

奇异积分算子

〔阿根廷〕 A. P. 卡尔台龙著 伍卓群译

上海科学技术出版社

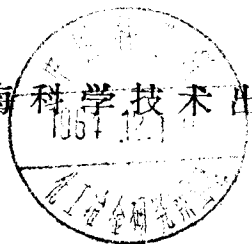
51.6411
170

奇异积分算子 及其在 双曲微分方程上的应用

〔阿根廷〕 A. P. 卡尔台龙 著

伍卓群 译
谷超豪 校

上海科学技术出版社



內 容 提 要

奇异积分算子是近年来发展起来的研究偏微分方程的有力工具。本书叙述了奇异积分算子的基本性质和它对双曲型方程的应用。内容包括一维、 n 维 Hilbert 变换, Riesz 变换, 具偶核的奇异积分, 核的 Fourier 变换, n 维球面调和函数, 空间 L^p, β 型算子及完全双曲方程等。

本书可供理科大学数学、力学、物理等系师生参考, 也供有关研究人员参考。

INTEGRALES SINGULARES Y SUS APLICACIONES A ECUACIONES DIFERENCIALES HIPERBOLICAS

Alberto P. Calderón

Universidad de Buenos Aires. 1960

奇异积分算子 及其在 双曲微分方程上的应用

伍卓群 译

上海科学技术出版社出版 (上海瑞金二路 450 号)
上海市书刊出版业营业许可证出 093 号

商务印书馆上海厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32 印张 3 12/32 排版字数 88,000
1964 年 11 月第 1 版 1964 年 11 月第 1 次印刷
印数 1—5,500

统一书号 13119·618 定价(科六) 0.55 元

譯 者 序

本书是 A. P. Calderón 用西班牙文写成的一个讲义。由于很想学习这个讲义中所述的理論，同时考虑到这个讲义的原文本在国内几乎是唯一的，而感兴趣的人又很多，在王柔石先生的鼓励下，鼓起勇气进行了这个讲义的翻譯工作。譯者初学西班牙文，虽然有心力求在大小地方都符合作者的原意，但終難达到完完全全的直譯，翻譯上的錯誤一定不少，希望讀者批評指正。

原书上一些記号的錯落，翻譯时凡发现到的都改正。个别段落作了一点小的变动。此外，还添加了少量的足注。有不妥处，也請讀者指正。

伍 卓 群 1963 年 2 月 13 日

目 录

譯者序

引 言	1
§ 1. 一維 Hilbert 变换	5
§ 2. n 維 Hilbert 变换 (奇核)	9
§ 3. 特殊情形. Riesz 变换	2
§ 4. 具偶核的奇异积分	5
§ 5. 核的 Fourier 变换的研究	10
§ 6. n 維球面調和函数	14
§ 7. 函数空間 L_k^p	13
§ 8. β 型算子	11
§ 9. 完全双曲方程	12
空間 $\mathcal{L}$	33
空間 $\overline{\mathcal{L}}$	70
空間 $\overline{\mathcal{L}}$ 上的綫性算子	71
向量值函数的空間 $\overline{\mathcal{L}}$	84
发展双曲方程	84
完全双曲微分方程	95
文 献	104

引 言

記号 以 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 等表 n 維 Euclid 空間 E^n 中的点, 并采用下面的記号:

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n),$$

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \Sigma = \{x; |x| = 1\}.$$

E^n 中的体积元素記为 dx , Σ 上的面积元素記为 $d\sigma$. 对 $f(t)$ ($t \in E^n$), 以 $Ff(x)$ 表 f 的 Fourier 变换:

$$Ff(x) = \int f(t) e^{2\pi i x \cdot t} dt = \hat{f}(x).$$

$\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$, $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, $p = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ 等表 n 个非負整数的有序組.

其他記号:

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha = D^\alpha$$

$$= \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!.$$

以 C^∞ 表无穷次可微函数类, $\mathscr{D}$ 表 C^∞ 之具紧支集的子类, C^n 表 n 次連續可微函数类, $\mathscr{D}^n$ 表 C^n 之具紧支集的子类.

S 和 S' 分別表 C^∞ 中剧減子类 and 它的对偶, $\mathscr{D}'$ 表 $\mathscr{D}$ 的对偶, S' 和 $\mathscr{D}'$ 中的元素都是广义函数.

a) 任一在单位球面上的积分为零的 $-n$ 阶齐次函数 k (即对任一 $a > 0$, $k(ax) = a^{-n} k(x)$), 定义一卷积形奇异积分算子:

$$Kf(x) = \int_{E^n} k(x-y) f(y) dy = (k * f)(x), \quad (1)$$

其中积分了解为取主值. 当 $n=1$ 时, 这种形状的算子除常数因子

外是唯一的,它就是 Hilbert 变换.

这种算子与平移可交换,即,若令 $t_a f(x) = f(x-a)$, 则

$$K t_a f = t_a K f.$$

形式地可得(以后会证明这个结果)

$$F(Kf) = F(k) F(f). \quad (2)$$

式中 $F(k)$ 为一零阶齐次函数;这是因为,若记 $k_\lambda = k(\lambda t)$, 则有

$$(F k_\lambda)(y) = \lambda^{-n} (F k) \left(\frac{y}{\lambda} \right).$$

而按假设, k 是 $-n$ 阶齐次函数.

若核 k 在 $E^n - \{0\}$ 中还属于 C^∞ , 则 $F(k)$ 也属于 C^∞ , 且其在 Σ 上的平均值为零. 反之,任一在 Σ 上的平均值为零且属于 C^∞ 的零阶齐次函数都是某一在 Σ 上的平均值为零且属于 C^∞ 的 $-n$ 阶齐次函数的 Fourier 变换.

具有这种性质的核所产生的由 (1) 定义的算子,对普通乘法运算并不封闭;事实上

$$F(K_1 K_2 f) = F(k_1) F(K_2 f) = F(k_1) F(k_2) F(f), \quad (3)$$

虽然 $F(k_1) F(k_2)$ 是零阶齐次的,且属于 C^∞ , 但其在 Σ 上的平均值不一定为零.

然而, $F(k_1) F(k_2) - (F(k_1) F(k_2) \text{ 在 } \Sigma \text{ 上的平均值})$, 如上面所指出,却是某一 k_3 的 Fourier 变换 $F(k_3)$.

因此, $F(k_1) F(k_2) = F(k_3) + c$. 取 Fourier 反变换便得

$$K_1 K_2 f = (c + K_3) f.$$

这暗示我们更一般地去定义算子 K :

$$K f(x) = c f(x) + \int_{E^n} k(x-y) f(y) dy, \quad (4)$$

这种算子显然构成一个代数.

定义 K 的符号为 $\sigma(K) = c + F(k)$. 于是由 (4) 知 $F(Kf) = \sigma(K) F(f)$, 因而按前所指出,符号与算子之间存在一个一一对应.

b) 因为 $F(k) \in C^\infty$, 并且是零阶的, 所以它在 E^n 中有界, 因

此对于 $f \in L^2(E^n)$, 根据(4)并运用 Parseval 等式可得

$$\|Kf\|_2 \leq (\|F(k)\|_\infty + |c|) \|f\|_2.$$

以后将証明对所有 $p \in (1, \infty)$, Kf 是 (p, p) 型的. 这个結果对 $p=1, \infty$ 不成立.

算子 K 的連續性在熟知的 Orlicz 空間中也可証明.

若 f 滿足阶为 α 的 Hölder 条件:

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|^\alpha,$$

則对 $0 < \alpha < 1$, K 关于 f 的熟知模是連續的. 但对 $\alpha=1$ 这个結果不成立.

c) 下面进行一些形式运算, 它們对 $\mathscr{D}$ 中函数当然是可行的. 根据公式

$$\left(F \frac{\partial f}{\partial x_h}\right)(x) = -2\pi i x_h (Ff)(x), \quad (5)$$

并按

$$F(\Delta f) = 2\pi |x| F(f) \quad (6)$$

定义算子 A , 我們有:

$$F\left(\frac{\partial f}{\partial x_h}\right)(x) = -ix_h |x|^{-1} (F\Delta f)(x).$$

連續运用 A , 得到:

$$F(\Delta \Delta f) = 2\pi |x| F(\Delta f) = 4\pi^2 |x|^2 F(f) = -F(\Delta f),$$

故

$$A = (-\Delta)^{\frac{1}{2}};$$

此外, 由(5)和(6)知算子 A 与 $\frac{\partial}{\partial x_h}$ 可交換: $A \frac{\partial}{\partial x_h} = \frac{\partial}{\partial x_h} A$. 連續应用(5)可得:

$$F(D^p f) = (-i)^{|p|} x^p |x|^{-|p|} F(\Delta^{|p|} f), \quad (7)$$

因为 $x^p |x|^{-|p|}$ 是零阶齐次函数, 在 $E^n - \{0\}$ 中属于 C^∞ , 故由 a) 中所述,

$$D^p f = (-i)^{|p|} K \Delta^{|p|} f, \quad (8)$$

其中 K 形如(4), $\sigma(K) = c + F(k) = x^p |x|^{-|p|}$.

这样一来, 算子 D^p 就分解成先用同一“不好”的算子 A (A 无

界,它定义在一稠密集合上)連續作用,然后用一連續算子 K 作用.

d) 現在考虑常系数齐次微分算子,我們有:

$$Lf = \sum_{|p|=m} a_p D^p f = \left(\sum_{|p|=m} a_p (-i)^m K_p \right) \Delta^m f = (-i)^m K \Delta^m f, \quad (9)$$

其中 K 是符号为 $\sigma(K) = \sum_{|p|=m} a_p x^p |x|^{-m} = P_L(x) |x|^{-m}$ 的算子,而 $P_L(x) = \sum_{|p|=m} a_p x^p$ 是 L 的特征多项式.

如果 $P_L(x) = 0$ 当且仅当 $x=0$ 时成立,微分算子 L 是椭圆的. 在这种情形下, $(\sigma(K))^{-1}$ 是一零阶齐次函数,在 $E^n - \{0\}$ 中属于 C^∞ , 因而它是某一算子 K^{-1} 的符号.

显然, $KK^{-1} = K^{-1}K = I$; 事实上,

$$\sigma(KK^{-1}) = \sigma(K) \sigma(K^{-1}) = \sigma(K) (\sigma(K))^{-1} = 1 = \sigma(I).$$

对于具实系数的椭圆算子 L , 易見 $P_L(x)$ 是偶次的: $m=2r$. 因此, $Lf = K \Delta^r f$, 而方程 $Lf = g$ 可化成 $\Delta^r f = K^{-1}g$, 或者說归结为解方程 $\Delta f = h$.

e) 現在将 d) 推广到变系数的情形, 这里提供的方法是很有趣的. 設 $L = \sum_{|p|=m} a_p(x) D^p$, 于是

$$Lf = \left(\sum_{|p|=m} (-i)^m a_p(x) K_p \right) \Delta^m f = (-i)^m K \Delta^m f. \quad (10)$$

Kg 中每一项都形如:

$$a_p(x) K_p g = a_p(x) C_p g(x) + \int a_p(x) k_p(x-y) g(y) dy. \quad (11)$$

这暗示我們將由(4)所給出的 K 的定义推广成

$$Kg = b(x)g + \int k(x, x-y)g(y)dy, \quad (12)$$

其中 $b(x)$ 有界且具有以后我們会指出的某些性质, $k(x, z)$ 对 z 是 $-n$ 阶齐次的, 对每一 z , 关于 x 是有界的, 而对每一 x , 在球面 $|z|=1$ 上的积分为零.

K 的符号为 $\sigma(K) = \sigma(K(x, t)) = b(x) + F'_z(k(x, z))(t) = b(x) + (k(x, z) \text{ 关于 } z \text{ 的 Fourier 变换})(t)$. 因为 σ 对仅依赖于 x 的因子是綫性的, (10) 中的 K 的符号是 $\sigma(K) = \sum a_p(x) t^p |t|^{-|p|}$, 换言之, K 的符号就是 L 的特征多项式除以 $|t|^{-m}$.

若 $k(x, z)$ 对 z 是属于 C^∞ 的, 并且还满足其他一些条件, 则 K 具有如 b) 中所述的連續性.

应该指出, 普通乘积一般不是同型算子, 并且一般不可交换. 此外, 因为 K 在 L^2 中有界, 我們可由

$$(Kf, g) = (f, K^*g), \quad f, g \in L^2$$

定义 K 的共轭, 但是一般說来, K^* 不是 K 的同型算子 (当 K 由 (4) 定义时, K^* 与 K 同型).

如在 a) 中所指出的一样, 在算子与符号之間存在一个一一对应. 因此我們可以这样定义 K_1 和 K_2 的准乘积 $K_1 \circ K_2$, 它的符号为 $\sigma(K_1 \circ K_2) = \sigma(K_1) \sigma(K_2)$. 对于这种运算, 算子 K 的集合构成一可交换代数.

类似地, K 的准共轭 $K^\#$ 定义作以 $\sigma(K^\#) = \overline{\sigma(K)}$ 为符号的算子. 显然, 若 $|(\sigma(K))(x, z)| > \varepsilon > 0$, 則存在 K 的准逆 ^{-1}K , 它由 $\sigma(^{-1}K) = (\sigma(K))^{-1}$ 所定义, 并且显然 $K \circ ^{-1}K = ^{-1}K \circ K = I$.

記 $L_h^\alpha = \{f; D^\alpha f \in L^p \text{ 当 } 0 \leq \alpha \leq h \text{ 时}\}$, 这里的微商了解为广义函数意义下的微商. 在 L_h^α 中定义适当的模. 将 L_h^α 变到 L_{h+1}^α 的算子 R 称为正规的.

可以証明 $\dot{P} = K_1 \circ K_2 - K_1 K_2$ 和 $A = K^* - K^\#$ 是正规的. 事实上, 因为 AA , AP 和 AA , PA 在所有 L^p ($1 < p < \infty$) 中是有界的, 故

$$\frac{\partial}{\partial x_h} Pf = -i[K_{(h)}A]Pf = -iK_{(h)}(AP)f$$

有界, 作为例子, 这就証明了 P 变 L^p 到 L_h^p .

因此, 将乘积換成准乘积, 共轭換成准共轭, 而引出的“誤差”是一正规算子; 换言之, mod 一正规算子, $P \equiv 0$, $K^* \equiv K^\#$.

至于在普通乘积意义下的逆, 可以說当 $\sigma(K) \neq 0$ 时, 如果 K 沒有逆, 則存在一正规算子 R 使得 $K + R$ 有逆.

§ 1. 一維 Hilbert 变换

以 $H_+(\varepsilon > 0)$ 表由

$$H_\varepsilon f = \tilde{f}_\varepsilon = \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t} dt$$

給出的算子. 运用 Hölder 不等式就知它对任意 $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, 有定义.

定理 若 $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, 則

a) $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p \leq A_p \|f\|_p$, 其中常数 A_p 与 ε 和 f 无关;

b) 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\tilde{f}_\varepsilon$ 于 L^p 中存在极限, 記作 $\tilde{f}$;

c) $\|\tilde{f}\|_p \leq A_p \|f\|_p$, 其中 A_p 是 a) 中的相同常数.

[証明]

a) 因为 H_ε 是綫性的, 故只須对非負函数去証明 a).

設 $f \geq 0$, $f_n(x)$ 在 $|x| \leq n$ 上等于 $f(x)$, 而在其他部分为零; 显然在每点, $\tilde{f}_{n,\varepsilon}(x) \rightarrow \tilde{f}_\varepsilon(x)$. 据 Fatou 定理,

$$\int |\tilde{f}_\varepsilon|^p dx = \int \lim_n |\tilde{f}_{n,\varepsilon}|^p dx \leq \lim_n \int |\tilde{f}_{n,\varepsilon}|^p dx,$$

因而, 若能对具紧支集的函数証明 a), 則由此推出:

$$\int |\tilde{f}_\varepsilon|^p dx \leq \lim_n \int |\tilde{f}_{n,\varepsilon}|^p dx \leq \lim_n A_p \int |f_n|^p dx = A_p \|f\|_p^p.$$

設 $f \geq 0$, $f \in L^p$, f 具紧支集且其积分不为零 ($f=0$ 的情形是不足道的), $1 < p < \infty$. Hilbert 变换的核与 Cauchy 型积分的核形状相似, 这启示我們研究下面的积分:

$$F(z) = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{z-t} dt,$$

其中 $\Im(z) > 0$ ①. 在积分号下求微商就知在域 $\Im(z) > 0$ 内 $F(z)$ 是解析的.

設 $z = x + iy$ ($y > 0$), $\Re F(z) = R(x, y)$, $\Im F(z) = I(x, y)$,

$|F(z)| = M(x, y)$, $\phi = \text{Arg } F(z)$.

于是 $R(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)y}{(x-t)^2 + y^2} dt = f * \frac{y}{x^2 + y^2}$; 据 Young 不

等式, 对固定 y :

$$\|R(x, y)\|_p \leq \|y(x^2 + y^2)^{-1}\|_1 \cdot \|f\|_p = \pi \|f\|_p. \quad (1)$$

① $\Re(z)$ 与 $\Im(z)$ 分別表 z 的实数部分与虚数部分, ——譯者注

此外 $R(x, y) > 0$, 因而 $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$.

現在用 $\|R(x, y)\|_p$ 来估計 $\|I(x, y)\|_p$.

有 $F(z)^p = M^p \exp ip\phi$. 按关于 f 的假設, 当 $z \rightarrow \infty$ 时,

$$|F(z)| \sim |z|^{-1},$$

从而 $|F(z)^p| \sim |z|^{-p}$. 令 $L = \{z; |\Re(z)| \leq a, \Im(z) = y\}$, $C = \{z = (u, v); v > y, u^2 + (v - y)^2 = a^2\}$. 因为 $F(z)^p$ 解析, 故

$$\int_{C \cup L} F(z)^p dz = 0,$$

又由于当 $a \rightarrow \infty$ 时,

$$\left| \int_C F(z)^p dz \right| \leq \text{const. } a^{-p+1} \rightarrow 0,$$

故

$$\int_{-\infty+iy}^{+\infty+iy} F(z)^p dz = 0,$$

即

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} M^p(x, y) \cos p\phi dx = \int_{-\infty}^{+\infty} M^p(x, y) \sin p\phi dx. \quad (2)$$

設 p 不是奇数, 于是存在 $b > 0$ 以及 $\frac{\pi}{2}$ 和 $-\frac{\pi}{2}$ 的半徑为 d 的小邻域, 使得在其上, $|\cos p\phi| > b$, 并且存在 $c > 0$, 使得

$$\text{在} \left(-\frac{\pi}{2} + d, \frac{\pi}{2} - d\right) \text{上, } \cos \phi > c.$$

于是有

$$\begin{aligned} |\sin \phi|^p &< b^{-1} \left(\sin \cos \frac{p\pi}{2} \right) \cos p\phi + (b^{-1} + 1) c^{-p} \cos^p \phi \\ &= A \cos p\phi + B \cos^p \phi. \end{aligned}$$

故当 y 固定时,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |I(x, y)|^p dx &= \int_{-\infty}^{\infty} M^p |\sin \phi|^p dx \\ &\leq A \int_{-\infty}^{\infty} M^p \cos p\phi dx + B \int_{-\infty}^{\infty} R^p dx, \end{aligned}$$

从而根据(2)得

$$\int_{-\infty}^{\infty} |I(x, y)|^p dx \leq B \int_{-\infty}^{\infty} R^p dx. \quad (3)$$

$I(x, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-t)f(t)}{(x-t)^2 + \varepsilon^2} dt$ 与 $\tilde{f}_\varepsilon(x)$ 之差为下述核与 f 之卷积:

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} - \frac{1}{x} & \text{当 } |x| > \varepsilon \text{ 时,} \\ \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} & \text{当 } |x| \leq \varepsilon \text{ 时.} \end{cases}$$

据 Young 不等式, 并注意 $\|g_\varepsilon\|_1 < \pi$ 得

$$\|g_\varepsilon * f\|_p \leq \pi \|f\|_p. \quad (4)$$

据 (3), (4), 于是有

$$\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p \leq \|I(x, \varepsilon)\|_p + \|I(x, \varepsilon) - \tilde{f}_\varepsilon\|_p \leq B^{\frac{1}{p}} \|R(x, \varepsilon)\|_p + \pi \|f\|_p,$$

再按 (1) 便得

$$\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p \leq A_p \|f\|_p. \quad \textcircled{1}$$

为完成定理的证明, 只须证明 b), 因为 c) 乃是 a), b) 的直接推论.

b) 设 $g(x), h(x) \in \mathcal{D}$, $h(x)$ 是偶函数且 $h(0) = 1$; 于是

$$\int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{h(x-t)}{x-t} dt = 0.$$

注意到 $|g(t) - g(x)h(x-t)| < M|x-t|$, M 不依赖于 x, t , 我们得

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{g(t)}{x-t} dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{g(t) - g(x)h(x-t)}{x-t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t) - g(x)h(x-t)}{x-t} dt. \end{aligned}$$

由此易见 $|\tilde{g}_\varepsilon(x)| < \frac{N}{|x|+1}$. 因 $\frac{N}{|x|+1}$ 为 p 可积, $1 < p < \infty$, 故

① 若 p 是奇数, 则共轭指数 $q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$ 就不是奇数. 对任一 $f \in \mathcal{D}, g \in L^q$,

$$(\tilde{f}_\varepsilon, g) = \int \tilde{f}_\varepsilon(x) g(x) dx = \int \left(\int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t} dt \right) g(x) dx = \int \left(\int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{g(x)}{x-t} dx \right) f(t) dt.$$

故 $|(\tilde{f}_\varepsilon, g)| \leq \|\tilde{g}_\varepsilon\|_q \|f\|_p \leq A_q \|g\|_q \|f\|_p$. 取 $g = \tilde{f}_\varepsilon^{p-1}$, 因此得 $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p \leq A_q \|f\|_p$.

——译者注

按 Lebesgue 关于积分号下求极限的定理知 $\{\tilde{g}_\varepsilon(x)\}$ 是 L^p 中的 Cauchy 序列.

設 $f \in L^p$, $\|f - g\|_p < \delta$, $g \in \mathcal{D}$. 据 a) 和 Minkowski 不等式

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}_\varepsilon - \tilde{f}_\eta\|_p &\leq \|\tilde{f}_\varepsilon - \tilde{g}_\varepsilon\|_p + \|\tilde{g}_\varepsilon - \tilde{g}_\eta\|_p + \|\tilde{g}_\eta - \tilde{f}_\eta\|_p \\ &\leq 2A_p\delta + \|\tilde{g}_\varepsilon - \tilde{g}_\eta\|_p,\end{aligned}$$

这表明 $\{\tilde{f}_\varepsilon\}$ 是 L^p 中的 Cauchy 序列, 因而收敛于某一 $\tilde{f} \in L^p$.

§ 2. n 維 Hilbert 变换(奇核)

設 $k(x)$ 是一个 $-n$ 阶齐次函数, 在单位球面上属于 L^1 , 且 $k(x) = -k(-x)$.

因为 k 在任一不含原点的紧致部分上绝对可积, 故对 $f \in \mathcal{D}$ 可定义如下的算子:

$$\tilde{f}_\varepsilon(x) = (K_\varepsilon f)(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} k(x-y) f(y) dy.$$

定理 設 $k(x)$ 为具上述性质的函数. 于是: 若

$$f \in L^p, \quad 1 < p < \infty,$$

則

a) $\|K_\varepsilon f\|_p \leq \frac{1}{2} A_p \|f\|_p \int_{|x|=1} |k(x)| d\sigma$ (A_p 为 § 1 定理中同样的常数);

b) 存在一函数 $\tilde{f} = Kf \in L^p$, 使得 $\tilde{f}_\varepsilon$ 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时 p 平均收敛于 $\tilde{f}$;

$$c) \|Kf\| \leq \frac{1}{2} A_p \|f\|_p \int_{|x|=1} |k(x)| d\sigma.$$

[証明] 为了得到这一定理, 只須就 $\mathcal{D}$ 中函数証明 a), b), 这是因为一族在稠密集上强收敛的一致有界算子, 能定义出一个作用于全空間的算子, 在我們所論情形下这算子記作 K . 首先, 对 $f \in L^p$, $K_\varepsilon f$ 可作为 $\mathcal{D}$ 中同一算子的連續擴張而得到, 这样便按卷积在 L^p 中定义了 K_ε ; 进而定义 K 为 K_ε 的极限.

証明的方法是将 n 維情形化成一維情形. 設 $f \in \mathcal{D}$.

a) 固定 $t' \in \Sigma$, 以 L 表正交于向量 t' 的子空間. 記

$$g(\rho) = f(y + \rho t'),$$

$g(\rho)$ 就是 f 在过点 y 而平行于向量 t' 的直綫上的限制.

注意到 $k(x)$ 是奇函数, 运用 Hölder 不等式, 得到

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_s\|_p &= \left[\int_{E^n} \left| \int_{\Sigma} \frac{k(t')}{2} d\sigma \int_{|\rho|>s} \frac{f(x - \rho t')}{\rho} d\rho \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{\Sigma} \frac{|k(t')|}{2} d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \left[\int_{\Sigma} \frac{|k(t')|}{2} \right. \\ &\quad \left. \left(\int_{E^n} \left| \int_{|\rho|>s} \frac{f(x - \rho t')}{\rho} d\rho \right|^p dx \right) d\sigma \right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

令 $x = y + st'$, $y \in L$, 則

$$\begin{aligned} &\int_{E^n} \left| \int_{|\rho|>s} \frac{f(x - \rho t')}{\rho} d\rho \right|^p dx \\ &= \int_L dy \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{|\rho|>s} \frac{f(y + (s - \rho)t')}{\rho} d\rho \right|^p ds \\ &= \int_L dy \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}(s)|^p ds \leq A_p^p \int_L dy \int_{-\infty}^{\infty} |g(s)|^p ds \\ &= A_p^p \int_L dy \int_{-\infty}^{\infty} |f(y + st')|^p ds = A_p^p \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

故

$$\|\tilde{f}_s\|_p \leq \left(\int_{\Sigma} \frac{|k(t')|}{2} d\sigma \right)^{\frac{1}{q} + \frac{1}{p}} A_p \|f\|_p = \frac{A_p}{2} \|f\|_p \int_{\Sigma} |k(t')| d\sigma.$$

b) 在 a) 的証明中已經注意到

$$\tilde{f}_s(x) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} k(t') \left[\int_{|\rho|>s} \frac{f(x - \rho t')}{\rho} d\rho \right] d\sigma.$$

括号內的积分为 $g(\rho) = f(x - \rho t')$ 的 Hilbert 变换在 $\rho = 0$ 之值:

$$H_s g(0) = \tilde{g}_s(0).$$

从 § 1 定理中 a) 的証明就知 $\tilde{f}_s(x)$ 当 $s \rightarrow 0$ 时逐点收斂. 因为 $f \in \mathcal{D}$, 故 $\tilde{g}_s(x)$ 一致地以常数 M 为界, 此界仅依赖于 f . 因此

$$|\tilde{f}_s(x)| \leq \frac{M}{2} \int_{\Sigma} |k(t')| d\sigma.$$

以 I 表 $f(x)$ 之支集, 記 $\bar{X} = \{x; d(x, I) > 1\}$. 若 $x \in \bar{X}$, $s < 1$,

則 $\tilde{f}_\varepsilon(x)$ 不依賴于 $\varepsilon: \tilde{f}_\varepsilon = \tilde{f}(x)$. 因為 $\tilde{f}_\varepsilon(x)$ 有界, 又逐點收斂, 故 $\tilde{f}_\varepsilon(x)$ 是 L^p 中一 Cauchy 序列.

[附注]

1) a) 的證明中用到了 $g(\rho) \in L^p(E^1)$. 但由 $f \in L^p(E^n)$ 僅知, 對幾乎所有 $y \in L$, $g(\rho) \in L^p(E^1)$. 不過這並不影響證明.

2) 已經指出, 若在 $\mathcal{D}$ 中 $\{K_\varepsilon\}$ 是一致有界算子族, 且 $\{K_\varepsilon f\}$ 是 Cauchy 序列, 則可以連續地擴張每一 K_ε 使之成為 L^p 中的連續算子 (一致有界), 且對任意 $f \in L^p$, $K_\varepsilon f$ 是 Cauchy 序列.

現在證明, 對任意 $\varepsilon > 0$, $\int_{|x-y|>\varepsilon} |k(x-y)| |f(y)| dy$ 幾乎處處為有限, 從而不難證明 $\int_{|x-y|>\varepsilon} k(x-y) f(y) dy = \tilde{f}_\varepsilon$ 與經擴張而來的 $K_\varepsilon f$ 幾乎處處相等.

因此, $\int k(x-y) f(y) dy$ 是當 $\varepsilon \rightarrow 0$ 時卷積

$$\int_{|x-y|>\varepsilon} k(x-y) f(y) dy$$

的平均極限.

引理 設 k 為 $-n$ 階齊次函數, $k(x) \geq 0$ 於 Σ 上 $q \geq 1$ 可積, $f \geq 0, f \in L^p, 1 < p < \infty, y = \rho y', |y'| = 1$, 則

$$g(x) = \int_{|x|>\varepsilon} k(y) f(x-y) dy = \int_{\Sigma} k(y') d\sigma \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x-\rho y')}{\rho} d\rho$$

幾乎處處存在.

[證明] 積分 $p.p.$ 有限, 如果它在每一球 S 內 $p.p.$ 有限, 特別, 如果此積分在每一球 S 上可積. 先看積分

$$\int_{\Sigma} k(y') d\sigma \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x-\rho y')}{\rho} d\rho. \quad (1)$$

最里邊的積分, 因為 $\frac{1}{\rho}$ 在離開原點的地方, $1 < p < \infty$ 可積, 故若不計因子, 此積分不超過

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} f^p(x-\rho y') d\rho \right]^{\frac{1}{p}}.$$

对(1)中里边的重积分应用 Hölder 不等式, 不计因子, 则这积分不超过

$$|S|^{\frac{n}{p-1}} \left[\int_S dx \int_{-\infty}^{\infty} f^p(x - \rho y') d\rho \right]^{\frac{1}{p}}.$$

采用上述定理 a) 的证明中的计算方法, 就知 (1) 不超过 Const.

$\|f\|_p$. 从而 $\int_S g(x) dx < \infty$.

§ 3. 特殊情形. Riesz 变换

因为 $\frac{x_m}{|x|^{n+1}}$ (x_m —— x 的第 m 个分量) 是满足 § 2 定理中要求的核, 故算子

$$R_m f = \gamma_n \int \frac{x_m - y_m}{|x - y|^{n+1}} f(y) dy, \quad \gamma_n = -i\pi^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

具有这定理中所述性质.

本节下面将证: 对 $f \in \mathcal{D}$

$$F(R_m f) = F(f) \frac{x_m}{|x|}. \quad (1)$$

这个结果包含下列推论:

i) 对任意 $f \in L^2$, (1) 成立, 因为 R_m 和 Fourier 变换都是 L^2 到 L^2 的连续算子.

ii) $\sum_{m=1}^n R_m^2 = I$ 在 $L^p (1 < p < \infty)$ 上成立.

事实上, 按(1)并注意, 于 $f \in L^2$ 有 $R_m f \in L^2$, 就知

$$F(R_m^2 f) = \frac{x_m}{|x|} F(R_m f) = \frac{x_m^2}{|x|^2} F(f),$$

从而

$$F\left(\sum_{m=1}^n R_m^2 f\right) = F(f),$$

这表明在 L^2 中, $\sum_{m=1}^n R_m^2 = I$. 注意 R_m 在 L^p 中连续, 而 $L^2 \cap L^p$ 稠密, 就知等式在 L^p 中成立.