应用非线性振动力学

冯登泰　编

中　国　铁　道　出　版　社

1 9 8 2年·北京

内 容 简 介

《应用非线性振动力学》是一本基础理论参考书。内容包括机械的和电的各种类别非线性振动问题。对单自由度、多自由度的自治和非自治振动系统的各种定性理论和解析方法，结合工程实例，作了详尽的论述。本书文字简练，层次分明，通俗易懂，是工程技术人员、理工院校有关专业师生及研究人员较为理想的一本参考读物。

应用非线性振动力学

冯登泰 编

中国铁道出版社出版

责任编辑 何生泰

封面设计 王毓平

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 1/32 印张：17.25 字数：395 千

1 9 8 2年7月 第1版 1 9 8 2年7月 第1次印刷

印数：0001—5,000册 定价：2.10 元

序　　言

当此社会主义现代化建设的新时期，我国科学技术迎来了一个迅速发展的春天。全国人民都为此欢欣鼓舞，编者自然不能例外，亦思尽其棉薄之力。由于身居基础理论的工作岗位，感到振动科学应当逐渐普及。特别在非线性振动理论方面，应当有一本为广大技术人员可以使用的书。因此，编者边教课、边学习，搜集各家之长，编成《应用非线性振动力学》一书。

由于着重于应用，这本书和数学的非线性振动理论专门研究非线性微分方程定性问题的书，有所区别。书中略去了一些定理的数学证明，但也要使读者能念懂为基本要求。由于从强调力学出发，因之，这本书着重于物理概念的说明和具体问题的解算方法的介绍。虽然本书主要是为工程技术人员而编，但对于理科的力学专业工作者，也可能有所裨益。发挥应用力学的功效，是编者的目的。

由于编者水平有限，虽想尽力做到不出错误或少出错误，但总难免有错误和不确切之处。如蒙硕学专家或广大读者指出谬误，编者非常欢迎，极其感激。

铁道科学研究院的沈荣康同志精心绘制了本书的全部插图。该院基础理论室徐在庸同志从数学方面审查过本书初稿。他们为本书的出版，尽了很大的力。编者对他们致以衷心的感谢。

冯登泰

1981年5月28日于

铁道科学研究院基础理论室

目　录

第一章 绪 论

§1.1 振动现象与分类

自然界的物质运动中，有一种往复的、起伏的、具有重复性的、不平顺的特种运动现象，就是振动。

最简单的振动，是单摆运动。意大利的物理学家加利略(Galileo Galilei, 1564—1642)，首先研究过单摆的等周期运动。荷兰物理学家惠根斯(Christian Huygens,1629—1695)，研究过钟摆的运动特性。牛顿(Isaac Newton, 1642—1727)在经典力学中，也研究过摆的运动规律。欧拉(Leonard Euler, 1707—1783)和拉格朗日(Joseph Louis Lagrange, 1736—1813)用微分方程建立了微振动理论。最先引起人们注意的，是机械方面的振动现象。

随着电学和磁学的发展，电磁回路振荡现象被人们所利用。在无线电通讯中，在电子信息中，广泛地存在着振荡问题。由于数学方程的相同，电磁振荡和机械振动表现为统一的物理过程。

声音是由物体振动产生的。研究声学，也需要研究振动。英国物理学家瑞利(John William Rayleigh, 1842—1919)的巨著《声学》一书，系统地总结了振动理论，并提出了非线性振动问题。声音的传播表现为波，粒子有波动，光有波动，电磁也有波动。波动理论和振动理论不可分离。在近代物理学中，波动方程的出现，贯穿在许多方面。雅可比(Jacobi)方程，哈密尔顿(Hamilton)方程，施若定谔(Schrödinger)方程，……，都是著名的研究波动的偏微

分方程。

振动理论与波动理论虽然有密切的关系，但已独自发展成不同的学科。各具有既广且深的内容，而不能混同。

用线性微分方程（所谓线性微分方程，指一个变数x组成的微分方程$f\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \cdots, t\right)=0$中，$x$、$\frac{dx}{dt}$、$\frac{d^2x}{dt^2}$…等都是以一次的形式出现的，即是说，它们的幂次为1，也不互相组成乘积或商，也不以三角函数或对数形式出现，这就称为线性方程）描述的振动，称为线性振动。用非线性微分方程描述的振动，称为非线性振动。

对于固体质点系统，用有限数目的坐标，以常微分方程就可能描述其振动。这类振动，称为有限自由度的振动。对于连续固体的振动，由于它具有无限多的自由度，不能使用常微分方程，只能用偏微分方程来描述。弹性体振动，就是这类振动。无论常微分方程和偏微分方程，都可分为线性的和非线性的两大类。

其中，特别值得指出的，是常系数、线性、常微分方程描述的振动。由于该类方程的基本原理很明确，其解具有迭加性，所以这类线性振动已经被研究得很彻底，已具有完整的理论。

由于非线性振动的常微分方程和偏微分方程，种类既不可胜数，又没有普遍的解法，则非线性振动是不具备普遍的、齐全的解法的。大约从十九世纪末到本世纪上半叶，经过许多国家、许多人的研究，到目前为止，也只能对个别问题找到一些解决办法。这些解决办法，虽然十分可贵，但仍然是局部性的，非常有限的。

线性振动的一些基本概念，可以用在非线性振动中。但是，绝不能冒失地把线性振动的特点搬来用在非线性振动

中。例如，在非线性振动中，没有解的迭加原理，没有摆的等时性，没有振幅和频率的明确特性。这种区别，使振动理论在线性和非线性之间存在着不能泯灭的界限。

物体在稳定平衡位置附近的微小振动，往往可以看成线性振动。除此之外，即大的振动，大都是非线性的振动。大小振动的界限，还没有统一的标准。对于具体问题，只能作具体的分析和判断。实际中，非线性振动，多于线性振动。

我们在本书中只研究机械的和电的非线性振动问题，不研究非线性的弹性体的振动问题，也不研究非固体的非线性振动问题。而且在举例时，可能偏重于机械方面的实例。原因在于，我们只着重于介绍一些方法，而不想备举一切实例。对于从常微分方程定性理论出发的数学定理，也将尽量省去，想使本书成为非线性振动方面的一本具有应用价值的力学书，而远远不是数学书。目的是为工程技术工作者提供可以接受的参考书。

§1.2 研究非线性振动问题的两大类理论的方法

研究非线性振动问题的方法，和其他物理部门一样，可以分为实验方法和理论方法两种。

试验方法中，可以用实物进行直接测试。实物的运动条件，可以是现场的实际条件，也可以是人为的相等的条件。可以根据需要与可能，决定用什么实验办法。

不允许用实物进行直接实验时，可用缩小或放大的模型做试验。对于某些非线性电路振荡，可以很方便地用原系统的原物直接进行试验。对于某些机械的复杂系统，特别是多自由度情况下，可以把机械系统转化成为电系统，来试验它的非线性特性，称为机械系统的电模拟试验。机械量与电量

的对应，可以根据相同的微分方程，予以准确地确定。

关于实验，有专门书籍可以参考，我们不准备详谈这方面的问题。因为它不是本书的主要目标。

研究非线性振动理论的方法，分为两大类：解析法和几何法。用解析法，可以定量，兼做定性。用几何法，可以定性。可以先用几何法完成定性研究，再用解析法作定量研究，并从而检验几何法的定性结果。二者可以互相补充。当然也有一些问题，只能作定性研究，或只能作定量研究。只好各用其所可能应用的方法。

在十九世纪末期，德国的黑姆霍茨（H.Helmholtz）和英国的瑞利（J.W.Rayleigh），俄国的奥斯特罗格拉次基（M.V.Ostrogradski）和法国的卜阿松(S.Poisson)，曾经个别地研究过一些非线性振动问题。法国的邦加莱(H.Poincaré)，对于天体运动问题提出的摄动法，成为以后在非线性振动定性研究和定量研究方面的启蒙思想。俄国的李亚普诺夫（A.M.Liapúnoff）提出的运动稳定性一般问题的理论，也影响非线性振动理论的发展。以后，由于无线电技术的发展，黑维赛德（O.Heaviside）、范德颇尔（B.Van der Pol）、连那尔（A.Liénard）等人的方法，都相继出现了。他们的思想，逐渐被后来的科学家所发展，影响也不小。

在本世纪三十年代的苏联，非线性振动力学的研究，达到一个新阶段。在苏联，非线性振动力学领域有两大学派。一派是莫斯科振动研究所的曼德尔施坦(L. Mandelstam)、彭特里亚庚（L.S.Pontriagin）、帕帕列克西（N.D.Papalexi）、安德罗诺夫（A.A.Andronoff）、海京（S.E.Haikin）和维特（A.A.Witt）等人，运用邦加莱和李亚普诺夫的方法，发展了定性方法（几何法）。他们的成果，收

集在安德罗诺夫等人的《振荡理论》一书中。另一派，是基辅学派，以克雷洛夫（N.M.Kryloff）、博果留博夫（N.N.Bogoliuboff）和米特罗波尔斯基（Y.A.Mitropolski）为最著，出版了《非线性振动理论中的渐近方法》一书，把分析方法提高到一个新阶段。在五十年代出版的布尔加可夫（B.V.Bulgakoff）的《振动》一书，汇集了很有分量的分析法研究成果，驰名于世。

最后，我们应当指出一点：一切理论研究的成果，既依赖于实验又必须用实验去验证。理论结合实践，是“非线性振动”研究取得重大成果的关键。单独地偏重某一方面，都是不全面的观点。

§1.3 建立振动微分方程组的根据

研究振动问题，首先需要把物理现象根据一定的物理学规律写成数学式，即建立振动微分方程组。这步工作一定要求正确反映客观实际，否则，后面的研究将是错误的。

建立振动微分方程组，可根据力学原理和电学原理两方面来完成。我们首先介绍按照力学原理建立振动微分方程组的方法。

用力学中的牛顿定律、达朗贝尔原理、动量定理、动量矩定理、动能定理、虚位移原理和拉格朗日方程等，均可建立一般的动力学方程，其中包括质点系统的振动方程。在弹性体的振动问题中，以弹性力学基本方程为基础，结合上述的分析动力学的方法，可以建立起振动微分方程。甚至可以把拉格朗日方程推广应用到电学的振动系统中去。

对于单自由度、或两个自由度、或某些简单类型的多自由度振动问题，可以使用牛顿定律、达朗贝尔原理、动量定理或动量矩定理，就能建立起振动微分方程或方程组。对于

一般的多自由度系统，特别是复杂的多自由度系统，使用拉格朗日方程和虚位移原理才能正确地建立振动微分方程组。

§1.4 用牛顿定律和达朗贝尔原理写振动微分方程

牛顿第二定律：质点受力作用而产生加速度，加速度方向和力的方向一致，加速度的大小和力的大小成正比。用以下公式表示：

$$\vec{F} = m\vec{w}$$

式中 $\vec{F}$为力，$\vec{w}$为加速度，m为质点的质量。牛顿第三定律：质点上的作用力和反作用力，大小相等，方向相反，同在一条直线上。

达朗贝尔原理：在质点运动的任何瞬时，作用在质点上的主动力、约束反作用力和惯性力相平衡。

下面举一些简要的例子，表示怎样利用上面的原理写振动微分方程。

【例一】摆的振动

如图1.1所示，有一个自由度的摆。它的质点质量为 m，摆长为 l，在质点上作用着垂直于摆杆的外力$F(t)$，$F(t)$是时间 t 的某种函数。摆杆本身的质量不计算在内。

我们让摆离开它的稳定平衡位置ox，用广义坐标θ（偏离角）表示它的瞬时位置，即$\theta(t)$。在质点上作用着下列各力：

$F(t)$——外力；

mg——质点的重力，g为重力加速度；它可以分解为沿杆身的分力 $mg\cos\theta$ 和垂直于杆身的分力 $mg\sin\theta$；

$ml\ddot{\theta}$——惯性力。$l\ddot{\theta}$ 为摆运动的切向加速度（$\ddot{\theta}=$

$\frac{d^2\theta}{dt^2}$，为角加速度），垂直于杆身；它产生惯性力$ml\ddot{\theta}$，其方向与$l\ddot{\theta}$相反；

S——摆杆作用于质点的反作用力（杆身内的张力，与质点作用于杆身的力大小相等而方向相反）。

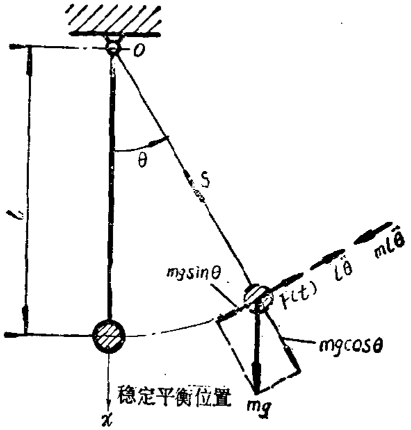

图 1.1

这里利用牛顿第二定律，因有加速度，则有作用力$f_a = ml\ddot{\theta}$。利用第三定律，作用力与反作用力大小相等而方向相反，即惯性力为反作用力（f_i），有$f_a = -f_i$，或$f_i = -f_a = -ml\ddot{\theta}$。在达朗贝尔原理中，把惯性力看成与作用力相平衡，即$f_i + f_a = 0$。

我们就可以用静力学方法写质点的平衡方程（图1.1）：

$$\text{切向：}F(t) - ml\ddot{\theta} - mg\sin\theta = 0 \tag{1.1}$$

$$\text{径向：}S - mg\cos\theta = 0 \tag{1.2}$$

上面的方程（1.2）不描写振动。只有方程（1.1）是描写振动的：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=\frac{1}{ml}F(t) \tag{1.3}$$

一般说来，方程（1.3）是非线性振动微分方程。只有在θ角很小时，可令$\theta\doteq\sin\theta$，因而(1.3)才有可能变成线性微分方程(此时$F(t)$为零或为简谐外力）。

【例二】双质点振动系统

按照客观的真实情况，如图 1.2 所示的双质点弹簧系统中，弹簧的刚度和位移有一定的关系，阻力也不一定和运动速度成正比。我们用x_1和x_2分别表示质点m_1和m_2在运动中的瞬时位置。它们都是时间t的函数$x_1(t)$、$x_2(t)$。坐标轴o_1x_1和o_2x_2的原点o_1和o_2都取在质点的稳定平衡位置上。用$C_1(x_1)$和$C_2(x_2-x_1)$表示弹簧的刚度，用$R_1(\dot{x}_1)$和$R_2(\dot{x}_2)$表示质点遇到的内外阻力。在这里，$\dot{x}_1=\frac{dx_1}{dt}$，$\dot{x}_2=\frac{dx_2}{dt}$，为速度。它们分别有加速度$\ddot{x}_1=\frac{d^2x_1}{dt^2}$和$\ddot{x}_2=\frac{d^2x_2}{dt^2}$，而质点偏离各自的稳定平衡位置，处于瞬时位置$x_1$和$x_2$上。

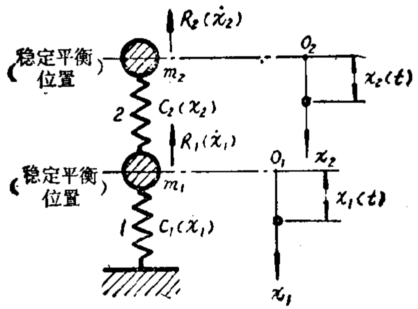

图 1.2

我们利用牛顿第二定律，$f_1=m_1\ddot{x}_1$，$f_2=m_2\ddot{x}_2$，即作用力f_1和f_2分别与加速度$\ddot{x}_1$和$\ddot{x}_2$成正比。利用第三定律，惯性力f_{i1}和f_{i2}（反作用力）与作用力f_1和f_2大小相等而方向相