

Б.П.吉米多维奇

工科用数学分析问题解答

中 册

金恂 宋俐 段奇 编

山东科学技术出版社

一九八六年·济南

内 容 简 介

这套书汇集3193道习题的详细解答，分三册出版，内容广泛，题目类型多，适用面宽。

上册包括分析引论（函数与极限）、函数的微分法、函数的极值和导数的几何应用、不定积分、定积分；中册包括多元函数、重积分与曲线积分、级数；下册包括微分方程、近似计算。

这套书充分考虑了数学分析本身的系统性、逻辑性和严密性，注意到广大工科类大学生学习高等数学的特点和需要。无论对于初学者，还是有关课程的教师，都是一本理想的学习用书和参考书。

Б.П.吉米多维奇
工科用数学分析问题解答
中 册

金恂 宋俐 段奇 编

*

山东科学技术出版社出版
(济南市南郊宾馆西路中段)

山东省新华书店发行 山东新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 19.125印张 405千字
1986年1月第1版 1986年1月第1次印刷
印数：1—16500

书号 13195·148 定价 3.65元

出版说明

数学分析（又称微积分学）是整个高等数学的基础，它在自然科学的各个领域中，有着广泛的应用。数学分析作为一门课程，正在成为愈来愈多专业的必修课。

Б. П. 吉米多维奇是苏联有影响的教育家和数学家。他主编的《工科用数学分析中的问题和练习》一书，包括了从数学分析的各个方面精选出来的3193道习题，内容丰富，针对性强，适用面广。该书在苏联已连续印刷十次，在我国也有较大的影响。书中的许多习题，都广泛地被我国多种高等数学教材所采用。

我们邀请具有丰富教学经验的教师将该书的全部习题做了解答，其中一部分提供了多种解法；有些题目在解答时写得比较扼要，以期对广大学习数学分析的读者起到启发、引导作用，以利于培养独立思考能力和掌握解题技能技巧。有关专业的教师亦可作为教学参考书。

山东大学郭大钧教授以及孙经先同志对全书做了仔细的审校。

这本习题解答集对普通高等工科院校的大学生，以及电视大学、函授大学和其他业余大学的学生同样适用，对自学者也会有很大帮助。

本书编审过程中出现的某些误解、差错，恳请指正，不胜感谢。

1985年6月

目 录

第六章 多元函数	1
§1. 基本概念	1
§2. 连续性	12
§3. 偏导数	16
§4. 函数的全微分	31
§5. 复合函数的微分法	44
§6. 函数沿给定方向的导数与梯度	54
§7. 高阶导数与高阶微分	64
§8. 全微分的积分法	87
§9. 隐函数的微分法	97
§10. 变量代换	120
§11. 曲面的切平面与法线	135
§12. 多元函数的泰勒公式	148
§13. 多元函数的极值	157
§14. 求函数的最大值与最小值问题	185
§15. 平面曲线的奇点	204
§16. 包络	212
§17. 空间曲线的弧长	219
§18. 纯量自变量的向量函数	223
§19. 空间曲线的基本三面形	233
§20. 空间曲线的曲率与挠率	253
第七章 重积分与曲线积分	266
§1. 直角坐标下的二重积分	266

§2. 二重积分的变量代换	292
§3. 图形的面积	301
§4. 立体体积	309
§5. 曲面面积	318
§6. 二重积分在力学上的应用	326
§7. 三重积分	335
§8. 带参数的广义积分、广义重积分	358
§9. 曲线积分	371
§10. 曲面积分	408
§11. 奥斯特洛格拉斯基—高斯公式	420
§12. 场论初步	425
第八章 级数	448
§1. 数项级数	448
§2. 函数项级数	487
§3. 泰勒级数	525
§4. 傅立叶级数	571

第六章 多元函数

§1. 基本概念

1° 多元函数的概念 函数记号 设 E 是由 xOy 平面上的点 (x, y) 组成的集合, 如果对 E 中的每一个点 (x, y) , 都有唯一确定的实数 z 与之对应, 则 z 称为是两个变量 (x, y) 的(单值)函数. x, y 称为是自变量. E 称为是函数 z 的定义域(存在域). 函数关系可以记为:

$$z = f(x, y) \quad \text{或} \quad z = F(x, y) \text{等.}$$

三个或多于三个自变量的函数可以类似地定义.

函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(a, b)$ 的值, 就是当 $x = a, y = b$ 时 $f(x, y)$ 的值, 记为 $f(a, b)$ 或 $f(P)$. 就最常见的情况而言, 在直角坐标系中, 函数 $z = f(x, y)$ 的几何表示是某个曲面(图6·1).

在最简单情形下, 函数的定义域是 xOy 坐标面上由一条或几条曲

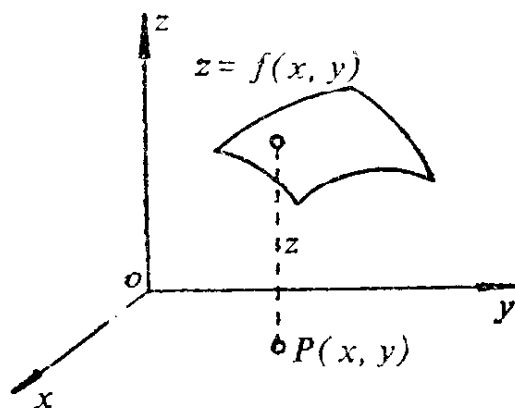


图 6·1

线（区域的边界）所围成的定义区域，它可能是有限的区域，也可能是无限的区域。

类似地，在最简单的情况下，三元函数 $u=f(x, y, z)$ 的定义域是 $oxyz$ 空间中的某个三维区域。

2° 函数的等量线与等量面 xoy 平面上由满足 $f(x, y)=C$ 的点 (x, y) 构成的曲线称为是函数 $z=f(x, y)$ 的等量线。在这条曲线的每一点处，函数取同一个值 $z=C$ （通常在图上用记号标出）。

同样地，曲面 $f(x, y, z)=C$ 称为是三元函数 $u=f(x, y, z)$ 的等量面。在这个曲面的每一点处函数取常数值 $u=C$ 。

1782. 把正四棱锥的体积 V 表示为它的高 x 与侧棱 y 的函数。

解 正四棱锥的底面边长为 $a=\sqrt{2} \cdot \sqrt{y^2-x^2}$ ，所以

$$V=\frac{1}{3}a^2x=\frac{1}{3}\cdot 2(y^2-x^2)x=\frac{2}{3}(y^2-x^2)x.$$

1783. 把正六棱台的侧面积 S 表示为其上下底边长 x , y 与高 z 的函数。

解 正六棱台的侧面为六个全等的等腰梯形，其高为

$$h=\sqrt{z^2+\frac{3}{4}(y-x)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4z^2+3(y-x)^2}$$

故
$$S=6\cdot\frac{1}{2}(x+y)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4z^2+3(y-x)^2}$$

$$=\frac{3}{2}(x+y)\sqrt{4z^2+3(y-x)^2}.$$

1784. 如果 $f(x, y)=xy+\frac{x}{y}$ ，求 $f\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ ，

$$f(1, -1).$$

$$\text{解} \quad f\left(\frac{1}{2}, 3\right) = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$f(1, -1) = 1 \cdot (-1) + \frac{1}{-1} = -2$$

$$1785. \text{ 如果 } f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}, \text{ 求 } f(y, x), f(-x,$$

$$-y), f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right), \frac{1}{f(x, y)}.$$

$$\text{解} \quad f(y, x) = \frac{y^2 - x^2}{2xy};$$

$$f(-x, -y) = \frac{(-x)^2 - (-y)^2}{2(-x) \cdot (-y)} = \frac{x^2 - y^2}{2xy};$$

$$f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{y}\right)^2}{2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} = \frac{y^2 - x^2}{2xy};$$

$$\frac{1}{f(x, y)} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

1786. 求函数 $f(x, y) = 1 + x - y$ 在抛物线 $y = x^2$ 上的点所取的值, 并作出函数 $F(x) = f(x, x^2)$ 的图形.

$$\text{解} \quad f(x, x^2) = 1 + x - x^2$$

$$F(x) = f(x, x^2) = 1 + x - x^2$$

$$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4},$$

所以 $F(x)$ 的图形是以 $(\frac{1}{2},$

$\frac{5}{4})$ 为顶点, 开口向下的抛物线 (图6.2) .

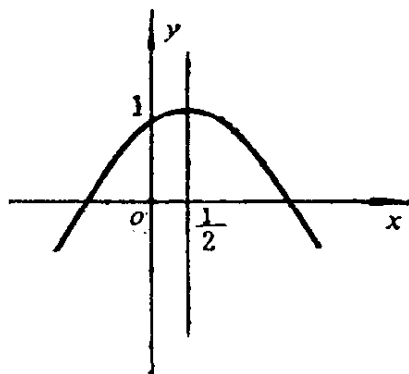


图 6.2

1787. 求函数

$$z = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2}$$

在圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 上的点的值.

$$\text{解 } z = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2} = \frac{(x^2 + y^2)^2}{1 - (x^2 + y^2)}$$

$$= -\frac{R^4}{1 - R^2} .$$

1788. 如果 $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y}$ ($x > 0, y > 0$),

试确定 $f(x)$.

$$\text{解 } f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} ,$$

$$\text{即 } f(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} \quad (x > 0) .$$

1789. 如果 $f(x+y, x-y) = xy + y^2$, 求 $f(x, y)$.

解 令 $u = x+y, v = x-y$, 则

$$x = \frac{1}{2}(u+v), \quad y = \frac{1}{2}(u-v),$$

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \frac{1}{2}(u+v) \cdot \frac{1}{2}(u-v) + \frac{1}{4}(u-v)^2 \\ &= \frac{1}{2}(u^2 - uv), \end{aligned}$$

即 $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - xy).$

1790. 设 $z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1)$. 如果当 $y = 1$ 时 $z = x$, 试确定函数 f 和 z .

解 因为当 $y = 1$ 时 $z = x$, 所以

$$x = 1 + f(\sqrt{x} - 1),$$

$$\begin{aligned} f(\sqrt{x} - 1) &= (\sqrt{x})^2 - 1 \\ &= (\sqrt{x} - 1) \cdot (\sqrt{x} - 1 + 2), \end{aligned}$$

即 $f(x) = x(x+2) = x^2 + 2x.$

又因为 $f(\sqrt{x} - 1) = x - 1,$

所以 $z = x - 1 + \sqrt{y}.$

1791. 设 $z = x \cdot f\left(\frac{y}{x}\right)$. 如果当 $x = 1$ 时 $z = \sqrt{1+y^2}$, 试确定函数 f 和 z .

解 因为当 $x = 1$ 时 $z = \sqrt{1+y^2}$, 所以

$$\sqrt{1+y^2} = f(y),$$

即 $f\left(\frac{y}{x}\right) = \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2},$

故 $z = x f\left(\frac{y}{x}\right) = x \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = x \cdot \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}}$

$$= \frac{x}{|x|} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1792. 求出并描述下列函数的存在域:

1) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; 2) $z = 1 + \sqrt{-(x - y)^2}$;

3) $z = \ln(x + y)$; 4) $z = x + \arccos y$;

5) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$;

6) $z = \arcsin \frac{y}{x}$;

7) $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$;

8) $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)(2a^2 - x^2 - y^2)}$ ($a > 0$);

9) $z = \sqrt{y \cdot \sin x}$; 10) $z = \ln(x^2 + y)$;

11) $z = \arctg \frac{x - y}{1 + x^2 y^2}$; 12) $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$;

13) $z = \frac{1}{\sqrt{y} - \sqrt{x}}$; 14) $z = \frac{1}{x - y} + \frac{1}{y}$;

15) $z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$.

解 1) 函数的存在域为满足不等式

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

的点集.

2) 函数的存在域为满足等式

$$x - y = 0$$

的点集.

3) 函数的存在域为满足不等式

$$x + y > 0$$

的点集.

4) 函数的存在域为满足不等式

$$-1 \leq y \leq 1$$

的点集.

5) 函数的存在域为满足不等式

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

的点集.

6) 函数的存在域为满足不等式

$$-1 \leq \frac{y}{x} \leq 1$$

的点集.

7) 函数的存在域为满足不等式

$$\begin{cases} |x| \geq 2, \\ |y| \leq 2 \end{cases}$$

的点集.

8) 函数的存在域为满足不等式

$$(x^2 + y^2 - a^2) \cdot (2a^2 - x^2 - y^2) \geq 0,$$

即满足不等式组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq a^2, \\ x^2 + y^2 \leq 2a^2 \end{cases}$$

的点集.

9) 函数的存在域为满足不等式 $y \cdot \sin x \geq 0$, 即满足

$$\begin{cases} y \geq 0, \\ 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots); \end{cases}$$

与 $\begin{cases} y \leq 0, \\ (2k+1)\pi \leq x \leq (2k+2)\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{cases}$
的点集.

10) 函数的存在域为满足不等式

$$x^2 + y > 0$$

的点集.

11) 函数的存在域为整个 xoy 平面.

12) 函数的存在域为除去原点的整个 xoy 平面.

13) 函数的存在域为满足不等式

$$\begin{cases} y - \sqrt{x} > 0, \\ x \geq 0 \end{cases}$$

的点集.

14) 函数的存在域为满足条件

$$\begin{cases} x \neq y, \\ y \neq 0 \end{cases}$$

的点集.

15) 函数的存在域为满足不等式

$$\sin(x^2 + y^2) \geq 0,$$

即 $2k\pi \leq x^2 + y^2 \leq (2k+1)\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$
的点集.

1793. 求下列三元函数的存在域:

1) $u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z};$

2) $u = \ln(xyz);$

3) $u = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z;$

4) $u = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}.$

解 1) 函数 u 的存在域为满足不等式

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

的点集.

2) 函数 u 的存在域为满足不等式

$$xyz > 0$$

的点集.

3) 函数 u 的存在域为满足不等式

$$|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$$

的点集.

4) 函数 u 的存在域为满足不等式

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

的点集.

1794. 作出已知函数的等量线, 并说明表示这些函数的曲面特征:

1) $z = x + y;$

2) $z = x^2 + y^2;$

3) $z = x^2 - y^2;$

4) $z = \sqrt{xy};$

5) $z = (1 + x + y)^2;$

6) $z = 1 - |x| - |y|;$

7) $z = \frac{y}{x^2};$

8) $z = \frac{y}{\sqrt{x}};$

9) $z = \frac{2x}{x^2 + y^2}.$

解 1) 等量线是平行于直线 $x + y = 0$ 的直线族.

函数 z 所表示的曲面是通过坐标原点的平面.

2) 等量线是圆心在坐标原点的一族同心圆

$$x^2 + y^2 = c.$$

函数 z 所表示的曲面是以 z 轴为旋转轴的旋转抛物面.

3) 等量线是一族等轴双曲线族

$$x^2 - y^2 = c.$$

函数 z 所表示的曲面是双曲抛物面。

4) 等量线是以直线 $x - y = 0$ 与 $x + y = 0$ 为对称轴的等轴双曲线族

$$\sqrt{xy} = c_1, \text{ 即 } xy = c \ (c \geq 0).$$

作坐标旋转变换

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \\ z = z' \end{cases}$$

得曲面的标准方程

$$z'^2 = \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2)$$

所以函数 z 所表示的曲面为二次锥面。

5) 等量线是直线族

$$x + y = c.$$

函数 z 所表示的曲面是母线平行于直线 $x + y + 1 = 0$ 的抛物柱面。

6) 等量线为正方形的周界

$$|x| + |y| = c.$$

函数 z 所表示的曲面是四棱锥的侧面。

7) 等量线是抛物线族

$$y = cx^2.$$

8) 等量线是抛物线族

$$y=c\sqrt{x}.$$

9) 等量线是一族圆心在 x 轴上且通过原点的圆

$$c(x^2 + y^2) = 2x.$$

1795. 求下列函数的等量线:

$$1) z = \ln(x^2 + y^2); \quad 2) z = \arcsin xy;$$

$$3) z = f(\sqrt{x^2 + y^2}); \quad 4) z = f(y - ax);$$

$$5) z = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

解 1) 等量线为抛物线族

$$y = c - x^2 \quad (c > 0).$$

2) 等量线为双曲线族

$$xy = c \quad (c \leq 1).$$

3) 等量线为圆心在原点的一族同心圆

$$x^2 + y^2 = c^2.$$

4) 等量线为一族平行直线

$$y = ax + c.$$

5) 等量线为通过坐标原点的直线束

$$y = cx \quad (x \neq 0).$$

1796. 求三元函数的等量面:

$$1) u = x + y + z; \quad 2) u = x^2 + y^2 + z^2;$$

$$3) u = x^2 + y^2 - z^2.$$

解 1) 等量面是平行于平面 $x + y + z = 0$ 的平面族

$$x + y + z = c.$$

2) 等量面是球心在坐标原点的一族同心球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = c.$$

3) 等量面是

$$x^2 + y^2 - z^2 = c.$$

当 $c > 0$ 时为一族绕 z 轴旋转的单叶双曲面；当 $c < 0$ 时为一族绕 z 轴旋转的双叶双曲面；当 $c = 0$ 时为绕 z 轴旋转的圆锥面。

§2. 连续性

1° 函数的极限 如果对任意的 $\varepsilon > 0$ ，都存在 $\delta > 0$ ，使得当 $0 < \rho < \delta$ （其中 $\rho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ 是点 $P'(x, y)$ 与点 $P(a, b)$ 之间的距离）时，不等式

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

成立，则称 A 是当点 P' 趋向于点 P 时函数 $z = f(x, y)$ 的极限，记为

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = A.$$

2° 连续性与间断点 如果

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = f(a, b),$$

则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(a, b)$ 处连续。

在某区域内所有的点上连续的函数称为在该区域内连续。

不满足函数 $f(x, y)$ 连续性条件的点，称为间断点，间断点可能是孤立的（孤立间断点），也可能组成一条或几条曲线（间断曲线），有时间断点集合具有更复杂的几何结构。

1797. 求下列函数的极限：

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}; \quad 2) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2};$$

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{x},$$