21世纪高等院校选用教材

经济、管理类

概率论与数理统计

叶中行　杜之韩
柳金甫　陈珊敏　编著

3

科学出版社

21世纪高等院校选用教材(经济、管理类)

概率论与数理统计

叶中行　杜之韩
柳金甫　陈珊敏　编著

科学出版社

2001

内 容 简 介

本书的主要内容为:随机事件与概率,随机变量的分布,多维随机变量,数字特征,大数定理和中心极限定理,描述性统计,抽样及抽样分布,参数估计,假设检验,回归分析与方差分析.

书中给出大量取自经济、金融、管理领域中的例题与练习,并增加了符合报考研究生的考纲要求的综合习题.

本书是按照54学时的教学计划编写的教材,也可用于72学时的扩展课程.在经济、金融、管理领域应用概率论和数理统计的实际工作者也可将本书作为了解概率论和数理统计理论、方法、应用实例和问题的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/叶中行等编著.—北京:科学出版社,2001.9
(21世纪高等院校选用教材(经济、管理类))
ISBN 7-03-009560-X

Ⅰ.概… Ⅱ.叶… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.O21

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001年8月第 一 版 开本:720×1000 1/16
2001年8月第一次印刷 印张:20 1/2
印数:1—4 000 字数:358 000

定价:26.50元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　言

数学在经济、金融、管理科学领域的应用越来越广泛和深入，人们需要应用随机数学对这些领域中的许多问题及大量的数据建模、分析、进行推断，这些专业的大学生和研究生应当掌握作为随机数学基础的概率论和数理统计初步.

本书是经济、金融、管理类本科生学习“概率论和数理统计”课程的教材，学生学完本课程将学会进行推断的统计和经济方法，具备进一步学习经济、金融、管理的高级课程的必要基础. 同时也可以由此进一步学习概率论、数理统计和随机过程中更深刻、更复杂的理论和方法，如在金融领域有重要应用的随机分析方法和在这些领域进行数据分析的多元统计的理论和方法.

在经济、金融、管理领域应用概率论和数理统计的实际工作者也可把本书作为了解概率论和数理统计的理论、方法、适用范围、应用实例和问题的参考书.

经济、金融、管理学科的学生，在没有接受过概率论和数理统计的基本但又严格的训练时，通常会将概率论和数理统计领悟成应用于一批特例的一堆公式、法则和技术的大杂烩，不理解他们所用方法原理的学生将很快忘却对这些问题求解的细节. 在定量分析变得越来越重要的今天，学生必须具备对概率论和数理统计的较高水平和透彻的理解，从而应在本课程学习中接受严格的训练.

现有的适用于经济、金融、管理类的概率统计教材虽然品种众多，但有的教材过于浅显，有的为适应少学时的需要而过于简单，有的在处理多变量内容方面不够充分，有的常常在“显然”或“超出本书范围”的借口下省略了一些重要结果的证明，而常常这些“显然”之处对学生并非显然. 教材应当包括那些最重要的结果的证明，这有助于学生理解和消化本课程所涉及的数学概念，在他们第一次了解结果之证明的全过程，然后运用这些结果解决实际问题时可以加强对所学理论和方法的理解和长时间的记忆.

不少现有的同类教科书的另一个不足是缺乏实用例子，而以掷硬币、摸球、掷骰子等例子充斥书中，使学生误以为概率统计只是解决赌博、游戏问题的技术. 事实上在经济、金融、管理领域中有大量生动的、运用概率统计去解决的实际问题，因此如何让学生接触到这些成功的范例，学会从实际问题中提炼出数学模型，而后利用统计的方法去分析推断，则为众多院校及有关学科所

关注. 为此迫切需要一本既有一定的理论深度,又有丰富应用实例的新颖教材.

上海交通大学、西南财经大学、北方交通大学和东华大学的部分教师长期从事概率论和数理统计课程的教学,并在科学研究中有了相当的积累,经过多年的教学实践,并充分学习和借鉴国内外的优秀教材,编写了本教材.

本书有以下主要特点:

(1) 假设学生已学过高等数学(微积分)和线性代数课程. 本书涉及的内容在符合这些学科概率统计课程大纲要求的基础上适当扩展,有些重要结果的证明以新的方式第一次出现在此类教材中.

(2) 本书给出大量的取自于经济、金融、管理领域中的例题与练习.

(3) 本书的大部分章节可用于教学,另外的扩展内容可供参考.

(4) 本书在保证适应大多数学生水平的同时,也考虑到部分学生学有余力或准备进一步深造的需要,增加了符合报考研究生考纲要求的综合习题,使这部分学生在学完本课程后可进一步强化综合应用的能力.

(5) 本书是按照一学期 54 学时(每周 3 学时)的教学计划编写的,但也可用于 36 学时的短课程和 72 学时的扩展课程,教师可以根据大纲要求和课时的需要摘选本书的部分内容.

本书在内容编排、处理及结合应用实例方面作了不少新的尝试,成功与否还需经过教学和学生学习的检验. 因此诚恳希望使用本教材的师生将所发现的书中存在的问题、进一步改进的建议与更适合教学的应用实例反馈给编著者,以便在本书可能再版时作进一步的修改,使之成为众多的经济、管理、金融类院校和专业所用"概率论和数理统计"教材中有鲜明特色的一本.

本书由叶中行确立编写思想并组织编写. 其中第一、二、三章由杜之韩编写;叶中行和陈珊敏编写了第四、五章,并提供了本书的大部分插图;柳金甫编写了第六、七、八、九和十章,叶中行和陈珊敏还对全书进行了通稿.

本书的写作和出版得到了科学出版社、上海交通大学教务处和国家工科数学教学基地(筹)的帮助和支持. 茆诗松教授仔细审阅了本书的初稿,并提出了许多宝贵的修改意见,在此一并深表感谢.

编 著 者

2001 年 7 月于上海

目　录

第一章　随机事件与概率

概率论与数理统计是研究随机现象及其规律性的数学学科．在这一点上，它与迄今我们学过的其他数学分支，例如微积分学、线性代数等有着根本的区别，因为后者的研究对象是“确定性现象”．

所谓随机现象是指在一定条件下可能出现，也可能不出现的现象．譬如掷一枚硬币，观察哪面向上，结果你可能掷出正面．这一结果纯属偶然，亦即是随机现象．因为在同样条件下你完全有可能掷出另外一面．又如，工厂质检人员为了了解该厂某日产品的质量，从工厂当日的产品中任意抽取 10 件进行检测．结果发现“恰有 3 件不合格”，这亦是一个随机现象．因为倘若重新抽取 10 件来检验，可能就是另外一种结果了．

与此形成鲜明对照的是“确定性现象”．它是指在一定条件下必然会发生的现象．例如在标准大气压下水加热到 100℃ 一定会沸腾，火箭速度超过第一宇宙速度火箭就会摆脱地球引力而飞出地球，这些都是确定性现象，亦称必然现象．

既然随机现象“纯属偶然”，难道还有什么规律可言吗？这正是概率论与数理统计这门课程要予以回答与揭示的．概而言之，概率论与数理统计正是研究与揭示随机现象的数量规律性的一门数学学科．为了这一目标，本章将介绍概率论的一系列最基本的概念并讨论几种特殊场合下的概率计算问题，以期读者对概率有一初步但又是准确的认识，为下面章节的学习打下一个基础．

§1.1　随机事件

一、随机试验与样本空间

概率论中将对随机现象的观察或为观察随机现象而进行的试验称作随机试验．并约定，随机试验应具备以下三个特征：

(1) 试验在相同条件下是可重复的；

(2) 试验的全部可能结果不止一个，且都是事先可以知道的；

(3) 每一次试验都会出现上述可能结果中的某一个结果，至于是哪一个结果则事前无法预知．

为简单计，今后凡是随机试验皆简称试验，并记之以英文字母 E．称试验的每个可能结果为样本点，并称全体样本点的集合为试验的样本空间，样本点

及样本空间分别用希腊字母 ω 和 Ω 表示.

例 1　E_1:将一枚硬币连掷两次,观察两次中出现正面、反面的情况. 此试验有 4 种可能结果,即有 4 个样本点,样本空间是

$$\Omega=\{(\text{正},\text{正}),(\text{正},\text{反}),(\text{反},\text{正}),(\text{反},\text{反})\},$$

其中样本点(正,正)表示第一、二次均掷出正面,余类推.

E_2:掷一颗骰子,观察出现的点数. 样本空间为

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

E_3:一名射手向某目标射击,直至命中目标为止,观察其命中目标所进行的射击次数. 从理论上讲,只要不能击中目标射手就须一直射击下去,故样本空间为

$$\Omega=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\},$$

其中含有无穷多个样本点.

E_4:观察并记录某市每日中午 12 点时的气温. 假设该市这一时刻的气温不会低于 4℃,也不会高于 35℃,则样本空间为

$$\Omega=\{\omega\mid\omega\in[4,35]\}.$$

二、随机事件

随机试验的结果称为随机事件,简称事件,并以大写英文字母 $A,B,C,D,\cdots$ 记之. 例如上述例 1 的试验 E_1 中,若以 A 表示"掷出两个正面"的结果,则 A 是一个事件,它含有一个样本点(正,正);令 B 表示"至少掷出一个正面",则 B 亦是试验 E_1 的一种结果,从而亦是一个事件. 显然,B 含有 3 个样本点(正,正),(正,反)及(反,正). 又例如,在例 1 的试验 E_2 中,若以 C 表示结果"掷出奇数点",则 C 是一个事件. 由于当且仅当掷出 1、3、5 三种点数的任何一种时,结果"掷出奇数点"出现即事件 C 发生,所以 C 含有 3 个样本点"1","3"和"5". 再如,在 E_3 中,若以 D 表示"至少射击 3 次才会命中目标"这一结果,则 D 是一个事件. 这一结果意味着该试验的射击次数是 3,4,5,…,这表明事件 D 含有的样本点是"3","4","5",….

上述分析表明,作为试验的结果的事件,其实就是试验的样本空间的子集,上述 A,B,C,D 4 个事件也是如此. 我们有

$$A=\{(\text{正},\text{正})\},\quad B=\{(\text{正},\text{正}),(\text{正},\text{反}),(\text{反},\text{正})\}$$

$$C=\{1,3,5\},\qquad D=\{3,4,5,\cdots\}.$$

事实上，对于含有有限个或可列个样本点的样本空间(可称离散样本空间)，可以将其任意一个子集称作事件．而对于含有不可列个样本点的试验而言，作为试验的结果的事件，同样是试验的样本空间的子集．例如上述 E_4 中，若令 F 表示“气温不高于 10℃”这一结果，则 F 显然也是 Ω 的一个子集：

$$F = \{\omega \mid \omega \in [4,10]\}.$$

不过，由于具有不可列个样本点的样本空间的子集的复杂性，使得人们不能够将其任意子集都称作事件，对这一问题的进一步的论述要用到测度论的知识，这里不再探讨．也正是由于这个原因，在本段一开始时，我们宁可用并不严格的“结果”之说来描述“事件”这一重要概念．

既然事件的本质是样本空间的子集，那么指出下面这一点就显得十分重要，这就是：当且仅当该子集中的某个元素(即样本点)在试验中出现时此事件发生．

作为事件的特例，我们称试验必然会出现的结果为必然事件，通常用大写希腊字母 Ω 表示．例如，例 1 的 E_2 中“点数小于 7”应是一种结果，其发生是必然的，称之为必然事件．显然，必然事件含有样本空间的全部样本点，所以用表示样本空间的字母 Ω 表示必然事件．此外，将不可能出现的结果称作不可能事件，记作 $\varnothing$．E_2 中“点数大于 6”就是一个不可能事件．显然，不可能事件不含有任何样本点．

三、事件的关系与运算

既然事件是样本空间的某种子集，所以集合论中集合的包含、相等等概念以及集合的运算对事件都应适用．那么这些关系与运算对事件而言相应地应赋予怎样的涵义呢？

1．事件的包含

作为集合，$A \subset B$ 即“A 包含于 B”是说，A 中元素都在 B 中．于是，作为事件，既然 A 的样本点都在 B 中，那么当 A 的样本点出现于试验结果之中即 A 发生时，B 当然也就发生了．可见 $A \subset B$ 表示“A 的发生必导致 B 的发生”．

2．事件相等

作为集合，$A = B$ 是说“$A \subset B$ 且 $B \subset A$”．于是，作为事件，$A = B$ 就是“A 的发生必导致 B 的发生，同时 B 的发生也必导致 A 的发生”．相等的事件含有相同的样本点．

3．事件的并(和)

作为集合，$A \cup B$ 中的元素或者属于 A，或者属于 B(当然有的可能同时属于 A，B)．所以事件的并 $A \cup B$ 表示“A 或 B 至少有一个发生”．

类似地，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 表示“A_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 中至少有一个发生”；可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的并 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$ 表示“$A_i(i=1,2,\cdots n,\cdots)$ 中至少有一个发生”.

4. 事件的交(积)

作为集合，$A\cap B$ 由 A,B 的公共元素组成. 所以事件的交 $A\cap B$ 应表示“A,B 同时发生”. $A\cap B$ 常简记作 AB.

类似地，n 个事件的交 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 表示“n 个事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 同时发生”；可列个事件的交 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$ 表示“可列个事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$ 同时发生”.

5. 逆事件(对立事件)

作为集合，A 的余集 $\bar{A}$ 由全集 Ω 中所有不属于 A 的元素组成. 于是，作为事件，$\bar{A}$ 当且仅当 A 不发生时发生，称作事件 A 的逆事件. 利用上述事件的并和交的运算符号，有

$$A\cup\bar{A}=\Omega \text{ 及 } A\bar{A}=\varnothing.$$

6. 事件的差

作为集合，A 与 B 的差集 $A-B$ 由 A 中全部不属于 B 的元素组成. 于是，事件的差 $A-B$ 表示“A 发生而 B 不发生”即 $A-B=A\bar{B}$.

7. 互斥事件

集合论中，若 $AB=\varnothing$，则表明 A,B 没有公共元素. 作为事件，若 $AB=\varnothing$，则表明 A,B 不同时发生，称 A 与 B 互斥(或不相容).

上述事件间的关系与运算可由集合论中的文氏图予以展示(见图 1.1)

与集合运算一样，事件的运算亦有如下的运算律：

1° 交换律　$A\cup B=B\cup A$，　$AB=BA$；

2° 结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

　　　　　$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

3° 分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

　　　　　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(B\cup C)$；

4° 对偶律　$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$，$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

上述运算律亦可推广到任意有限个或可列个事件的情形. 例如，对 n 个事件 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$ 有分配律

$$A\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\bigcup_{i=1}^{n}AB_i,$$

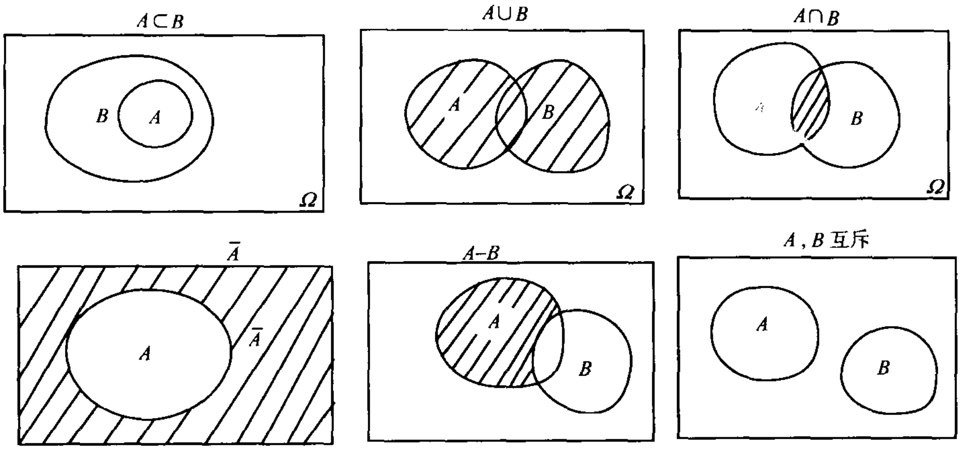

图 1.1 事件关系图

对可列个事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$有对偶律

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i$$

及

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i,$$

这里不再逐一列出,作为练习,读者不妨自行写出.

例 2 掷一颗骰子,观察其点数. 令 A 表示"掷出奇数点",B 表示"点数不超过 3",C 表示"点数大于 2",D 表示"掷出 5 点",则

$$A = \{1,3,5\}, \quad B = \{1,2,3\},$$
$$C = \{3,4,5,6\}, \quad D = \{5\}.$$

于是

$$A \cup B = \{1,2,3,5\}, B \cup C = \Omega,$$
$$AB = \{1,3\}, BD = \varnothing,$$
$$\bar{A} = \{2,4,6\}, \bar{A}C = \{4,6\},$$
$$A - B = \{5\}, B - A = \{2\}.$$

例 3 某人连续三次购买体育彩票,每次一张. 令 A,B,C 分别表示其第一、二、三次所买的彩票中奖的事件. 试用 A,B,C 及其运算表示下列事件:

(1)第三次未中奖;(2)只有第三次中了奖;(3)恰有一次中奖;(4)至少有一次中奖;(5)不止一次中奖;(6)至多中奖两次.

解　(1)$\bar{C}$.　　(2)$\bar{A}\bar{B}C$.　　(3)$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$.

(4)$A\cup B\cup C$.　　(5)$AB\cup AC\cup BC$.　　(6)$\overline{ABC}$.

§1.2　概　　率

伴随着社会的变革与经济的发展,概率这一术语已日渐融入我们的生活之中. 众所周知,概率是用来描述随机事件发生的可能性大小的. 然而在概率论中,概率是如何加以定义的呢?

概率论的发展历史表明,我们的前人足足经历了三百余年的艰难探索才为这个似乎并不复杂的问题找到了最终的解决办法.

对概率的探索最早始于16世纪赌搏盛行的欧洲,在经历了古典概率、几何概率、统计概率等版本的概率定义之后,人们最终接受了前苏联数学家科尔莫戈罗夫于1933年建立的概率公理化体系. 这才有了现在为多数概率论教科书所采用的概率公理化定义. 什么是概率的公理化定义? 这要从随机事件的频率谈起.

一、频率与概率

如前所述,概率是事件发生可能性大小的度量. 于是,为了恰当地定义概率,须探讨如下问题:什么样的数能够准确地描述事件发生的可能性大小?

考虑一个简单的问题. 设 A,B 为试验 E 的两个不同的可能结果(该试验还有其他结果). 若在相同条件下将试验 E 连作10次. 结果,事件 A 发生了7次,事件 B 发生了2次. 你认为事件 A,B 发生的可能性孰大孰小? 或许你会认定:A 发生的可能性大一些. 当然你也可能处于犹豫之中:能据此就简单地断言 A 发生的可能性大吗? 不论你的实际结论如何,有一点已经可以肯定:由于10次试验中 A 发生了7次,占70%,而 B 发生了3次,只占30%,至少这一结果不会令你得出 B 发生的可能性大的结论. 事情十分清楚:人们会认同 n 次试验中事件 A 发生的次数 n_A 与 n 的比值在一定程度上反映了事件 A 发生的可能性大小.

1.1 定义　称在相同条件下所做的 n 次试验中事件 A 发生的次数 n_A 为 A 发生的频数,并称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的频率,记作

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}.$$

借助这一术语,可以说,事件发生的频率在一定程度上反映了事件发生的可能性大小.

为什么要加上"在一定程度上"这一限定语呢?因为频率不是一成不变的.例如,若将上述试验重新再做10次,则A不一定仍然发生7次,B也不一定仍然发生3次,或许结果是A发生了4次而B发生了6次.这是完全有可能的.

如此说来,频率还能够真实地反映事件发生的可能性大小吗?回答依然是肯定的.条件是试验次数n要足够大.这里我们要指出一个重要的事实.这就是,尽管n次试验中事件A发生的频数n_A不是一个固定的数,从而频率$f_n(A)$也不是一个固定的数,但当试验的次数n较大时,频率$f_n(A)$会趋于稳定.此时,像上述例子中那样,前后两轮试验对A,B发生的可能性大小给出相反信息的情况一般不会发生.

掷硬币试验可能是许多人都做过或见过的.当你反复掷一枚硬币,观察出现正面的次数,并计算正面出现的频率时,你会发现,只要掷币次数足够多,那么出现正面的频率会在0.5上下变化.而且,一般地,随着掷币次数n的增大,频率上下变化的幅度会逐渐变小.概率论的历史上留下了统计学家蒲丰等人所作的掷币试验记录(见表1.1).它告诉我们,先人们早在数百年前就发现了频率的稳定性.正是频率的这种稳定性使我们可以相信,当n较大时事件A的频率$f_n(A)$相当真实地(而不是前面的"在一定程度上")反映了事件A发生的可能性大小.

表 1.1

实验者	掷币次数	出现正面的频数	频率
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

人们从大量的实践中观察到的频率的稳定性令人们推测,应该有一个由事件A自身所决定的常数p存在,使$f_n(A)$十分稳定地在其上下作窄幅变动.将这样一个客观存在的数p称作事件A的概率应是合乎逻辑的.

1.2 定义　在相同条件下所做的n次试验中,事件A发生的频率$f_n(A)$当$n\to\infty$时稳定在某常数p附近.称此常数p为事件A发生的概率,记作

$$P(A)=p.$$

定义1.2是建立在试验及其统计数据的基础上的,故称之为概率的统计

定义. 它有相当直观的试验背景,易被人们接受. 不足之处是,定义中数 p 的存在只是人们经过大量观察之后的推断. 从传统数学惯有的严格性角度看,似乎应对其客观性给出严格的证明才能令人信服. 此外,定义中对频率与概率的关系的描述是粗糙的,非数学化的,从而容易造成误解. 例如,依照定义 1.2 中的描述容易使人猜想,是否概率就是频率的极限

$$\lim_{n\to\infty} f_n(A) = P(A) \tag{1.3}$$

在本书第五章中将看到,$P(A)$的确是频率 $f_n(A)$的某种极限,但并非由(1.3)[①]式所表述的极限,而是另外意义下的极限,眼下我们尚无法对其加以描述.

由于定义 1.2 的上述不足,人们有理由寻找更好的定义概率的方式,于是,概率的公理化定义由此应运而生.

二、概率的公理化定义

既然事件 A 的概率应是事件 A 发生的可能性大小的度量,而事件 A 发生的频率 $f_n(A)$(当 n 较大时)又相当真实地反映了事件 A 发生的可能性大小,那么,找出频率 $f_n(A)$所具有的本质特征(或称基本性质)将事件 A 的概率定义成事件 A 所对应的具有这些本质特征的数应是可取的做法,这正如同在动物分类学里将具有某几项特征的动物叫做某科动物一样合情合理——这就是概率的公理化定义的基本思路.

由定义 1.1 可得频率的以下三条基本性质:

1° 频率介于 0 与 1 之间. 即对任意事件 A 有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.

2° 必然事件的频率为 1. 即 $f_n(\Omega)=1$.

3° 有限可加性. 即若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互斥,则有 $f_n(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)=\sum_{i=1}^{m}f_n(A_i)$.

下面仅就性质 3°给出证明,而将 1°,2°留给读者.

证明　因 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互斥,即 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中任意两个事件都不同时发生,所以在 n 次试验中事件 $\bigcup_{i=1}^{m}A_i$ 发生的频数等于诸 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$各自发生的频数 n_{A_i} 之和. 故有　$f_n(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)=\dfrac{n_{A_1}+n_{A_2}+\cdots+n_{A_m}}{n}=\sum_{i=1}^{m}f_n(A_i)$.

依照上述思路,我们给出概率的公理化定义.

---

① 本书正文中引用序号表示的公式时,将序号加括号表示.

1.4 定义 设试验 E 的样本空间为 Ω. 对于 Ω 中每一个事件 A 都赋予一个具有以下三条基本性质的实数 $P(A)$:

1° $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

2° $P(\Omega)=1$;

3° 对于 Ω 中任意一列两两互斥的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i) = \sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),$$

则称实数 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

定义 1.4 中三条性质是作为公理规定概率必须具备的,故定义 1.4 称作概率的公理化定义. 必须说明的是,定义中的 3°称作概率的完全(可列)可加性,它与频率的基本性质 3°(有限可加性)略有不同. 这是为了使定义对无限样本空间中的事件也适用而做的必要更动. 后面我们会看到,由它可以导出概率的有限可加性.

初读定义 1.4 读者可能难以理解如此"赋予"事件 A 的实数 $P(A)$ 为何恰好就是能够反映事件 A 发生可能性大小的数. 相信待学习了第五章的大数定律之后读者的这个疑问会得到解决,因为大数定律告诉我们,这里所定义的 $P(A)$ 恰恰就是频率 $f_n(A)$ 的概率意义下的极限.

下面利用概率的三条基本性质导出概率的其他性质.

4° 不可能事件的概率为 0,即 $P(\varnothing)=0$.

证明 因 $\varnothing=\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$,由基本性质 3°有

$$P(\varnothing) = P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots.$$

再由 1°得 $P(\varnothing)=0$.

5° 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i) = \sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

证明 因 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$,故

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i) = P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots),$$

再由 3°,4°即得.

6° $P(\bar{A})=1-P(A)$.

证明 因 $A\cup\bar{A}=\Omega, A\bar{A}=\varnothing$,故由 2°及 5°有

$$1 = P(\Omega) = P(A\cup\bar{A}) = P(A)+P(\bar{A}),$$

移项即得.

7° 若 $A \subset B$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$且

$$P(A) \leqslant P(B).$$

证明 因 $B=A\cup(B-A)$,A 与$(B-A)$互斥,故由 5°有

$$P(B)=P(A)+P(B-A) \text{ 即 } P(B-A)=P(B)-P(A).$$

再由 1°,$P(B-A)\geqslant 0$,于是 $P(A)\leqslant P(B)$.

8° (加法定理)设 A,B 为两个事件,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

证明 因 $A\cup B=A\cup\bar{A}B$,A 与$\bar{A}B$ 互斥,故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(\bar{A}B),$$

又

$$\bar{A}B=B-AB,\ AB\subset B,$$

故由 7°

$$P(\bar{A}B)=P(B-AB)=P(B)-P(AB),$$

将其代入上一概率等式即得.

利用归纳法可将 8°推广到 n 个事件的情形:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}P(A_iA_j)$$
$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

三、古典概型

下面讨论一类在概率论发展初期讨论得最多的试验——古典概型的概率计算. 它可以使我们获得对概率的极为宝贵的感性认识.

1.5 定义 设试验 E 的样本空间有有限多个样本点:$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,且每个样本点出现的可能性相同. 称此试验为古典概型.

因为样本点是两两互斥的,根据概率的基本性质 2°,3°,在古典概型中,一方面

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}\{\omega_i\})=P(\Omega)=1,$$