Lanse Xinganxian

学科指导与能力渗透

主编：王后雄　　主审：万尔遐

蓝色新干线

黄冈总复习

系列

高中数学

Huanggang zongfuxi

湖北教育出版社

蓝色新干线

黄冈总复习系列

高中数学

学科指导与能力渗透

主　编　罗国斌

编　委　叶显斌

章熊林

储广钊

湖北教育出版社

（鄂）新登字 02 号

图书在版编目（CIP）数据

高中数学学科指导与能力渗透／罗国斌编．一武汉：湖北教育出版社，2001

（蓝色新干线系列／王后雄主编）

ISBN 7-5351-2690-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．万…　Ⅲ．数学课-高中-教学参考资料

Ⅳ．G634．603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 07795 号

出版发行：湖北教育出版社	武汉市青年路 277 号 邮编：430015 传真：027-83619605 邮购电话：027-83669149
经　销：新　华　书　店	
印　刷：荆州今印集团有限责任公司	（434000·沙市区红门路桥尾）
开　本：787mm×1092mm 1/16	15.5 印张
版　次：2001 年 9 月第 2 版	2001 年 9 月第 4 次印刷
字　数：391 千字	印数：14 001－20 000
ISBN7-5351-2690-1/C·2186	定价：18.00 元

如印刷、装订影响阅读，承印厂为你调换

内容简介

蓝色新干线由名师联袂推出总复习系列，主编**王后雄**是黄冈著名特级教师，主审**万尔遐**是湖北著名的特级教师。该系列面向高中学生，**展示“黄冈教育”全新风貌，体现“黄冈教育”教育特色，揭示黄冈教育成功秘密。**每册书的作者均为特级教师和教学第一线的骨干教师，总复习系列由语文、数学、英语、物理、化学、历史、政治、生物和地理组成。

总复习系列综合了近年来教育改革的发展思路及导向，顾及了由应试教育向素质教育的转化进程，着重于当前最新教改精神，与现行中学《教学大纲》及教材配套，注重对学生能力和素质的考查，注重于学科内综合能力的提高，立意于知识，立意于能力，知识与能力相辅相成，互为渗透。

总复习系列2001年修订版按专题分类，有讲有练，讲练结合，书末配有大量的最新时效特色的综合训练题及适应性样题，并附详细解题提示及答案。供高中二、三年级学生使用。

新干线简介：当第18届奥运会的火炬在日本东京点燃之时，世界铁路第一块高速金牌——日本东海道新干线正式投入运营（高速铁路时速在200～400千米，超高速铁路时速在400千米以上）。由于新干线速度快、准时、安全舒适、票价适中，吸引了大量旅客，竟致使东京至名古屋间的飞机航班不得不停运。

法国后来居上，在TGV大西洋线创造出515.3千米/小时的世界最高实验速度，高速铁路像一条彩带，把法国的主要城市同欧洲其他大城市串联起来。在巴黎到里昂的新干线上，“蓝色高速列车”成了新兴风景线，游客可尽情观赏中部高原和罗纳河谷的美丽景色，致使蓝色列车人满为患。

此后，世界各国都掀起了建设高速铁路的热潮。意大利、德国、英国、俄罗斯、西班牙等国也先后新建或改建了高速铁路，就连“汽车王国”——美国也着手高速铁路的建设，韩国和中国的台湾也都在建高速铁路，中国广深准高速铁路（时速160千米）已建成通车，目前北京——上海的高速铁路建设计划正在拟议中。

在21世纪，由高速铁路编织成的四通八达的铁路网将出现在世界各地，一条条的“蓝色新干线”将把世界编织得更加绚丽多姿。

扬起知识与能力的风帆，远航

为《蓝色新干线》书系代序

（一）

1.教育是时代的产物，什么样的时代就产生什么样的教育。我们正处在一个知识经济和科技信息的竞争时代，我们急迫需要经济型、科技型、信息型、应变型的竞争人才。

2.在这个时代，文盲的概念已经不是从前那种不识字或没有文化的人，而是不会学习、不懂学法、不知用法、不会更新和创新的人。

3.传统教育把学生当成被动的“知识接受器”，教育的功能只体现在重复和模仿那些被前人证明了的惟一正确的答案，学习的目的就是企图将这些现成的答案套用到今后的生活或工作中去。

4.从根本上讲，写进了书本的东西“都在过时”。学习的概念由昨天的“学会”正在变成今天的“会学”，由昨天的“结果学习”正在变成今天的“过程学习”，由昨天的被动“接受”正在变成今天的主动“探索”，由昨天的知识储存正在变成今天的能力开发。

5.时代要求人们由知识获得如下的本领：

①时时处处准备面对新问题进行思考；②检验已学过的知识，并在运用中判定其真伪；③独立自主地处理信息，作出筛选；④遇到不能解决的问题，能研究、分析而发现新学问，并经过自身的再学习能迅速掌握这门新学问。

以上本领，我们称作“能力”。

（二）

1.我们把知识比作刀，把能力比作刃，知识是能力的载体，能力是知识的功用，我们为了能力而要知识。没有刃的刀只是玩具，不讲能力的知识只是谈料！

2.刀在静态中观察，刃在动态中展现；知识可用背诵检查，能力须在应用中鉴定。知识可以是能力的猎物，而能力却是知识的飞跃！知识是人对事物的认识、观察和理解，而能力是人对知识的运用、检验和发展。

3.知识对人是一种输入，而能力对人是一种输出。知识输入，可以培养能力；能力输出，可以获得新知。刀刃的锋利不仅依赖于刀刃的本身，还依赖于操作刀刃的人；知识的作用也不仅依赖知识本身，更依赖于运用知识的人！

4.知识可从书本上学得，而能力只能在实践中渗透；知识可由老师传授，而能力只能靠自身修炼。知识可由他人说清，而能力却靠自己。知识可与个人分离而被剽窃，而能力却与人形神不离，谁都盗不走！

5.能力来源于知识，但可“离开”知识而“独立”存在。有能力的人可能会忘了所学过的具体知识，但却能自觉和不自觉地运用那些已经“隐化”和“神化”了的知识来指导行动和解决问题。

6.思想方法，产生之时属能力，产生之后属知识。即，探索和确定的过程属能力，而理顺了程序条文之后属知识。学生能力的检查，有一个科学的检验方法：在完成了几个旧问题的研究后，看其能否独立地提出另一个新问题来，哪怕暂时还没有找到答案！

7.知识是核材料，能力是核反应。核材料只有当聚集到临界值时才能发生反应，知识只有当综合到一定层次时才能升华为能力。单独孤立的、静止的知识点不能形成能力，这就是为什么现今学科教学特别强调综合运用，能力考试要通过综合考试进行的原因。

8.“知识就是力量”这句话在文化不发达的时代有一定的正确性，但在知识爆炸和知识更新加快的今天，这句话已不成立。用数学术语来说，“有知识是有能力的必要条件，但不是充分条件”，虽然“无知一定无能”，但“有知未必有能”。

9.衡量一个人素质的高低，已由过去的“知识度量”变成今天的“能力度量”，早为人们关注的高考命题也由过去的“知识立意”变成今天的“能力立意”，当今的教育转轨，一场学习上的革命，其核心内容就是由过去单一追求知识变成今天的“在知识的基础上追求能力”！

以上是我们编写该书系的指导思想。

万尔遐

目　　录

第一篇　知识目标

第一讲　函数的性质与应用

●知识精要

1.函数与不等式是高中数学的重要部分，是数学高考的主要内容，每年高考，这部分的分值常在50分左右，有时达到总分的1/3.这部分考好了，全卷主动，胜利在望；这部分考糟了，全卷被动，失败在即.因此在高中的学习中，必须花大气力，作大投入来巩固和加强这块主阵地.

2.函数与不等式对高中数学来说.既是基础，又是工具.考点多，覆盖面广，大题也考，小题也考.每年的选择题和填空题几乎覆盖了这部分所有的“三基”知识，而解答题则反复地、不遗漏地考查这部分的主要内容和综合领域.因此，复习这部分内容时，不仅要练习单一性的小题，还要练习综合性的大题.

3.函数与不等式是高中数学的灵魂，丰富而深刻的数学思想(如函数方程、等价转化、数形结合、分类讨论等)和数学方法(如配方法、换元法、待定系数法、判别式法等)在这里得到了充分的体现.因此，复习这部分内容时，要特别注意典型内容与典型思想方法相结合的训练.

4.函数与不等式，本来就是一个问题的两个方面，它们固有的内在联系，决定了它们在试题依托上的不可分割性.哪怕是一个小题，它们常常“同胞”一起；在大题中，常出现的推理性和存在性问题，实际上是函数与不等式问题的一种综合.因此，在复习这部分内容时，要注意不断地变换角度，加强“传递”，把两个问题频频转化.

5.函数与不等式，是一场同台演出中的不同角色，函数为幕后的导演，不等式为幕前的主演，涉及函数的是概念和思想，涉及不等式的是技术与操作.如参数问题，对函数来讲，关系到函数的两域三性，对不等式来讲，关系到具体的解法和证法.因此，训练参数问题(无论是解参数或证参数)时，应先在分析中作函数与不等式的分离，后在综合中作函数与不等式的合作.

6.函数与不等式，本来就是广泛的实际问题的一种抽象，把它们还原到实际中去，就是数学上的应用题.近年来出现的联系实际、贴近教材、贴近生活、背景公平的应用题，分析到底是为其建立函数的解析式和用不等式分析这解析式的性质.

●例题选讲

【例1】 幂函数$f(x)$和$g(x)$的图像分别过点(3,9)和点(8,2)，则不等式$f(x)\geqslant g(x)$的解集是

A.$(-\infty,0]\cup[1,\infty)$

B.$(-\infty,1]$

C.$(-1,1]$

D.$(-1,0]\cup[1,\infty)$

【分析】 要解的不等式$f(x)\geqslant g(x)$是抽象的，必须按已知条件求出$f(x)$和$g(x)$的具体解析式.本题虽为选择题但仍有小综合性.

【略解】 设幂函数为$y=x^n$

令$x=3,y=9$，解得　$n_1=2$，

令$x=8,y=2$，解得　$n_2=\frac{1}{3}$，

故不等式为$x^2\geqslant x^{\frac{1}{3}}$.

当$x\leqslant 0$时，不等式显然成立；

当$x>0$时，由原不等式两边同除以$x^{\frac{1}{3}}(>0)$，得$x^{\frac{5}{3}}\geqslant 1\Rightarrow x\geqslant 1$.

故$f(x)\geqslant g(x)$的解集为A.

【注析】 ①幂函数$y=x^n$只一个参数n，故可由一个条件(如一个已知点)确定其解析式；

②求解析式时用的待定系数法，通过解指数方程求得参数n；

③幂函数由其奇偶性确定其图像所在的象限,由 n 的正负性确定图像是否过原点,而它们都过定点(1,1)是幂函数图像的共性;

④区间[0,1]是幂函数的特区,许多性质都可从这里推出,如幂函数图像的上下方位,在此区间上 $n_1>n_2$ 时,x^{n_1}在 x^{n_2}的下方.熟悉这特征后,通过画草图可求得本不等式的解集.

【例2】 设函数 $f(x)$满足 $f(x-1)+f(x+1)=2x^2-8x+8$,$f(x+1)-f(x-1)=4(x-2)$,且 $f(x-1)$,$-\frac{1}{2}$,$f(x)$成等差数列,那么 x 的值是 ( )

A.2 B.3 C.2 和 3 D.2 和 -3

【分析】 这是有关函数、函数方程、数列的综合题,由题设条件解出 $f(x-1)$,$f(x)$的表达式,再由 $f(x-1)$,$-\frac{1}{2}$,$f(x)$成等差数列的条件,列出关于 x 的方程,解之即得 x 的值.这是一个比较综合的题目,客观性试题综合化,摒弃了那种一看便知的简单题.

【解】 由题设条件得

$f(x-1)=x^2-6x+8$

$f(x)=x^2-4x+3$

$\because f(x-1)$,$-\frac{1}{2}$,$f(x)$成等差数列,

$\therefore -1=x^2-6x+8+x^2-4x+3$,

整理得:$x^2-5x+6=0$

解之得:$x=2$ 或 $x=3$.

所以应选 C.

【例3】 已知 $f(x)=x^2-bx+c$,且 $f(0)=3$,$f(2-x)=f(x)$,则有 ( )

A.$f(b^x)\geqslant f(c^x)$

B.$f(b^x)\leqslant f(c^x)$

C.$f(b^x)<f(c^x)$

D.$f(b^x)$与 $f(c^x)$的大小不定

【分析】 这是一道客观性试题的综合题,由题设条件求出 b、c 和$f(x)$,再由函数的单调性比较 $f(b^x)$与 $f(c^x)$的大小.

【解】 $\because f(0)=3$

$\therefore c=3$,

$\because f(2-x)=f(x)$,

$\therefore f(x)$关于直线 $x=1$ 对称,故 $b=2$,

$\therefore f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$.

$\therefore$ 当 $x>0$ 时,$1<b^x<c^x$,$f(b^x)<f(c^x)$;

当 $x<0$ 时,$1>b^x>c^x>0$,

$f(b^x)<f(c^x)$.

当 $x=0$ 时,$b^x=c^x=1$,$f(b^x)=f(c^x)$.

故有 $f(b^x)\leqslant f(c^x)$.应选 B.

【例4】 已知 $f(x)$为奇函数,$g(x)$为偶函数,且 $f(x)-g(x)=x^2+2x-3$,则 $f(x)+g(x)$的表达式为 ( )

A.$-x^2-2x-3$ B.x^2-2x-3

C.$-x^2+2x+3$ D.x^2+2x+3

【分析】 就选择题而言,我们可以将选项逐一检验,以得正确结果.若从利用函数奇偶性看,则可以有下面解法.

【解】 $\because f(-x)=-f(x)$,

$g(-x)=g(x)$,又 $f(x)-g(x)=x^2+2x-3$,

$\therefore f(-x)-g(-z)=(-x)^2+2(-x)-3$,

即 $-f(x)-g(x)=x^2-2x-3$,

$f(x)+g(x)=-x^2+2x+3$,

$\therefore$ 选 C.

【例5】 已知函数 $f(x)=ax^2-c$ 满足 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$,$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$,那么 $f(3)$应满足 ( )

A.$7\leqslant f(3)\leqslant 26$ B.$-4\leqslant f(3)\leqslant 15$

C.$-1\leqslant f(3)\leqslant 20$ D.$-7\leqslant f(3)\leqslant 15$

【分析】 这是求函数 $f(x)$中的函数值 $f(3)$的取值范围.由题设 $f(1)$、$f(2)$的范围,利用待定系数法求之.

【解】 由 $f(1)$、$f(2)$的范围得

$-4\leqslant a-c\leqslant -1$,$-1\leqslant 4a-c\leqslant 5$.

$\because f(3)=9a-c$,

$\therefore$ 设有系数 t,m,使得

$t(a-c)+m(4a-c)=9-c$.

$\therefore t+4m=9$,$t+m=1$,

解之得 $t=-\frac{5}{3}$,$m=\frac{8}{3}$.

$$\therefore \begin{cases} \frac{5}{3}\leqslant -\frac{5}{3}(a-c)\leqslant \frac{20}{3} \\ -\frac{8}{3}\leqslant \frac{8}{3}(4a-c)\leqslant \frac{40}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow -1\leqslant 9a-c\leqslant 20$

也即 $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$,故应选 C.

【例6】 定义 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$，若 $M=\{1,2,3,4,5\}$，$N=\{2,3,6\}$，则 $N-M$ 等于(　　)

A. M　B. N　C. $\{1,4,5\}$　D. $\{6\}$

【分析】 这是一道理解型选择题，从已知条件(定义)出发，运用定义解题．根据定义 $N-M=\{x|x\in N$ 且 $x\notin M\}$，找出这些元素即可选择答案．

【解】 依据定义得 $N-M=\{x|x\in N$ 且 $x\notin M\}$，在集合 N 中 $2\in N,2\in M$；$3\in N,3\in M$；$6\in N,6\notin M$，$\therefore N-M=\{6\}$，$\therefore$ 选 D．

【例7】 已知定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上是增函数，且 $f(\frac{1}{3})=0$，则满足 $f(\log_{\frac{1}{8}}x)>0$ 的 x 的取值范围是　　(　　)

A. $(\frac{1}{2},1)\cup(2,+\infty)$　　B. $(0,\frac{1}{2})$

C. $(0,\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

【分析】 本题是关于函数和不等式的小综合题，由 $f(\frac{1}{3})=0$，知 $f(\log_{\frac{1}{8}}x)>0$ 的解是 $f(\log_{\frac{1}{8}}x)>f(\frac{1}{3})$ 的解，又 $f(x)$ 是 R 上的偶函数，且在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上是减函数，且 $f(-\frac{1}{3})=f(\frac{1}{3})=0$，充分运用函数 $f(x)$ 的上述性质，问题就容易解了．

当 $\log_{\frac{1}{8}}x>0$，即 $0<x<1$ 时，

$\because \log_{\frac{1}{8}}x>\frac{1}{3}$，解之 $0<x<\frac{1}{2}$；

当 $\log_{\frac{1}{8}}x<0$，即 $x>1$ 时，由 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上是减函数，且 $f(-\frac{1}{3})=f(\frac{1}{3})$

$\therefore \log_{\frac{1}{8}}x<-\frac{1}{3}$，解之 $x>2$，

$\therefore$ 不等式 $f(\log_{\frac{1}{8}}x)>0$ 的解为 $0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>2$，故应选 C．

【例8】 已知函数 $f(x)=ax^2+a^2x+2b-a^3$，求：

(1)当 $x\in(-2,6)$ 时，其值为正，而当 $x\in(-\infty,-2)\cup(6,+\infty)$ 时，其值为负，求 a,b 的值及函数 $f(x)$ 的表达式；

(2) $F(x)=-\frac{k}{4}f(x)+4(k+1)x+2(6k-1)$，问：$k$ 取何值时，函数 $F(x)$ 的值恒为负值？

【分析】 这是一道关于二次函数，二次方程，二次不等式等知识交汇点的综合题，比较基础，但考查角度别具一格，训练学生学习知识的逆向思维．本题给出函数在某一区间上的取值，只须借助二次函数图像，二次方程的根及二次不等式之间的联系即可得解．

【解】 (1)作出符合条件的函数的大致图像(如图 1.1.1)，根据图像列出关于 a、b 的关系式．

$\because f(x)=ax^2+a^2x+2b-a^3$，

又 $x\in(-2,6)$，$f(x)>0$，

$x\in(-\infty,-2)\cup(6,+\infty)$，$f(x)>0$，

$\therefore f(-2)=0$，$f(6)=0$

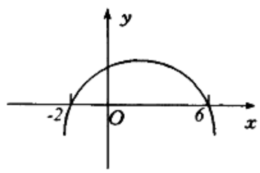

图 1.1.1

$$\therefore \begin{cases}4a-2a^2+2b-a^3=0\\36a+6a^2+2b-a^3=0\end{cases}$$

解之得 $\begin{cases}a=-4\\b=-8\end{cases}$

$\therefore f(x)=-4x^2+16x+48$

(2) $\because F(x)=-\frac{k}{4}(-4x^2+16x+48)+4(k+1)x+2(6k-1)=kx^2+4x-2$

$\therefore$ 欲使 $F(x)<0$ 恒成立，只要使 $kx^2+4x-2<0$ 恒成立，其充要条件为：

$\begin{cases}k<0\\\Delta=16+8k<0\end{cases}$　　解之得 $k<-2$．

【例9】 已知 a,b,c 是实数，而函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=ax+b$，当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$|f(x)|\leqslant 1$．证明：

(1) $|c|\leqslant 1$；

(2)当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$g(x)\leqslant 2$．

【证明】 (1)由条件当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$|f(x)|\leqslant 1$，取 $x=0$，得

$|c|=|f(0)|\leqslant 1$，即 $|c|\leqslant 1$．

(2)当 $a>0$ 时，$g(x)=ax+b$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数．

$\therefore g(-1)\leqslant g(x)\leqslant g(1)$

$\because |f(x)|\leqslant 1(-1\leqslant x\leqslant 1),|c|\leqslant 1$,

$\therefore g(1)=a+b=f(1)-c$

$\leqslant |f(1)|+|c|\leqslant 2$,

$g(-1)=-a+b=-f(-1)+c$

$\geqslant -(|f(-1)|+|c|)\geqslant -2$,

当 $a<0$ 时,$g(x)=ax+b$ 在$[-1,1]$上是减函数,

$\therefore g(-1)\geqslant g(x)\geqslant g(1)$.

$\because |f(x)|\leqslant 1(-1\leqslant x\leqslant 1),|c|\leqslant 1$,

$\therefore g(-1)=-a+b=-f(-1)+c$

$\leqslant |f(-1)|+|c|\leqslant 2$,

$g(1)=a+b=f(1)-c$

$\geqslant -(|f(1)|+|c|)\geqslant -2$,

由此得$|g(x)|\leqslant 2$;

当 $a=0$ 时,$g(x)=b,f(x)=bx+c$

$\because -1\leqslant x\leqslant 1$

$\therefore |g(x)|=|f(1)-c|$

$\leqslant |f(1)|+|c|\leqslant 2$.

综上得$|g(x)|\leqslant 2$.

【例 10】 已知 $f(x)$是周期为 2 的函数,且在$[-4,-2]$上,$f(x)=-2x^2-12x-14$,

(1)求 $f(x)$在$[0,2]$上的表达式;

(2)若矩形 $ABCD$ 的顶点A、B 分别为$(1-t,0)$,$(1+t,0)$,(其中$0<t\leqslant 1$),C、D 在函数$y=f(x)(0\leqslant x\leqslant 2)$的图像上,求矩形 $ABCD$ 面积的最大值.

【分析】 本题是用函数的周期性去求指定区间上的函数的解析式,并能利用函数的性质求面积 S 的表达式,利用不等式求面积 S 的最大值.

(1)$\because f(x)$是周期为 2 的函数,

$\therefore f(x)=f(x-2k)(k\in Z)$

$\because 0\leqslant x\leqslant 2,\therefore -4\leqslant x-4\leqslant -2$,

$\therefore f(x)=f(x-4)=-2(x-4)^2-12(x-4)-14=-2x^2+4x+2(0\leqslant x\leqslant 2)$

(2)$\because ABCD$ 为矩形,AB 在 x 轴上

$\therefore x_4=x_0$,又 D 在$f(x)=-2(x-1)^2+4$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$图像上

$\therefore f(1-t)=-2(1-t-1)^2+4=-2t^2+4$

$\therefore D(1-t,-2t^2+4)$,故$|AD|=-2t^2+4$

$\therefore S_{ABCD}=|AB||AD|$

$=2t(-2t^2+4)(0<t\leqslant 1)$

$\therefore S=4t(2-t^2)=4\sqrt{\frac{1}{2}(2t^2)(2-t^2)^2}$

$\leqslant 4\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{2t^2+2-t^2+2-t^2}{3})^3}=\frac{16}{9}\sqrt{6}$.

当且仅当 $2t^2=2-t^2$,即 $t=\frac{\sqrt{6}}{3}$时,等式成立,又$\frac{\sqrt{6}}{3}\in(0,1)$.

$\therefore$当 $t=\frac{\sqrt{6}}{3}$时,矩形 $ABCD$ 的面积的最大值为$\frac{16}{9}\sqrt{6}$.

【例 11】 设$f(x)$是奇函数,对任意 $x,y\in R$都有$f(x+y)=f(x)+f(y)$,且 $x>0$ 时 $f(x)<0,f(1)=-2$,试问在 $x\in[-3,3]$时,$f(x)$是否有最值? 如有,求出最值;如没有,说明理由.

【解】 $f(x)$是奇函数且 $x>0$ 时,$f(x)<0$,所以 $x<0$ 时,$f(x)>0$.由条件得

$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$,故

$f(0)=0$

取 $x_2>x_1$,则 $x_2-x_1>0,f(x_2-x_1)<0$,

$\therefore f(x_2)=f[(x_2-x_1)+x_1]$

$=f(x_2-x_1)+f(x_1)<f(x_1)$

故 $f(x)$是 R 上的减函数,从而是$[-3,3]$上的减函数.由条件知

$f(3)=3f(1)=-6$

$f(-3)=-f(3)=6$

$\therefore$当 $x\in[-3,3]$时,$f(x)$有最值;

当 $x=-3$ 时,$[f(x)]_{max}=6$;

当 $x=3$ 时,$[f(x)]_{min}=-6$.

【例 12】 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx$ $(a,b$ 为常数,且 $a\neq 0)$满足条件$f(-x+5)=f(x-3)$,且方程$f(x)=x$ 有等根.

(1)求 $f(x)$的解析式;

(2)是否存在实数 $m,n(m<n)$,使$f(x)$的定义域和值域分别为$[m,n]$和$[3m,3n]$,如果存在,求出 m,n 的值;如不存在,说明理由.

【分析】 这是函数,不等式的综合题,要根据二次函数相关性质求出 a,b.第(2)小题属存在性问题.解这类问题先假设存在,以此为条件进行推理,如能得合理结论,这样的区间就存

在，否则就不存在.

【解】 (1)依题意 $ax^2+bx=x$ 即 $ax^2+(b-1)x=0$ 有等根，

故 $\Delta=(b-1)^2=0$，$\therefore b=1$

由 $f(-x+5)=f(x-3)$，故 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称.

$\therefore -\dfrac{b}{2a}=1$，由 $b=1$，

$\therefore a=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x$ 为所求.

(2) $\because f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x$

$$=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2},$$

$\therefore 3n\leqslant\dfrac{1}{2}$

即 $n\leqslant\dfrac{1}{6}$，而抛物线 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+x$ 的对称轴方程为 $x=1$，

设存在 m,n. 则 $\begin{cases}f(m)=3m\\f(n)=3n\end{cases}$

即 $\begin{cases}-\dfrac{1}{2}m^2+m=3m\\-\dfrac{1}{2}n^2+n=3n\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2}m^2-2m=0 & ①\\-\dfrac{1}{2}n^2-2n=0 & ②\end{cases}$$

由①知 $m=0$ 或 $m=-4$，由②知 $n=0$ 或 $n=-4$

又 $m<n\leqslant\dfrac{1}{6}$，$\therefore$ 取 $m=-4,n=0$.

即存在实数 $m=-4,n=0$，使 $f(x)$ 的定义域为 $[-4,0]$，值域为 $[-12,0]$.

【例 13】 在 R 上的递减函数 $f(x)$ 满足：

当且仅当 $x\in M\subset R^+$ 时，函数值 $f(x)$ 的集合为 $[0,2]$，且 $f(\dfrac{1}{2})=1$；又对 M 中的任意 x_1，x_2 都有 $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$.

(1)求证：$\dfrac{1}{4}\in M$，且 $\dfrac{1}{8}\notin M$；

(2)证明：$f(x)$ 在 M 上的反函数 $f^{-1}(x)$ 满足 $f^{-1}(x_1)\cdot f^{-1}(x_2)=f^{-1}(x_1+x_2)$；

(3)解不等式：$f^{-1}(x^2+x)\cdot f^{-1}(x+2)\leqslant\dfrac{1}{4}$ $(x\in[0,2])$.

【分析】 这是一道涉及函数、反函数的概念、性质的综合题，考查了函数部分的大部分知识点和有关函数、反函数的运算，由给定的函数性质，证明自变量 x 是属于还是不属于集合 M，最后利用反函数的概念、性质证明反函数的一个性质和解反函数的不等式.

(1)**【证明】**

$\because \dfrac{1}{2}\in M$，又 $\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}$，$f(\dfrac{1}{2})=1$，

$$\therefore f(\frac{1}{4})=f(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})=1+1=2\in[0,2]$$

$\therefore \dfrac{1}{4}\in M$

$$\because f(\frac{1}{8})=f(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4})=f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{4})=1+2=3\notin[0,2]$$

$\therefore \dfrac{1}{8}\notin M$

(2)**【证明】** $\because f(x)$ 在 M 上递减

$\therefore f(x)$ 在 M 上有反函数 $f^{-1}(x)$，$x\in[0,2]$.

任取 $x_1,x_2\in[0,2]$，设 $y_1=f^{-1}(x_1)$，$y_2=f^{-1}(x_2)$

$\therefore x_1=f(y_1)$，$x_2=f(y_2)$，$(y_1,y_2\in M)$

$\because x_1+x_2=f(y_1)+f(y_2)=f(y_1\cdot y_2)$

$\therefore y_1\cdot y_2=f^{-1}(x_1+x_2)$

又 $y_1\cdot y_2=f^{-1}-1(x_1)\cdot f^{-1}-1(x_2)$

$\therefore f^{-1}(x_1)f^{-1}(x_2)=f^{-1}(x_1+x_2)$

(3)**【解】** $\because f(x)$ 在 M 上递减，

$\therefore f^{-1}(x)$ 在 $[0,2]$ 上也递减，

$\therefore f^{-1}(x^2+x)\cdot f^{-1}(x+2)\leqslant\dfrac{1}{4}$ 等价于 $f^{-1}(x^2+x+x+2)\leqslant f^{-1}(2)$

$$\therefore\begin{cases}0\leqslant x^2+x\leqslant 2\\0\leqslant x+2\leqslant 2\\x^2+2x+2\geqslant 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant -1 \text{ 或 } 0\leqslant x\leqslant 1\\-2\leqslant x\leqslant 0\\x\leqslant -2 \text{ 或 } 0\leqslant x\leqslant 2\end{cases}\Rightarrow x=0$$

故不等式的解集为 $\{x\mid x=0\}$.

【例 14】 已知函数 $f(x)=\log_a(a^x-1)$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$

(1)证明函数 $f(x)$ 的图像在 y 轴的一侧;

(2)设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $(x_1<x_2)$ 是 $f(x)$ 的图像上的两点,证明直线 AB 的斜率大于0;

(3)求函数 $y=f(2x)$ 与 $g(x)=f^{-1}(x)$ 的图像的交点坐标.

【分析】 这是一道函数图像,解析几何的综合题.本题第(2)小题涉及解析几何的基本量——斜率这一基础知识.解决这道题,分析图像与函数之间的联系,是一道跨知识的好题.

【解】 (1) $\because a^x-1>0$, $\therefore a^x>1$

$\therefore$ 当 $a>1$ 时, $x>0$;当 $0<a<1$ 时, $x<0$

$3a>0$ 且 $a\neq1$ 时, $f(x)$ 的图像总是在 y 轴同一侧.

(2)当 $a>1$, $x>0$ 时,由 $0<x_1<x_2$,得

$1<a^{x_1}<a^{x_2}$

又 $x_2-x_1>0$,

$$f(x_2)-f(x_1)=\log_a\frac{(a^{x_2}-1)}{(a^{x_1}-1)}>0$$

$$\therefore k_{AB}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$$

同法可得 $0<a<1$, $x<0$ 时, $k_{AB}>0$ 仍成立.

(3) $\because f(x)=\log_a(a^x-1)$,

$\therefore f^{-1}(x)=\log_a(a^x+1)(x\in R)$

$\because f(2x)=f^{-1}(x)$,

$\therefore \log_a(a^{2x}-1)=\log_a(a^x+1)$

解之 $x=\log_a2$

$\therefore f^{-1}(\log_22)=\log_a3$

交点坐标为 $(\log_a2,\log_a3)$.

【例15】 解关于 x 的不等式:

$$\log_a(x^2+x-2)>\log_a(x+1-\frac{2}{a})+1$$

$(a>0$ 且 $a\neq1)$

【分析】 这是解关于对数不等式的试题,需要用对数函数的性质.将对数不等式化为代数不等式组,由于底数 a 的范围没有确定,无法直接利用对数函数的单调性将对数不等式转化为代数不等式组,故需要对 $a>1$ 或 $0<a<1$ 两种情况进行讨论,然后求得正确结果.

【解】 原不等式化为

$$\log_a(x^2+x-2)>\log_a(ax+a-2) \qquad ①$$

当 $a>1$ 时,不等式①化为

$$\begin{cases}ax+a-2>0\\x^2+x-2>ax+a-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x>\dfrac{2}{a}-1\\x>a \text{ 或 } x<-1\end{cases}$$

$\because a>1$, $\therefore \dfrac{2}{a}-1<1$, $\therefore x>a$.

当 $0<a<1$ 时,不等式①化为

$$\begin{cases}x^2+x-2>0\\x^2+x-2<ax+a-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x>1 \text{ 或 } x<-2\\-1<x<a\end{cases}\Rightarrow \text{不等式①无解.}$$

$\therefore$ 当 $a>1$ 时,原不等式的解集为 $\{x\mid x>a\}$;当 $0<a<1$ 时,原不等式无解.

【例16】 已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为实数集,且 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数,当 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时,是否存在这样的实数 m,使

$$f(\cos2\theta-3)+f(4m-2m\cos\theta)>f(0)$$

对所有的 $\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 均成立?若存在,则求出所有适合条件的实数 m;若不存在,试说明理由.

【分析】 这是涉及函数、三角函数、不等式的综合试题,也是近年来各类试题的热点之一,解题的方法类似于【例10】.

【解】 $\because f(x)$ 是 R 上奇函数,又在 $[0,+\infty)$ 上是增函数,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上也是增函数.

$\therefore f(x)$ 在 R 上是增函数,且 $f(0)=0$.

$\because f(\cos2\theta-3)+f(4m-2m\cos\theta)>0$,

$\therefore f(\cos2\theta-3)>f(2m\cos\theta-4m)$,

$\therefore \cos2\theta-3>2m\cos\theta-4m$,

即 $\cos^2\theta-m\cos\theta+2m-2>0$

令 $\cos\theta=t$,由 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,得 $0\leqslant t\leqslant1$.

$$\therefore g(t)=t^2-mt+2m-2$$

$$=(t-\frac{m}{2})^2-\frac{m^2}{4}+2m-2.$$

则:①当 $\dfrac{m}{2}<0$, $g(0)$ 最小,故需 $\dfrac{m}{2}<0$,且 $g(0)=2m-2>0$,此时 m 不存在;

②当 $0\leqslant\dfrac{m}{2}\leqslant1$ 时, $g(\dfrac{m}{2})$ 最小,故需 $0\leqslant\dfrac{m}{2}$

$\leqslant 1$,且 $g(\frac{m}{2})=-\frac{m^2}{4}+2m-2>0$,解得

$4-2\sqrt{2}<m\leqslant 2$;

③当 $\frac{m}{2}>1$ 时,$g(1)$为最小,故只需 $\frac{m}{2}>1$ 且 $g(1)=m-1>0$,即 $m>2$.

综合①②③知,符合题目要求的 m 值存在,m 的取值范围是

$(4-2\sqrt{2},2]\cup(2,+\infty)$,

即$(4-2\sqrt{2},+\infty)$.

【例 17】 某工厂年生产某种产品共 m 件,分若干批生产,每生产一批产品需用原料费用为 15000 万元,而每批生产需直接消耗的管理费与该批生产产品的件数的立方成正比,当生产的一批产品为 5 件时,需消耗管理费为 1000 万元,求

(1)每批生产需直接消耗的管理费与该批生产产品的件数的函数解析式;

(2)每批生产多少件时,一年生产的总费用最低(粗确到 1 件)?(其中$\sqrt[3]{7.5}=1.957$,$\sqrt[3]{75}=4.217$)

【分析】 本题是应用题,主要用来考查根据问题的实际建立函数关系,利用不等式的性质最值问题等知识,考查综合应用数学知识,数学思想和方法解决问题的能力,本题由题设条件建立两个函数关系式:一是每批生产需直接消耗的管理费与该批生产产品的件数的函数解析式,二是一年生产的总费用的函数解析式,利用函数求最小值的方法求出一年的生产的总费用的最小值.

【解】 (1)由题意设每批生产直接消耗的管理费为 S 元,该批生产的产品件数为 x 件,则得 $S=kx^3$. 当 $x=5$ 时,$S=1000$,

$\therefore 1000=k\cdot 5^3$

$\therefore k=8$,

所求函数解析式为 $S=8x^3(x\in N)$.

(2)设每批生产 x 件时,一年生产的总费用为 y 万元,则每生产一批产品的总费用为 $15000+8x^3$,一年生产的总费用为

$$y=\frac{m}{x}(15000+8x^3)$$

$$\therefore y=\frac{m}{x}(15000+8x^3)$$

$$=m(\frac{15000}{x}+8x^2)$$

$$=m(\frac{7500}{x}+\frac{7500}{x}+8x^2)$$

$$\geqslant 3m\cdot\sqrt[3]{\frac{7500}{x}\cdot\frac{7500}{x}\cdot 8x^2}$$

当且仅当 $\frac{7500}{x}=8x^2$,即 $x^3=\frac{7500}{8}$时,等号成立.

$$\therefore x=\frac{1}{2}\sqrt[3]{7500}=5\sqrt[3]{7.5}$$

$$\approx 5\times 1.96=9.8\approx 10.$$

$\therefore$ 每批生产 10 件时,一年生产的总费用最低.

【例 18】 某地为促进淡水鱼养殖业的发展,将价格控制在适当范围内,决定对淡水鱼养殖提供政府补贴. 设淡水鱼的市场价格为 x 元/千克,政府补贴的 t 元/千克. 根据市场调查,当 $8\leqslant x\leqslant 14$ 时,淡水鱼的市场日供应量 P 千克与市场日需求量 Q 千克近似地满足关系:

$P=1000(x+t-8)(x\geqslant 8,t\geqslant 0)$,

$Q=500\sqrt{40-(x-8)^2}(8\leqslant x\leqslant 14)$.

当 $P=Q$ 时市场价格为市场平衡衡量价格.

(1)将市场平衡价格表示为政府补贴的函数,并求出函数的定义域;

(2)为使市场平衡价格不高于每千克 10 元,政府补贴至少为每千克多少元?

【分析】 此题文字叙述多,所涉问题的数学实质是:当 $P=Q$ 时,

(1)用 t 的代数式表示 x,并求出函数定义域;

(2)若函数值 $x>10$,求自变量 t 的最小值.

【解】 (1)当 $P=Q$,得 $2(x+t-8)=\sqrt{40-(x-8)^2}$,化简得

$5(x-8)^2+8t(x-8)+4t^2-80=0$

当 $\Delta=800-16t^2\geqslant 0$ 时,得

$x-8=\frac{-4t-2\sqrt{50-t^2}}{5}$(另一根已舍)

由 $\Delta\geqslant 0$,$t\geqslant 0$ 及 $8\leqslant x\leqslant 14$,

得 $0\leqslant t\leqslant 5\sqrt{2}$又

$0\leqslant\frac{-4t+2\sqrt{50-t^2}}{5}\leqslant 6$

解得 $0\leqslant t\leqslant\sqrt{10}$，得

$8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leqslant 10$，

化简得 $t^2+4t-5\geqslant 0$，解得 $t\geqslant 1$（$t\leqslant -5$ 舍去）

故政府补贴至少为每千克1元.

【例19】 设 a,b 是两个不等于零的实数，求证：下列两个不等式中至少有一个成立.

$\left|\frac{a+\sqrt{a^2+2b^2}}{2b}\right|<1$，$\left|\frac{a-\sqrt{a^2+2b^2}}{b}\right|<1$.

【分析】 不等式左边的结构使我们联想到二次方程求根公式，构造一个二次方程使其根为 $x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+2b^2}}{2b}$，此方程 $bx^2-ax+c=0$. 为使判别式 $\Delta=a^2+2b^2$，取 $c=-\frac{b}{2}$，即构造方程 $bx^2-ax-\frac{b}{2}=0$，其根为二次函数 $f(x)=bx^2-ax-\frac{b}{2}$ 与 x 轴两个交点的横坐标，于是问题转化为求证 $f(x)$ 与 x 轴的两个交点至少有一个在 $(-1,1)$ 内.

【解】 设 $f(x)=bx^2-ax-\frac{b}{2}$，

$\because \Delta=(-a)^2-4b(-\frac{b}{2})=a^2+2b^2>0$.

$\therefore$ 抛物线与 x 轴必有两个交点，其横坐标为 $x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+2b^2}}{2b}$，则

$f(-1)=\frac{b}{2}+a$，$f(0)=-\frac{b}{2}$，$f(1)=\frac{b}{2}-a$

(1) 当 $b>0$ 时，$f(0)<0$，若 $a>0$，则 $f(-1)>0$

$\therefore$ 点 $A(-1,f(-1))$ 在 x 轴上方，点 $B(0,f(0))$ 在 x 轴下方，

$\therefore$ 抛物线与 x 轴在 $(-1,0)$ 内必有一个交点，此时 $\left|\frac{a-\sqrt{a^2+2b^2}}{b}\right|<1$

若 $a<0$，则 $f(1)>0$，

$\therefore C(1,f(1))$ 在 x 轴上方.

$\therefore$ 抛物线与 x 轴在 $(0,1)$ 内必有一个交点，此时 $\left|\frac{a+\sqrt{a^2+2b^2}}{b}\right|<1$.

(2) 当 $b<0$ 时，$f(0)>0$，此时 B 点在 x 轴下方，同理可证 A 点和 C 点至少有一点在 x 轴上方.

故两个不等式中至少有一个成立.

【注】 构造二次方程或二次函数证明不等式是证明不等式的特殊方法，充分体现了函数、方程及不等式的辩证关系和数形转化的思想方法.

第二讲　不等式的求解与证明

●知识精要

1.不等式是研究数学问题的重要工具,是培养推理能力的重要内容,它渗透在高中数学的各个部分,特别是与函数、数列、复数、三角有着密切的关系.

2.不等式是数学思想的载体,突出体现了等价转化、函数与方程,分类讨论,数形结合等数学思想,因此,在历届高考中,不等式是考查的重点,特别是近几年来,不等式与函数结合,不等式与数列结合,不等式与复数结合,不等式与三角结合,皆成为高考中应用题等的背景.上述几特点,均是高考在新形势下的一种命题方向,那就是在知识网络的大环境下,在知识的交汇点命题,这是时代的需要.

3.不等式是高考的重点内容之一,因为不等式在生产实践和相关的学科学习中应用广泛,又是学习高等数学的重要工具,所以不等式成为高考命题的重点不足为怪.不等式内容在近几年的高考中,均占总分的14%左右,1999年高考(理科)试卷中占20分,为总分的13%,并且有越来越重的趋势。

4.应用问题与不等式结合考查.应用问题是近年高考命题的热点,而应用问题多与不等式相关,需要根据题意建立不等式,设法求解;或者用均值不等式或函数单调性求出最值.

●例题选讲

【例1】 若 $a<b<0$,则下列不等式中不能成立的是(　　)

A.$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B.$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$

C.$|a|>|b|$　　D.$a^2>b^2$

【分析】 $\because a<b<0$,得:$\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0$ 显然A成立.

由于 $a<b<0$,可知 $|a|>|b|$,$a^2>b^2$ 成立,

对于B.:$\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a}=\frac{b}{a(a-b)}$,

$\because a<b<0,\therefore a-b<0,a<0,b<0$

故有$\frac{b}{a(a-b)}<0$,即$\frac{1}{a-b}<\frac{1}{a}$,因此B不能成立.

【例2】 已知 $x>y>z$,且 $x+y+z=0$,则下列不等式恒成立的是(　　)

A.$xy>yz$　　B.$xz>yz$

C.$xy>xz$　　D.$x|y|>z|y|$

【分析】 $\because x>y>z,x+y+z>z+z+z$,

$\therefore 3z<0$,即 $z<0$

$\therefore x+y+z<x+x+x=3x$,即 $3x>0$

$\therefore x>0$

而由 $x>0,z<0$,故 y 不一定是正是负,还有可能是0.

$\because y>z,x>0,\therefore xy>xz$

【评述】 对于比较大小的题目,特别是对不等式两边同乘以一个数时,一定要考虑数的正负,以及是否为零.

【例3】 已知 $60<a<84,28<b<33$,求 $a+b,a-b,\frac{a}{b}$的范围.

【解】 $\because 60<a<84,28<b<33$,

$\therefore 88<a+b<117$

$\because 28<b<33,\therefore -33<-b<-28$

又 $60<a<84,\therefore 27<a-b<56$

$\because 28<b<33,\therefore \frac{1}{33}<\frac{1}{b}<\frac{1}{28}$

又 $60<a<84,\therefore \frac{60}{33}<\frac{a}{b}<\frac{84}{28}$

即$\frac{20}{11}<\frac{a}{b}<3$.

【例4】 设 $a,b\in R^+$,且 $a\neq b$,比较 $(\frac{b^2}{a})^{\frac{1}{2}}+(\frac{a^2}{b})^{\frac{1}{2}}$与$\sqrt{a}+\sqrt{b}$的大小.

【分析】 这一例题是比较两个代数式的大小,把两式利用差值不等式法结合不等式的性质加以比较即可.