇維埃學者在應力集中問題上所得到的巨大成就。

單就橢圓孔附近應力集中的 Г. Б. 柯洛索夫問題就可以得出：橢圓孔附近的集中系數主要與孔周界的曲率半徑（曲率半徑減小則集中系數增大）以及孔相對於拉伸外力的位置有關。

這個例子指出，我們應當怎樣的來注意孔附近的應力集中問題。

最近三十年来，由於我們蘇維埃學者（Г. Б. 柯洛索夫^[2]，И. И. 穆斯海里什維里^[4]和他的學派）的卓越工作，平面里孔附近應力集中問題的研究被大大地向前推進了。例如，在20年代以及30年代的開頭，И. И. 穆斯海里什維里院士在一系列工作中，採用保角映象而發展了解所謂彈性理論平面問題的有效解法，特別是關於在被任意孔削弱的平面場中應力分布的問題。所有這些問題被寫在他的專著“數學彈性力學的幾個基本問題”（1933）中。這本專著的出現根本

地改变了事物的面貌。一方面,它給彈性理論平面問題的一般解法的發展以有力的推动;另一方面,代替当时已知的对兩三个問題的个别解 Н. И. 穆斯海里什維里院士給出整类問題的解答,特别是建筑工程上非常需要的有关孔附近应力集中的問題。

在上述卓越的著作出現以后,并且特别是在 Н. И. 穆斯海里什維里的工作“解决平面彈性理論边界問題的新的一般方法”(ДАН СССР, т. III, № 1, 1934)發表以后,彈性理論的平面問題發展得非常迅速。大体上这个發展是沿着三个方向进行的:

1. 發展任意連通的彈性平面理論基本問題的一般解法(С. Г. 米赫林, Д. И. 舍尔曼, И. Н. 維庫阿等)。

2. 应用 Н. И. 穆斯海里什維里院士的方法来解决很重要的工程技术問題,其中,特别是关于孔附近的应力集中問題(А. Н. 基尼克院士, Г. Н. 薩文, С. Г. 列赫尼茨基等)。

3. 發展各向异性介質彈性平面理論基本問題的一般方法,以及建立对某些类問題的有效解法(С. Г. 列赫尼茨基, С. Г. 米赫林, Д. И. 舍尔曼, Г. Н. 薩文等)。

由于十多年来对各向同性和各向异性彈性理論平面問題的辛勤劳动,出現了一系列的專著: Н. И. 穆斯海里什維里院士的“奇异积分方程”(1946)和“数学彈性力学的几个基本問題”(1949)(中譯本,科学出版社 1958 年出版); С. Г. 米赫林教授的“积分方程及其在力学、数学、物理和工程的某些問題上的应用”(1947)(第二版, 1949); С. Г. 列赫尼茨基教授的“各向异性板”(1947)(中譯本,科学出版社 1956 年出版); И. Я. 什塔耶尔曼教授的“彈性理論的接触問題”(1949)(中譯本,科学出版社 1958 年出版); И. Н. 維庫阿教授的“橢圓方程的新解法”(1948)等。

所有这些著作,虽然它們具有很多优点,但在我們看来,还是不能完全滿足那些需要知道关于应力集中基本事实的工程师們的要求。

我們認為有必要給工程师、建筑师写一本書,在其中以便于利用

的形式,就是以簡單的公式、圖和表的形式給出有关应力集中的一些最重要的結果,使他們(工程師)根据这些公式和圖、表就能做出所需的結論,甚至有时也可以不必深究很复杂的理論。

写这本书的目的就在这里,但是由于有大量关于应力集中的材料,我們不可能把全部有关应力集中的問題都包括在这一本書里,所以在本書中,我們只限于研究平面里孔附近的应力集中問題,而暫且保留关于削圓角和条溝附近的应力集中問題以及空間問題,这些問題將在以后的書中加以討論。

本書大部分的内容是作者和他的学生在最近 15 年里的工作。但是在总结这方面的材料时,我們曾極力設法把其他作者在这問題上所得到的全部結果包括进去。当然,这不能認為某些重要的工作不可能被我們遺漏。因此,我們預先向这些工作的作者們道歉,并且非常感謝他們能在这方面予以指正。

由于本書的專門性,我認為它对科学工作者,高等学校的材料力学和工程彈性力学的教师也会是有用的。

全書由八章組成:为了使本書在使用上便利起見,我們極力使所有章节讀起来是互不依賴的(除去第一章)。因此,書中自然会有重复的地方。

書中有些結果敘述的不夠完全,但是願意深入地了解某些問題的讀者,可以从詳細的文献索引中查到原始著作。这个索引在書末按字母的順序排列。在文中引証时,我們指出作者的姓和在这索引中他的著作号碼(在方括弧中)。

我們尽量把最有用处的結果用圖和表表示成明显易看的形式。

在表的計算、繪圖、审驗其他作者的解等等方面的繁重工作上,得到我的彈性力学研究班的学生,特别是我的学生 O. C. 帕拉修克和 H. II. 弗勒什曼的巨大帮助。为此,我对他們表示衷心的謝意。

著 者

1950 年 8 月

第一章

彈性理論平面問題的基本方程

为了使讀者能够了解本書以后各章的內容,在这一章里我們給出一些必要的結果. 对这些結果不熟悉的讀者可以參看 Н. Н. 穆斯海里什維里的書^[4].

§ 1. 各向同性介質彈性理論的平面問題.

Н. Н. 穆斯海里什維里的方法

沒有体积力时,彈性理論的平面問題归結为大家所熟知的,由平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

和協調方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (1.2)$$

組成的方程組在相应边界条件下的积分.

在第一基本問題里,就是当外力在区域 S 的周界上被指定,其边界条件是:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) &= X_n; \\ \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) &= Y_n, \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

这里 X_n, Y_n 是作用在周界 L 上外力矢量的指定分量,而 n 是外法綫.

在第二基本問題里,就是当位移在区域 S 的周界上被指定,其边界条件是:

$$u = g_1(s); \quad v = g_2(s), \quad (1.4)$$

这里 $g_1(s)$ 和 $g_2(s)$ 是周界 L 上各点的指定位移. 它們是弧長 s (从

周界上任一点起始計算)的指定函数。

假如从下面的关系引进应力函数 $U(x, y)$,

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad (1.5)$$

那末方程組(1.1)和(1.2)可以化为一双調和方程

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0. \quad (1.6)$$

同时可以指出,在第一基本問題里函数 $U(x, y)$ 的边界条件具有这样的形式:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_0^s X_n ds + C_1; \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -\int_0^s Y_n ds + C_2, \quad (1.7)$$

这里 C_1 和 C_2 是两个任意的实常数。在單連通区域中可以讓它們等于零。

因此,彈性理論的平面問題被归結为寻找滿足边界条件(1.4)或(1.7)的双調和函数 $U(x, y)$ 。

大家都知道,对于双調和函数有下面的关系:

$$U(x, y) = \operatorname{Re}[z\varphi_1(z) + \chi_1(z)]; \quad (1.8)$$

这里 Re 是取方括弧中式子实部的符号; $\varphi_1(z)$ 和 $\chi_1(z)$ 是复变数 $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ 的解析函数。因此,平面問題的求解就归結为从边界条件中决定两个解析函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z) = \frac{d\chi_1}{dz}$ 。很容易看出,

这些边界条件具有下面的形式:

a) 在第一基本問題的情况里:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} &= \varphi_1(z) + z\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)} = \\ &= i \int_0^s (X_n + iY_n) ds + C = \\ &= f_1 + if_2 + \text{const.} \quad \text{在 } L \text{ 上;} \end{aligned} \quad (1.9)$$

6) 在第二基本問題的情况里:

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi_1(z) - z\overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)} = (g_1 + ig_2) \cdot 2\mu \quad \text{在 } L \text{ 上}, \quad (1.10)$$

其中对平面应力状态來說 $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$; 对平面应变問題來說, $\kappa = 3 -$

-4ν ; ν 是泊松比; $\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ 是剪力模数; E 是楊氏模数。

假如知道函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\chi_1(z)$, 那末应力分量 σ_x , σ_y 和 τ_{xy} 可以直接按柯洛索夫-穆斯海里什維里公式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2[\varphi_1'(z) + \overline{\varphi_1'(z)}]; \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\varphi_1''(z) + \psi_1'(z)], \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

用 $\varphi_1(z)$ 和 $\chi_1(z)$ 求出来。

在我們的情况里, 复变数 z 的区域是某一單連通周界 L 的外部 (而且包括無限远点), 也就是帶有一个孔的無限平面。当把坐标原点放在区域以外时 (即在孔內), 可以把 L 外部的函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 写成这样的形式:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(z) &= -\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} \ln z + \sum_{n=2}^{+\infty} a'_n z^n; \\ \psi_1(z) &= \frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(1+\kappa)} \ln z + \sum_{n=2}^{+\infty} b'_n z^n, \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

这里, X 和 Y 是所有作用在孔周界 L 上外力的主矢量的分量。

假如在全部区域 S 里应力分量保持有界¹⁾, 那末在 (1.12) 里函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 中所有 $n \geq 2$ 的系数 a'_n 和 b'_n 都必須等于零。因此, 在这种情况下函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ (1.12) 具有形式:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(z) &= -\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} \ln z + (B+iC)z + \varphi_1^0(z); \\ \psi_1(z) &= \frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(1+\kappa)} \ln z + (B_1+iC_1)z + \psi_1^0(z), \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

这里 B, C, B_1, C_1 是实常数。而 $\varphi_1^0(z)$ 和 $\psi_1^0(z)$, 当 z 足够大时可以展开为:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1^0(z) &= a'_0 + \frac{a'_1}{z} + \frac{a'_2}{z^2} + \dots; \\ \psi_1^0(z) &= b'_0 + \frac{b'_1}{z} + \frac{b'_2}{z^2} + \dots. \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

1) 在第二章 §1 里将研究無限远的应力 σ_x , σ_y 和 τ_{xy} 是整多项式的情况。同样見第二章 §6。

假如孔的周界不受外力作用，那末在(1.13)里應使 $X=Y=0$ 。系数 $B+iC$ 和 B_1+iC_1 由無限遠的應力狀態條件來確定。

用 $\sigma_x^{(\infty)}=p=\text{const.}$; $\sigma_y^{(\infty)}=q=\text{const.}$; $\tau_{xy}^{(\infty)}=t=\text{const.}$ ，表示無限遠的應力分量，我們有：

$$B=\frac{p+q}{4}; \quad B_1=\frac{p-q}{2}\cos 2\alpha; \quad C_1=\frac{p-q}{2}\sin 2\alpha, \quad (1.15)$$

这里， α 是無限遠對應於 p 的應力主軸與 Ox 軸的夾角。

常數 C 是和平面無限遠部分的剛性轉動有關，但對應力分布沒有影響，因此可使 $C=0$ 。

現在，我們把區域 S 借映象函數 $z=\omega(\zeta)$ 映射為一單位圓 γ 內（或圓外）。我們用 σ 表示變數 ζ 在單位圓上的值。在區域的周界 L 上用 $\omega(\sigma)$ 代替變數 z 以後，條件(1.9)變成：

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \cdot \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = f_1 + if_2 + \text{const.}, \quad (1.16)$$

这里，函數 $\varphi(\sigma)$ 和 $\psi(\sigma)$ 分別等於 $\varphi_1[\omega(\sigma)]$ 和 $\psi_1[\omega(\sigma)]$ 。

用 $\omega(\zeta)$ 替換變數 z 以後，公式(1.11)變成：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= 2[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}]; \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{\theta\theta} &= \frac{2\zeta^2}{\rho^2\omega'(\zeta)} [\omega(\zeta)\overline{\Phi'(\zeta)} + \omega'(\zeta)\overline{\Psi(\zeta)}], \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

这里

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}; \quad \Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)},$$

而 σ_r , σ_θ 和 $\tau_{\theta\theta}$ 分別等於動直角坐标系中的 σ_x , σ_y 和 τ_{xy} 。動直角坐标系的原點位於所考慮的點，同時 Oy 軸是在該點對曲綫 $\rho=\text{const.}$ 的切綫。

以後，我們將採用映射到單位圓內部的變換，同時映象函數被取為：

$$z=\omega(\zeta)=c\left(\frac{1}{\zeta}+e_1\zeta+e_2\zeta^2+\cdots+e_n\zeta^n\right). \quad (1.18)$$

容易證明，用關係式(1.18)代換變數 z 為 ζ 後，應力函數 $\varphi_1(z)=\varphi_1[\omega(\zeta)]=\varphi(\zeta)$ 和 $\psi_1(z)=\psi_1[\omega(\zeta)]=\psi(\zeta)$ (1.13) 將具有

形式:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} \ln \zeta + c \cdot \frac{B+iC}{\zeta} + \varphi_0(\zeta); \\ \psi(\zeta) &= -\frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(1+\kappa)} \ln \zeta + c \cdot \frac{B_1+iC_1}{\zeta} + \psi_0(\zeta), \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

这里 $\varphi_0(\zeta) = \sum_0^\infty a_n \zeta^n$ 和 $\psi_0(\zeta) = \sum_0^\infty b_n \zeta^n$ 在單位圓內是复变数 ζ 的兩個正則函数。

把 (1.19) 中具有無窮級数形式的 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 代入边界条件 (1.9), 同时比較左右二边 ζ 的同幂項的系数, 我們得到一組代数方程, 解这組方程, 我們可找到系数 a_n 和 b_n 。但这个方法只在極簡單的情况下方能实现, 一般說来它是非常繁复不便的。

H. M. 穆斯海里什維里^[4] 指出, 利用哈尔納克定理可以把边界条件 (1.9) 用兩個等价的汎函方程

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \cdot \frac{\overline{\varphi_0'(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma + \bar{b}_0 &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1^0 + i f_2^0}{\sigma - \zeta} d\sigma; \\ \psi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \cdot \frac{\varphi_0'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1^0 - i f_2^0}{\sigma - \zeta} d\sigma \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

来代替。这里用 $f_1^0 + i f_2^0$ 表示函数 $\varphi_0(z)$ 和 $\psi_0(z)$ 的折合边界条件; 它等于:

$$\begin{aligned} f_1^0 + i f_2^0 &= f_1 + i f_2 - \frac{X+iY}{2\pi} \ln \sigma - \frac{Bc}{\sigma} - \\ &- \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \left\{ \frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)} \sigma - B\bar{c}\sigma^2 \right\} - (B_1 - iC_1)\bar{c}\sigma, \end{aligned} \quad (1.21)$$

而 $f_1^0 - i f_2^0$ 是公式 (1.21) 的共轭式。

在第二基本問題里也能得到同样的关系。可以指出, 若 $z = \omega(\zeta)$ 是有理函数, 那末可从方程組 (1.20) 的第一式求出函数 $\varphi_0(\zeta)$, 然后再从第二式求出 $\psi_0(\zeta)$ 。若 $z = \omega(\zeta)$ 是無理函数, 那末方程組 (1.20) 可以化为弗烈德戈里姆积分方程¹⁾。

1) 見 H. M. 穆斯海里什維里[5]。

把找出的函数 $\varphi_0(\zeta)$ 和 $\psi_0(\zeta)$ 代入 (1.19), 我們在無限远指定应力状态下得到函数 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 的最終形式。把 (1.19) 中的函数 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 以及相应于該孔形狀的映象函数 $\omega(\zeta)$ (1.18) 代入公式 (1.17), 并且分离 (1.17) 式左、右二边的实部和虚部, 我們就得到曲綫正交坐标系中应力分量 σ_{xx} , σ_{yy} 和 τ_{xy} 的公式。

§ 2. 映象函数

我們感兴趣的区域是从其中取去一矩形, 正方形, 三角形, 梯形等有限部分的平面 (并且包括無限远点)。如果已知能把把已知区域保角映射为一單位圓的函数 $z = \omega(\zeta)$ (1.18), 那末, 如我們曾見到的, 問題就归結为从汎函方程組 (1.20) 寻找两个函数 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 。因此, 假若知道把被考虑的区域保角映射到單位圓内部 (或外部) 的函数, 則在任何形狀孔附近的应力分布問題就会得到解决。

問題發生了: 就是能否把对我们有兴趣的任何区域 (即具有任意形狀孔的無限平面) 映射到單位圓的内部去。黎曼定理給这个問題以詳尽的回答。讀者可在 Э. 古薩^[2], В. И. 斯米尔諾夫^[1], И. И. 普里瓦洛夫^[1] 的書里找到該定理的表述。

保角变换时, 只要指定区域的边界 (孔周界) 是具有切綫变化为連續的光滑曲綫, 則該区域的边界 (即孔周界) 和單位圓的周界可彼此相互單值和連續的轉換。

因為我們要討論具有規則或不規則多边形的孔, 所以在参数方程 $x(t)$, $y(t)$ 中被討論区域的周界是若尔当分段光滑曲綫。在参数 t 变化的区間 $t_1 \leq t \leq t_2$ 里, 我們可以選擇有限个部分, 使 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在每一部分中具有連續微商 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 并且它們不同时等于零。因此, 我們所研究区域的边界就由有限个具有連續变化切綫的曲綫 (直綫) 所組成。切綫的連續变化仅在角上才被破坏。

黎曼定理仅規定映射已知区域到單位圓内部 (或外部) 的保角映象函数 $z = \omega(\zeta)$ 是存在的; 但完全沒有說明对已知形狀的孔应如何建立这个函数。換句話說, 建立对我们所感兴趣的保角变换函数几

乎經常是不能達到的問題。甚至在这个函數 $\omega(\zeta)$ 已確切知道的那些情況里，它（除去最簡單的情況）也是複雜的解析公式。在實用上，它引起計算的困難和不便；因此不得不拋棄函數 $z = \omega(\zeta)$ 的準確式，而從熟知的函數里用最簡便的式子來代替它們。

所指出的情況促使我們去建立保角映象函數 $z = \omega(\zeta)$ 的簡便近似方法¹⁾，如 А. Б. 康托羅維奇，В. И. 克雷洛夫等人的解析法以及 И. Б. 梅倫契耶夫的圖解法。

也能按另一種方式去做：即取任一在單位圓 γ 內部為正則和單葉的函數 $z = \omega(\zeta)$ ，同時注意 z 面上什麼樣的周界 L 與單位圓 γ 相對應。假若這時，周界 L 的繞向和單位圓 γ 的繞向相同，則函數 $z = \omega(\zeta)$ 就給出被周界 L 限定的區域 S 到單位圓 γ 內部（或相反）的保角映象²⁾。

例如，函數

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{9} \zeta^3 \right)$$

給出具有圓角的正方形到單位圓的映象。而函數

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{4} \zeta^2 \right)$$

給出具有圓角的等邊三角形到單位圓的映象。但是能夠應用這個方法的是比較少的。

對於正方形，具有任意邊比的矩形，等邊三角形和正多邊形的孔，函數 $\omega(\zeta)$ 的近似式能夠容易的從克利斯托費爾里-什瓦爾茨積分³⁾得到，而且這個函數 $\omega(\zeta)$ 能以預先指定的準確度給出趨近指定孔周界的可能性。

我們要找出與孔形狀有關的函數 $\omega(\zeta)$ (1.18) 的顯示式。從複變函數的理論知道，把由封閉折綫組成的多邊形的外部 S 映射到一單位圓的內部或外部可由所謂的克利斯托費爾里-什瓦爾茨積分

1) 見 Г. 果盧津，А. 康托羅維奇等[1]，А. Б. 康托羅維奇和 В. И. 克雷洛夫[2]。

2) 見 И. И. 穆斯海里什維里[4]。

3) 見 В. И. 斯米爾諾夫[1]。

$$z = \omega(\zeta) =$$

$$= c \int_1^t (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} \cdot \frac{dt}{t^2} + d \quad (1.22)$$

来完成。

我們考虑單位圓外部到多边形外部的映象情况；多边形外部的本身包括無穷远点，并被我們感兴趣的周界（矩形，正方形，三角形）所限制。在(1.22)中， c 和 d 一般說來是描述多边形（孔）位置和它大小的复常数； $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 是和 $z = x + iy$ 平面上多边形的角頂 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相对应的 $\zeta = \xi + i\eta$ 平面中單位圓周上的点； $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ 是正的实常数，它們表明多边形（区域 S ，周界 L ）的外角是 π 的一些怎样的倍数； t 是圓外区域的点。

被克里斯托费尔里-什瓦尔茨函数(1.22)給出的映象一直連續到周界上，但使 $\omega'(\zeta)$ 变成零的角点 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 除外。因此，在这些角点保角映象遭到破坏。注意 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = n + 2$ ，我們轉变(1.22)中的被积函数为：

$$\omega(\zeta) = c \int_1^t \left(1 - \frac{a_1}{t}\right)^{\alpha_1 - 1} \left(1 - \frac{a_2}{t}\right)^{\alpha_2 - 1} \dots \left(1 - \frac{a_n}{t}\right)^{\alpha_n - 1} dt. \quad (1.23)$$

因 $|a_n| = 1$ 和 $|t| \geq 1$ ，所以把(1.23)中的被积函数在無限远点的鄰域里展成級数并把它积分，我們得到：

$$\omega(\zeta) = c \left\{ \zeta - [(\alpha_1 - 1)a_1 + (\alpha_2 - 1)a_2 + \dots + (\alpha_n - 1)a_n] \ln \zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \frac{c_3}{\zeta^3} + \dots \right\}. \quad (1.24)$$

欲使單叶区域具有單叶的映象，不难看出，必須且只須

$$(\alpha_1 - 1)a_1 + (\alpha_2 - 1)a_2 + \dots + (\alpha_n - 1)a_n = 0. \quad (1.25)$$

从(1.24)得出，在遵守(1.25)的条件下我們可以建立任意接近指定区域 S （具有已知孔的無限平面）的單叶区域 S^* 的保角映象函数 $\omega(\zeta)$ （到單位圓的外部）。

1. 帶有矩形孔的区域¹⁾ 令区域 S 是帶有矩形孔的平面。孔的

1) 映象可借橢圓函数来实现。例如見 B. H. 斯米尔諾夫[1], 352 頁。

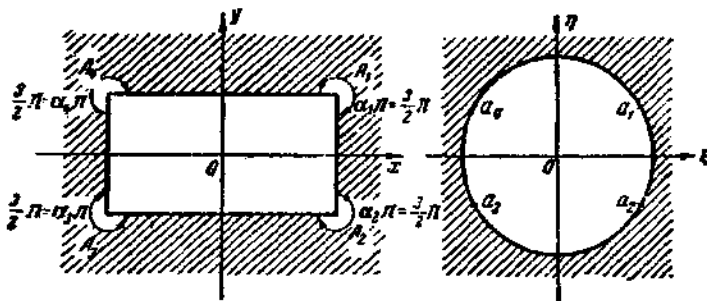


圖 1

边比等于 $\frac{A_1 A_4}{A_1 A_2} = \lambda$ (圖 1). 取坐标 xOy 的原点于矩形的中心, 也就是于区域 S 以外.

在單位圓周上 (圖 1) 对应矩形角頂 A_1, A_2, A_3 和 A_4 的点 a_1, a_2, a_3, a_4 可以这样选择, 使之保持矩形边的指定比值. 可以选择單位圓周上四个点中的三个, 例如 a_1, a_2 和 a_3 , 使它們位于坐标軸 $\xi O\eta$ 的对称位置, 即点 a_1 和 a_2 对称于 $O\xi$ 軸, 而点 a_2 和 a_3 对称于 $O\eta$ 軸. 然后, 由于对称的原则, 我們可以断定点 a_4 对 $O\xi$ 軸而言应当对称于 a_3 , 并且对 $O\eta$ 軸而言应当对称于 a_1 .

假如用 k 表示規定矩形孔边比的数值, 則

$$a_1 = e^{k\pi i}; \quad a_2 = e^{(2-k)\pi i}; \quad a_3 = e^{(1+k)\pi i}; \quad a_4 = e^{(1-k)\pi i}.$$

当 $k < \frac{1}{4}$ 时, 矩形孔就位于如圖 1 所示的位置, 即長边平行 Ox 軸; 当 $k > \frac{1}{4}$ 时, 長边就平行 Oy 軸; $k = \frac{1}{4}$ 的值与正方孔相对应.

在矩形孔的情况里 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{3}{2}$, 把得到的值 a_1, a_2, a_3, a_4 和 a_1, a_2, a_3, a_4 代入 (1.24) 并进行反演, 即用 $\frac{1}{\zeta}$ 代替 ζ , 我們就得到把区域 S (即具有矩形孔的平面) 映射到單位圓内部去的函数 $z = \omega(\zeta)^{1)}$:

1) 見 Г. Н. 薩文[1].

$$\begin{aligned}
 z = \omega(\zeta) = c \left\{ \frac{1}{\zeta} + \frac{a + \bar{a}}{2} \zeta + \frac{(a - \bar{a})^2}{24} \zeta^3 + \frac{(a^2 - \bar{a}^2)(a - \bar{a})}{80} \zeta^5 + \right. \\
 + \frac{5(a^4 + \bar{a}^4) - 4(a^2 + \bar{a}^2) - 2}{896} \zeta^7 + \\
 + \frac{7(a^5 + \bar{a}^5) - 5(a^3 + \bar{a}^3) - 2(a + \bar{a})}{2304} \zeta^9 + \\
 \left. + \frac{21(a^6 + \bar{a}^6) - 14(a^4 + \bar{a}^4) - 5(a^2 + \bar{a}^2) - 4}{11264} \zeta^{11} + \dots \right\}, \quad (1.26)
 \end{aligned}$$

其中 $a = e^{2k\pi i}$; $\bar{a} = e^{-2k\pi i}$.

显然, 假如我们在(1.26)中只取级数的有限项, 则我们不能得到准确矩形的孔, 而得到一个具有曲线边和圆角的矩形孔。因为 $|a| = 1$, 那末不难看出, 得到的级数(1.26)相当快地收敛, 并且我们永远可以选择这级数的项数来满足所要的准确度(孔周界偏离矩形的准确度), 同时可以预先给定某一数值 R_0 并决定级数(1.26)的项数以使矩形角的曲率半径小于 R_0 。然后再对矩形边偏离直线的准确度进行检查; 假如有必要, 就增加级数(1.26)的项数。这样, $R < R_0$ 的条件也就得到满足。

把 $e^{i\frac{\pi}{2}} = a$ 和 $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \bar{a}$ 代入(1.26), 我们得到带有正方孔区域的映象函数 $\omega(\zeta)$:

$$\begin{aligned}
 \omega(\zeta) = c \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{6} \zeta^3 + \frac{1}{56} \zeta^7 - \right. \\
 \left. - \frac{1}{176} \zeta^{11} + \frac{1}{384} \zeta^{15} - \frac{7}{4864} \zeta^{19} + \dots \right). \quad (1.27)
 \end{aligned}$$

把 $a = e^{i\frac{\pi}{3}}$ 代入(1.26) (就是取 $k = \frac{1}{6}$), 我们得到带有矩形孔(其边比等于 3.2:1)区域的映象函数 $\omega(\zeta)$, 就是

$$\begin{aligned}
 \omega(\zeta) = c \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{2} \zeta - \frac{1}{8} \zeta^3 - \frac{3}{80} \zeta^5 - \right. \\
 \left. - \frac{3}{896} \zeta^7 + \frac{5}{768} \zeta^9 + \frac{57}{11264} \zeta^{11} + \dots \right). \quad (1.28)
 \end{aligned}$$

当 $a = e^{i\frac{10}{36}\pi}$ 时, 我们得到带有矩形孔(边比等于 5:1)区域的映

象函数 $\omega(\zeta)$, 即

$$\omega(\zeta) = c \left(\frac{1}{\zeta} + 0.643\zeta - 0.098\zeta^3 - 0.038\zeta^5 - 0.011\zeta^7 + \dots \right). \quad (1.29)$$

2. 帶有正多边形孔的区域 类似前面对矩形孔情况的討論指出, 在 $\zeta = \xi + i\eta$ 平面上, 与平面 $z = x + iy$ 上多边形角頂 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相对应的單位圓周上的点 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 把圓周分割成相等的部分. 轉換到圓本身上时, 可以認為角頂 A_1 对应于点 $a_1 = 1$; 这时

$$\left. \begin{aligned} a_1 = 1; \quad a_2 = e^{\frac{2\pi i}{n}}; \quad a_3 = e^{\frac{4\pi i}{n}}; \quad a_n = e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}; \\ a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 1 + \frac{2}{n}, \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

其中 n 是正多边形的边数.

把 (1.30) 中 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 的值代入 (1.22), 我們得到 (令多边形的中心与單位圓的中心相对应) 映象函数:

$$\omega(\zeta) = c \int_1^\zeta \left(t - e^{\frac{2\pi i}{n}} \right)^{\frac{2}{n}} \left(t - e^{\frac{4\pi i}{n}} \right)^{\frac{2}{n}} \dots \left(t - e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}} \right)^{\frac{2}{n}} \cdot \frac{dt}{t^2}.$$

在無限远点的鄰域里把被积函数展成級数, 积分它并且进行反演, 我們得到把帶有正多边形孔的無限平面保角映射到單位圓内部的函数 $\omega(\zeta)$ ¹⁾:

$$\begin{aligned} \omega(\zeta) = c \left\{ \frac{1}{\zeta} + \frac{2}{n(n-1)} \zeta^{n-1} + \frac{n-2}{n^2(2n-1)} \zeta^{2n-1} + \right. \\ \left. + \frac{(n-2)(2n-2)}{3n^3(3n-1)} \zeta^{3n-1} + \frac{(n-2)(2n-2)(3n-2)}{12n^4(4n-1)} \zeta^{4n-1} + \right. \\ \left. + \frac{(n-2)(2n-2)(3n-2)(4n-2)}{60n^5(5n-1)} \zeta^{5n-1} + \dots \right\} \quad (1.31) \end{aligned}$$

$$n=3, 4, 5, \dots$$

为了得到与映象函数 (1.26) 或 (1.31) 相对应的孔周界的参数方程, 应当在 $\rho=1$ 的条件下把 $\zeta = \rho e^{i\theta}$ 代入这些函数中, 并且分开实部和虚部. 把 $n=3$ 代入 (1.31) 中, 我們得到帶有等边三角形孔的平面

1) 見 P. H. 薩文[1].

的映象函数 $\omega(\zeta)$:

$$\omega(\zeta) = c \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{3} \zeta^2 + \frac{1}{45} \zeta^5 + \frac{1}{162} \zeta^8 + \frac{7}{2673} \zeta^{11} + \dots \right). \quad (1.32)$$

假如把 $n=4$ 代入 (1.31), 那末我們得到帶有正方形孔的平面的映象函数(对 (1.27) 轉过角度 $\frac{\pi}{4}$):

$$\omega(\zeta) = c \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{6} \zeta^3 + \frac{1}{56} \zeta^7 + \frac{1}{176} \zeta^{11} + \dots \right). \quad (1.33)$$

欲对所研究的孔得到它在任何位置的映象函数, 应当把 $c = Re^{i\delta}$ 代入函数 (1.26) 或 (1.31), 这里 R 是实常数, 而 δ 是被研究的孔对基本位置所轉过的角度。

3. 帶有橢圓孔的区域 从复变数的理論知道, 把橢圓孔的外部区域映射到單位圓的内部可通过函数

$$z = \omega(\zeta) = c \left(\frac{1}{\zeta} + m\zeta \right) = Re^{i\delta} \left(\frac{1}{\zeta} + m\zeta \right) \quad (1.34)$$

来进行, 其中 c 是仅影响孔大小和位置的复常数。(1.34) 中的常数 $|m| \leq 1$ 規定橢圓的偏心率。例如, 当 $m=0$ 时, 橢圓轉化成圓; 而当 $c=R$ 是实数同时 $m=+1$ 或 $m=-1$ 时, 橢圓轉化为一沿 Ox 軸或沿 Oy 軸長 $4R$ 的狹縫。

給 m 以不同的值 (从 -1 到 $+1$), 我們可以得到具有任意軸比的橢圓孔。改变 R , 能够得到任意大小的橢圓孔, 改变 δ , 我們可以把橢圓孔的長軸对 x 軸轉过同 δ 改变值相等的角度 (在正方向)。

当 c 是实数时, 即当 $\delta=0$, 孔周界的方程为:

$$x = R(1+m) \cos \theta;$$

$$y = -R(1-m) \sin \theta.$$

同时假如知道橢圓的半軸 a 和 b , 那末用 k 表示橢圓位于 Oy 軸上的半軸 b 和位于 Ox 軸上的半軸 a 的比值, 我們得到¹⁾:

$$k = \frac{b}{a} = \frac{R(1-m) \sin 90^\circ}{R(1+m) \cos 0^\circ} = \frac{1-m}{1+m};$$

1) 当把帶孔的平面映射到單位圓内部时, 由于保角映象的关系使單位圓的逆时针轉向与所研究孔周界的順时针轉向相对应。