全国高等农业院校教材

概率论与数理统计

北京农业大学　主编

农　业　出　版　社

全国高等农业院校教材

概率论与数理统计

北京农业大学　主编

农　业　出　版　社

主编　裴鑫德　北京农业大学
编者　袁志发　西北农业大学
　　　陈维博　北京农业大学

全国高等农业院校教材
概率论与数理统计
北京农业大学　主编
*　*　*
责任编辑　吕相海

农业出版社出版（北京朝阳区农营路）
新华书店北京发行所发行　　农业出版社印刷厂印刷

850×1168毫米32开本　9.25印张　220千字
1987年10月第1版　1987年10月北京第1次印刷
印数　1—12,500册

统一书号　13144·335　　定价 1.85 元

前　　言

本书是按照1982年农牧渔业部委托审订的全国高等农业院校数学课程《概率论与数理统计》教学大纲要求，为高等农业院校编写的教材．概率论与数理统计是高等农业院校一门重要基础课，它不但与生物统计、田间实验设计、数量遗传、数量生态以及农业经济与管理等许多课程有密切关系，是它们的重要基础，而且也是现代农业科学试验研究的重要理论基础和必需的手段、方法．随着电子计算技术的发展，概率论与数理统计的理论和方法已日益广泛地运用到农业科学和生物科学的各个领域，因此这门课程已成为培养现代农业科学技术人才要求必须掌握的基础课程之一．

本书共分九章，主要介绍概率论与数理统计的基础知识，在具体内容的安排上注意了高等农业院校的教学实际情况和现代农业科学发展的需要．全书大部分内容只要求读者具有一定的微积分基础知识即可顺利阅读．个别部分需要有一些线性代数知识，没学过线性代数的初学者这部分可以先不读．在文字叙述上力求简明易懂，便于自学．为了掌握和运用基本理论和公式，书中列举了较多的例题并在各章后配有一定数量的习题供课外练习，书后附有习题答案供参考．本书可供50左右学时讲授，具体使用时还可根据各专业的不同情况对内容做必要的变动或增减．

本书除可供高等农业院校作为教材外，亦可做为生物、医学等有关专业的参考书以及农业科技工作者的参考书．

本书由裴鑫德同志负责主编，参加编写的还有袁志发和陈维博同志。

由于水平所限，书中难免有不妥甚至错误之处，望读者批评指正。

编者

1986年4月

目　录

第一章　概率论的基本概念

引　言

在自然界和人类社会中存在着两类不同的现象：确定性现象和随机现象。如何来区分这两类现象呢？原来人们对于现象的观察总是在一组条件的实现下进行的，这种方法通常叫做试验，条件实现一次就是一次试验，观察的结果就是试验的结果。对某些事物来说，如果每次试验都能得到同一的结果。例如，水在标准大气压下加热到 100℃ 必然沸腾；纯种紫花豌豆的后代一定开紫花；等等。像这种在试验中必然会发生的事情叫做**必然事件**。又如，石头能变成小鸡是观察不到的；纯种紫花豌豆的后代不开紫花是不可能的，等等。像这种在试验中不可能发生的事情叫做**不可能事件**。必然事件和不可能事件虽然形式相反但实质相同，即每次试验的结果是相同的，这种现象我们称之为**确定性现象**。而另外有些事物，则表现为每次试验的结果有多种可能，在每次试验之前无法予知确切的试验结果，即呈现出不确定性，但在大量重复试验中却能呈现出某种规律性，即统计规律性，这类现象叫做**随机现象**。观察随机现象的试验称之为**随机试验**。随机试验可以在相同的条件下重复进行；每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；进行试验之前不能确定哪一个结果会出现。在随机试验中，对一次试验可能出现也可能不出现，而在大量重复试验中又具有统计规律性的事情，叫做此随机试验的

随机事件，简称**事件**。例如，在相同条件下抛同一枚硬币，可能正面向上，也可能反面向上，在每一次抛掷前不能预先断言哪面一定向上，但若大量重复抛一枚硬币，得到正面向上的次数约占半数，这里"抛一枚硬币得正面"便是一个随机事件。又如，在适宜条件下每穴播三粒玉米种子的试验中，三粒全出苗，两粒出苗一粒不出苗等都是随机事件，出苗数不多于3是必然事件，出苗数大于3是不可能事件。必然事件和不可能事件没有不确定性，但为今后讨论方便起见，仍把它们看作是随机事件的特殊情况。

事件一般用大写的A，B，C等来表示。必然事件与不可能事件分别规定用字母Ω和ϕ来表示。

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科。由于随机现象广泛地存在于自然界和人类社会中，因而概率论与数理统计的理论和方法已广泛应用于工业、农业、军事和科学技术等各个领域中。另外，概率论和数理统计与其它学科相结合又已发展成不少新的边缘学科，因此，它又是许多新的重要学科的基础。

高等农业院校，设置概率论与数理统计课程，既为专业基础课和专业课打下必要的基础，同时也是为社会主义农业现代化服务的农业科技人员所必须掌握的基础知识。

§1　样本空间与事件的运算

一、样本空间

为了揭示随机事件的统计规律性，我们必须深入地讨论随机试验。

设E为一随机试验，以ω表示它的一个可能结果，称ω为它的

一个**基本事件**，亦可称为**样本点**. E的所有基本事件所组成的集合叫做E的**样本空间**，记为$\Omega=\{\omega\}$。对一个具体的随机试验来说，必须根据试验的内容明确它的样本空间，这是至为重要的。

例1 抛一枚硬币观察正反面出现情况。一次试验就是将硬币上抛一次，试验的可能结果有两个：ω_1—正面向上，ω_2—反面向上，即有两个基本事件，这个随机试验的样本空间为$\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$。

例2 将一枚硬币抛两次，观察正反面出现情况。在这个试验中，上抛两次硬币是一次试验，根据正反面出现的次序试验有四种可能结果：ω_1—(正，正)，ω_2—(正，反)，ω_3—(反，正)，ω_4—(反，反)。样本空间为$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$。

例3 在适宜的条件下，每穴播两粒玉米种子，观察出苗情况。若用甲，乙代表这两粒种子，则出苗情况有四种可能：ω_1—(甲出，乙出)，ω_2—(甲出，乙不出)，ω_3—(甲不出，乙出)，ω_4—(甲不出，乙不出)。样本空间为$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$。

例4 记录某电话交换台一分钟内接到的呼唤次数。由于难于规定一个呼唤次数的上界，所以每一个非负整数都是一个可能结果，故样本空间$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$。

例5 在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命，以小时为单位，每一个非负实数t都是一个样本点，则$\Omega=\{t\,|\,t\geqslant 0\}$。

例6 测量某块地中小麦的株高x，以厘米为单位，a表示株高的下界，b表示株高的上界，则$\Omega=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$。

例7 某一火炮向一目标射击，观察落点的分布情况。每射击一次试验结果就是炮弹落在xoy座标平面内的某区域G中的某一点(x, y)，则样本空间为$\Omega=\{(x, y)\,|\,(x, y)\in G\}$。

二、事　件

基本事件是随机试验的不可再分割的事件，事件是由若干个基本事件共同组成的，即事件是样本空间Ω的某个子集。我们说某事件A发生，就是指当且仅当A中的某一样本点发生。例如：

在例 3 中，事件A：“只有一粒出苗”，则$A=\{\omega_2, \omega_3\}=$ {(甲出，乙不出)，(甲不出，乙出)}。事件B：“至少一粒出苗”，则$B=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}=$ {(甲出，乙出)，(甲出，乙不出)，(甲不出，乙出)}。

在例 4 中，事件A：“每分钟内接到的呼唤次数不多于 3，则$A=\{0, 1, 2, 3\}$。事件B：“每分钟内接到的呼唤次数不少于 2，则$B=\{2,3,\cdots\}$。

在例 5 中，事件A：“寿命大于100小时，小于1000 小时”，则$A=\{t\mid 100<t<1000\}$。

特别地，必然事件就是样本空间Ω，不可能事件就是空集ϕ。例如：

在例 3 中，$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$是必然事件，因为在每次试验中必有$\Omega$中的样本点出现。事件：“出苗数多于 2”是不可能事件，因为在每一次试验中它都不会发生，故它是$\Omega=\Omega(\omega)$中的空集ϕ。

三、事件的运算

客观世界中的事件往往不是孤立的，相互之间常常存在着一定的关系。对于事件之间的相互关系的研究，将会帮助我们去认识复杂的事件。下面，我们介绍事件间的一些重要关系与事件的运算。

设试验E的样本空间为Ω, A, B, $A_K(K=1, 2,\cdots)$是E的事

件。

（1）**事件的包含**：如果事件A发生必然导致事件B发生，则称**事件B包含事件A**，记作：$A \subset B$。在例5中，如果$A=\{t|10<t<100\}$，$B=\{t|5<t<500\}$，则显然$A \subset B$。

（2）**事件的相等**：如果$A \subset B$且$A \supset B$，则称事件A与事件B**相等**，记作：$A=B$。

（3）**事件的和**：事件A与事件B至少有一个发生的事件称为**事件A与事件B的和**，记作：$A \cup B$。

类似地，事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$中至少有一个发生的事件称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$的和，记作：$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$，简记作：$\bigcup_{k=1}^{n} A_K$；同样，事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$中至少有一个发生的事件称为$A_1, A_2, \cdots, A_n \cdots$的和，记作：$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$，简记作：$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_K$。例如，事件$A=\{t|10<t<100\}$，$B=\{t|50<t<200\}$，则$A \cup B=\{t|10<t<200\}$。又如，事件$A$："两粒都出苗"，事件$B$："只有一粒出苗"，则由例3，显然$A \cup B=\{\omega_1\} \cup \{\omega_2, \omega_3\}=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$，即为事件"至少有一粒出苗"。

（4）**事件的交**：事件A与事件B同时发生的事件称为**事件A与事件B的交（或积）**，记作：$A \cap B$或AB。类似地，可以定义$A_k(k=1, 2, \cdots, n)$的交：$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = A_1A_2\cdots A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$；以及$A_k(k=1, 2, \cdots)$的交：$A_1 \cap A_2 \cap \cdots = A_1A_2\cdots = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$。例如，$A=\{t|10<t<100\}$，$B=\{t|50<t<200\}$，则$A \cap B=\{t|50<t<100\}$。又如，$A=\{\omega_1\}$，$B=\{\omega_2, \omega_3\}$，则$A \cap B=\phi$。

（5）**事件的差**：事件A发生而事件B不发生构成的事件

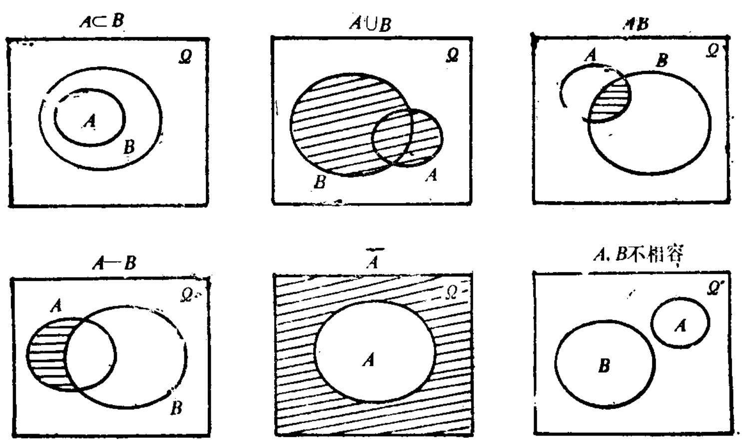
称为事件 A 与事件 B 的差，记作：$A-B$。例如，$A=\{t|10<t<100\}$，$B=\{t|50<t<200\}$，则 $A-B=\{t|10<t\leqslant 50\}$。

（6）互不相容的事件：如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\phi$，则称事件 A 与事件 B 是**互不相容的或互斥的。**例如，如果 $A=\{t|t\geqslant 100\}$，$B=\{t|20<t<100\}$，则 $AB=\phi$，故 A 与 B 互不相容。

（7）互逆事件：如果事件 A 与事件 B 必发生其一，但又不能同时发生，即 A 与 B 满足条件

$$A\cup B=\Omega,\quad AB=\phi$$

则称事件 A 与事件 B **互逆**，或称 A 是 B 的**对立事件**（或 B 是 A 的对立事件），记作：$A=\bar{B}$（或 $B=\bar{A}$）。例如，在例 3 中，$A=\{\omega_1\}$，$B=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$，因为 $A\cup B=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}=\Omega$，$AB=\{\omega_1\}\cap\{\omega_2,\omega_3,\omega_4\}=\phi$，故 A 与 B 互逆，即 $A=\bar{B}$，或 $B=\bar{A}$。又如，在例 5 中，如果 $A=\{t|0\leqslant t<100\}$，$B=\{t|100\leqslant t<+\infty\}$，因 $A\cup B=\{t|t\geqslant 0\}=\Omega$，$AB=\phi$，故 $A=\bar{B}$，$B=\bar{A}$。



（$A\cup B$, AB, $A-B$, $\bar{A}$ 为图中阴影部分）

图 1—1

由集合的运算性质，显然，$\overline{(\bar{A})}=A$，$\bar{A}\cup A=\Omega$，即 $\bar{A}$ 是 A 的对立事件，且在任何一次试验中，A 与 $\bar{A}$ 必有一个且仅有一个发生。

相互对立的事件一定是互不相容的，但反过来一般并不成立。例如，在灯泡寿命的试验中，如果 $A=\{t|t\geqslant 100\}$，$B=\{t|20<t<100\}$，则 $AB=\phi$，但 $A\cup B=\{t|t>20\}\neq\Omega=\{t|t\geqslant 0\}$。故虽 A 与 B 互不相容，但并不相互对立。

事件的关系及运算可以用直观示意图来表示。如图1—1。

从上面讨论中可以看到，概率论中事件之间的关系与运算和集合论中集合之间的关系与运算是一致的。为了便于对照列成表1—1。

表 1—1

符号	概率论	集合论
Ω	样本空间，必然事件	全集
ϕ	不可能事件	空集
ω	基本事件（样本点）	元素
A	事件	子集
$\bar{A}$	A 的对立事件	A的余集
$A\subset B$	事件A发生导致事件B发生	A是B的子集
$A=B$	事件A与事件B相等	A与B相等
$A\cup B$	事件"A与B至少有一个发生"	A与B的和集
AB	事件"A与B同时发生"	A与B的交集
$A-B$	事件"A发生但B不发生"	A与B的差集
$AB=\phi$	事件A和事件B互不相容	A与B没有相同的元素

§2 概率的统计定义与古典概型

一、概率的统计定义

随机事件就个别试验而言，我们很难预料其结果，但在多次重复试验中，却能呈现出明显的规律性。

如果在 n 次重复试验中事件 A 出现 μ 次，则比值 $\frac{\mu}{n}$ 称为事件 A 在 n 次试验中出现的**频率**，记作 $f_n(A)$。

例 1 考察某品种小麦的发芽情况时，分别抽取 5 粒、10粒、50 粒、100 粒、300 粒、600粒 、800粒，在相同的条件下进行观察，得到如表 1—2 的统计结果。

表1—2

种子总粒数 n	5	10	50	100	300	600	800
发芽种子数 μ	5	8	44	91	272	542	723
种子发芽频率 $\frac{\mu}{n}$	1.000	0.800	0.880	0.910	0.907	0.903	0.904

例 2 历史上蒲丰(Buffon)、皮尔逊 (K. Pearson)等人进行过抛一枚硬币的试验来观察“正面向上”这一事件发生的规律，得到如表 1—3 的结果。

表1—3

试验者	抛掷次数 n	正面向上次数 μ	正面向上频率 $\frac{\mu}{n}$
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

从上述两例的统计结果看，在多次重复试验中，同一事件发生的频率，虽不尽相同，但却在一个固定的数值附近摆动，呈现出一定的稳定性（例 1 在 0.9 附近摆动，例 2 在 0.5 附近摆动），而且这种稳定性随着试验次数的增加表现得愈加显著。频率的这种稳定性告诉我们：随机事件在一次试验中虽带有不确定性，但它在一次试验中发生的可能性是有大小之分的，即频率稳定于较小值者发生的可能性较小，频率稳定于较大值者发生的可能性较大。这种度量事件发生可能性大小的数值，我们称之为相应事件的概率。下面我们给出概率的统计定义：

定义 1　在不变的一组条件 s 下，重复进行 n 次同一试验时，如果随机事件 A 发生的次数为 μ，当试验的次数 n 很大时，频率 μ/n 稳定地在某一固定数值 p 的附近摆动；而且一般说来这种摆动幅度的大小随着试验次数的增多愈来愈小，则称数值 p 为随机事件 A 的概率，记作

$$P(A)=p.$$

在重复试验中，事件 A 发生的频率在 $P(A)$ 附近摆动，因此，频率可以作为 $P(A)$ 的一个估计值。

设随机试验 E 的样本空间为 Ω，在 n 次试验中事件 A 出现的频率为 $f_n(A)=\frac{\mu}{n}$，则关于频率有以下性质：

(i)　$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(ii)　$f_n(\Omega)=1$；

(iii)　设 A_1，A_2，…是两两互不相容的事件，则

$$f_n(\bigcup_{i=1} A_i)=\sum_{i=1} f_n(A_i).$$

证明　(i) 因为 $0\leqslant\mu\leqslant n$，所以有 $0\leqslant\frac{\mu}{n}\leqslant 1$，即有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.

(ii) 因为 Ω 为必然事件，所以 $\mu=n$，故 $f_n(\Omega)=1$.