线性代数简明教程

（修订版）

陈龙玄　钟立敏　编

中国科学技术大学出版社

线性代数简明教程

（修 订 版）

陈龙玄 钟立敏 编

中国科学技术大学出版社

1997 · 合肥

内 容 简 介

本书内容包括：行列式、线性空间、线性变换、欧氏空间、二次型和若当(Jordan)标准形．其特点是：理论严谨、结构紧凑、叙述简明、通俗易懂、习题编排适当．若当标准形的理论采用了与常见书不同的证法，使之有明显的几何意义，易于为读者接受．本书可作为非数学专业理、工科学生的教材或教学参考书，也可供具有一定数学基础的读者自学．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数简明教程(修订版)/陈龙玄　钟立敏　编

—合肥：中国科学技术大学出版社，1997年10月

ISBN 7-312-000953-0

Ⅰ　线性代数简明教程

Ⅱ　陈龙玄　钟立敏

Ⅲ　①行列式　②矩阵　③线性空间

Ⅳ　O

中国科学技术大学出版社出版发行

(安徽省合肥市金寨路96号，邮编：230026)

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

开本：850×1168/32　印张：8.5　字数：220千

1989年2月第1版　1997年9月修订版　1997年9月第3次印刷

印数：10001—15000

ISBN 7-312-00953-0/O·198　定价：8.50元

前　　言

线性代数的基本课题是研究线性方程组的求解问题，讲述线性变换与二次型的代数与几何理论.线性代数是高等数学的一门基础学科，也是从事其它自然科学和工程技术研究工作不可缺少的工具.

本书是中国科学技术大学非数学专业多年采用的教材，由陈龙玄副教授于 1979 年编写.数学系许多教员在本校物理、化学、生物、计算机科学等系以及少年班讲授过此讲义，并对原稿提出许多具体、宝贵的意见.通过八年的教学实践，由陈龙玄和钟立敏副教授前后对原稿作了四次修改而成此书.此期间，杨照华副教授详细审阅过第二次修改稿.

这本书的最大特点是结构紧凑，条理清晰，叙述简明，文字通俗.本书讲述了线性代数的标准材料，内容充实，理论严谨，并充分考虑到非数学系学生的特点.例如第七章 Jordan 标准型的证明采用了较易为读者接受的方法.又专门写了第四节给出具体方法和示例.对于只应用 Jordan 标准型而不关心其理论证明的读者，可以只看第四节.

本书附有适当的习题，便于自学.在使用本书时，可视需要而灵活取舍章节.例如至少有如下四个方案是可行的：第一、二、三、六章；第一、二、三、四、六章；第一至六章，第一至七章.采用前面两种方案，只需略去部分理论推导和例子，对掌握所需知识是不会产生困难的.

综上所述，我热诚地向广大读者推荐此书，并欢迎读者指教.

冯克勤

1988 年 12 月于合肥

目　　录

第一章　行列式和线性方程组

在这一章中，我们要将中学代数里学过的二、三阶行列式的概念推广到 n 阶，并研究其性质和计算方法，然后利用 n 阶行列式来表示含 n 个方程的 n 元线性方程组的解，最后介绍用消元法求解一般线性方程组的方法.

1.1　n 阶行列式

行列式在数学的其它分支，以及物理、力学中都有重要的应用. 我们知道二阶和三阶行列式的定义如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \equiv a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \equiv a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

从二、三阶行列式的定义可以看出：行列式的值是一些“项”的代数和，例如在三阶行列式中，每项都是三个数的连乘积，而这三个数取自三阶行列式中不同的行和不同的列，每项相应的正负号，则与其下标的排列有关. 为了将行列式概念推广到 n 阶，我们首先要介绍排列的概念.

排　　列

由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $(j_1j_2\cdots j_n)$，称为一个 n 元

排列.

例如，(3 2 1) 是一个 3 元排列，(7 6 3 2 4 5 1) 是一个 7 元排列. n 元排列的总数是

$$n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!.$$

排列 $(12\cdots n)$ 具有自然顺序，称为**自然排列**. 在排列

$$(j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n)$$

中，如果 $j_p > j_q$，就说 (j_p, j_q) 是该排列的一个**逆序**. 排列中逆序的总个数，称为该排列的**逆序数**，记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$. 若逆序数为偶数，则称排列为**偶排列**；若逆序数为奇数，则称排列为**奇排列**.

排列 (3 2 1) 有逆序 (3, 2)，(3, 1)，(2, 1)，所以 $\tau(3\ 2\ 1) = 3$，为奇排列，而排列 (7 6 3 2 4 5 1) 的逆序数 $\tau(7\ 6\ 3\ 2\ 4\ 5\ 1) = 16$，为偶排列.

自然排列的逆序数为零，它是偶排列.

在一个 n 元排列中，互换某两个数码的位置，其余数码不动，称为排列的一次**对换**.

例如，互换 1 与 3，使 $(3\ 2\ 1) \xrightarrow{1\leftrightarrow 3} (1\ 2\ 3)$，奇排列变为偶排列，互换 6 与 1，使 $(7\ 6\ 3\ 2\ 4\ 5\ 1) \xrightarrow{6\leftrightarrow 1} (7\ 1\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6)$，偶排列变为奇排列. 一般地说，对换具有下列性质：

1. 任一排列，经一次对换，必改变其奇偶性.

证 先讨论互换相邻两数码的对换：

$$(\cdots ab\cdots) \to (\cdots ba\cdots).$$

在对换前后，所有"·"位置上的数码与 a, b 间的顺序关系没有改变，而仅有 a 与 b 的顺序改变了，从而使对换后的排列的逆序个数增加或减少了 1，即偶(奇)排列经此对换后必成奇(偶)排列.

由此可知，当排列施行奇(偶)数次相邻的对换后必(不)

改变它的奇偶性.

对于一般的对换,如

$$(\cdots a j_{k+1} j_{k+2} \cdots j_{k+l} b \cdots) \to (\cdots b j_{k+1} j_{k+2} \cdots j_{k+l} a \cdots),$$

可按如下接连施行若干个相邻对换而得到

$$\begin{aligned}
(\cdots a j_{k+1} j_{k+2} \cdots j_{k+l} b \cdots) &\to (\cdots j_{k+1} a j_{k+2} \cdots j_{k+l} b \cdots) \\
&\left.\begin{aligned}&\to (\cdots j_{k+1} j_{k+2} a \cdots j_{k+l} b \cdots) \\ &\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ &\to (\cdots j_{k+1} j_{k+2} \cdots j_{k+l} a b \cdots)\end{aligned}\right\} l\text{ 次} \\
&\to (\cdots j_{k+1} j_{k+2} \cdots j_{k+l} b a \cdots) \qquad 1\text{ 次} \\
&\left.\begin{aligned}&\to (\cdots j_{k+1} j_{k+2} \cdots b j_{k+l} a \cdots) \\ &\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ &\to (\cdots b j_{k+1} j_{k+2} \cdots j_{k+l} a \cdots)\end{aligned}\right\} l\text{ 次}
\end{aligned}$$

这个过程共施行 $2l+1$ 次相邻的对换,对换次数是一个奇数.如上所述,它必定改变排列的奇偶性.

这样我们就证明了任一排列经一次对换后必改变其奇偶性.

2. 任一 n 元排列总可经若干次对换后成为自然排列,且所作对换的次数与这个排列有相同的奇偶性.

证 先用归纳法证性质的前一部分.当 $n=1$ 时,结论显然成立.假设对 $n-1$ 元排列,结论成立.现在证明对 n 元排列结论也成立.

设 n 元排列是 $(j_1j_2\cdots j_n)$.如果 $j_n=n$,那么根据归纳假设,$n-1$ 元排列 $(j_1j_2\cdots j_{n-1})$ 可经若干次对换后变成自然排列 $(1\ 2\ \cdots\ n-1)$,于是经同样的对换后也就将排列 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 变成了自然排列 $(1\ 2\ \cdots\ n)$.如果 $j_n\neq n$,那么对 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 作对换 (j_n, n),它就变成 $(j_1'j_2'\cdots j_{n-1}'n)$,这就归结为上面的情形,因此结论普遍成立.

因为自然排列是偶排列,而且一次对换必改变排列的奇偶性,所以奇(偶)排列 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 需经奇(偶)数次对换才变成自然排列

$(1\ 2\ \cdots\ n)$，同理，自然排列亦需经奇（偶）数次对换才变成奇（偶）排列$(j_1j_2\cdots j_n)$.

n 阶行列式的定义

应用排列的上述性质，现在来具体分析三阶行列式. 三阶行列式是由 3^2 个数所确定的一个数，它的展开式中的项的一般形式可以表示为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，其中 $(j_1j_2j_3)$ 是 1，2，3 的一个排列，共有 6 种，对应于展式中的六项. 当 $(j_1j_2j_3)$ 为偶排列时，相应的项带正号；当 $(j_1j_2j_3)$ 为奇排列时，相应的项带负号. 二阶行列式也具有上述规律，我们由此推广，给出 n 阶行列式的定义.

定义　n 阶行列式 $\Delta_n(a_{ij})$ 是由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，通过下式所确定的一个数

$$\Delta_n(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{1}$$

在行列式中，我们把横排的数组称为**行**，竖排的数组称为**列**，而称 a_{ij} 的第一个足标 i 为**行指标**，第二个足标 j 为**列指标**，a_{ij} 是行列式中位于第 i 行第 j 列的**元素**. (1) 中符号“$\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$”表示对所有 n 元排列求和，因此，n 阶行列式是有 $n!$ 个项的代数和. 和式中每一项是由取自行列式中所有的不同行和不同列的 n 个元素的乘积冠以一定正负号所得：当把这 n 个元素的行指标排成自然排列后，如相应的列指标的排列 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 为偶排列，则冠以正号，反之，则冠

以负号.

例 1 计算

$$\Delta=\begin{vmatrix}0&0&a&0\\b&0&0&0\\0&0&0&c\\0&d&0&0\end{vmatrix}.$$

解 这个行列式中有很多元素是 0,因此展开后非零项就很少了,在一般项

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

中,因第一行仅有 a 不为 0,所以仅当 $j_1=3$ 时能为非零项,同理,仅当 $j_2=1,j_3=4,j_4=2$ 时能为非零项,因而只剩下一项:

$$\Delta=(-1)^{\tau(3142)}abcd=-abcd.$$

例 2 计算上三角形行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&\cdots&a_{2n}\\0&0&a_{33}&\cdots&a_{3n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&0&a_{nn}\end{vmatrix}$$

解 考查行列式的非零项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,因为行列式中第 n 行除 a_{nn} 以外全为 0,故 j_n 只能取 n,再考察第 $n-1$ 行,j_{n-1} 不能再取 n,所以非零项就只能取 $j_{n-1}=n-1$,依次可知 $j_{n-2}=n-2,\cdots,j_1=1$,于是

$$\Delta=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即上三角形行列式的值等于**主对角线**(从左上角到右下角这条对角线)上 n 个元素的连乘积.因此,一个行列式如能化成上三角形,则其值可立即求得.

作为特例,有

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

主对角线以外的元素全为零的行列式称为**对角形行列式**，其值等于主对角线上元素的连乘积.

按定义可以证明下面这个重要的计算公式：

例 3 证明

$$\Delta_n(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & a_{n,r+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,r+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 按定义来证左端展开式等于右端展开式，

$$\Delta_n(a_{ij}) = \sum_{(j_1 \cdots j_r j_{r+1} \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_r j_{r+1} \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{rj_r} a_{r+1,j_{r+1}} \cdots a_{nj_n},$$

因本题左端行列式的右上角元素全为零，即当行指标 $i \leqslant r$，同时列指标 $j > r$ 时，$a_{ij} = 0$，因此在 n 个元素的连乘积中含有这样的 a_{ij} 时，相应的项为零，故

$$\Delta_n(a_{ij}) = \sum_{\substack{(j_1 \cdots j_r j_{r+1} \cdots j_n) \\ 1 \leqslant j_1, \cdots, j_r \leqslant r \\ r+1 \leqslant j_{r+1}, \cdots, j_n \leqslant n}} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_r j_{r+1} \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots$$

$$a_{rj_r} a_{r+1,j_{r+1}} \cdots a_{nj_n}, \tag{2}$$

而当 $1 \leqslant j_1, \cdots, j_r \leqslant r; r+1 \leqslant j_{r+1}, \cdots, j_n \leqslant n$ 时，即 $j_1 < j_{r+1}, \cdots, j_n$; $j_2 < j_{r+1}, \cdots, j_n; \cdots; j_r < j_{r+1}, \cdots, j_n$ 时，逆序数满足下述关系（在

下面各式中将符号$(j_{r+1}\cdots j_n)$理解为由$n-r$个数码$j_{r+1}-r,\cdots,j_n-r$组成的排列)：

$$\tau(j_1\cdots j_rj_{r+1}\cdots j_n)=\tau(j_1\cdots j_r)+\tau(j_{r+1}\cdots j_n).$$

于是

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_rj_{r+1}\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(j_1\cdots j_r)}\cdot(-1)^{\tau(j_{r+1}\cdots j_n)},$$

这样一来，(2)式右端就可拆成两个和式之积. 事实上，若固定前r个因子的列指标，则相应的项之和是：

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_r)}a_{1j_1}\cdots a_{rj_r}\sum_{\substack{(j_{r+1}\cdots j_n)\\ r+1\leqslant j_{r+1},\cdots,j_n\leqslant n}}(-1)^{\tau(j_{r+1}\cdots j_n)}\cdot a_{r+1,j_{r+1}}\cdots a_{nj_n},$$

而$a_{1j_1}\cdots a_{rj_r}$的列的足标又是在$1\leqslant j_1,\cdots,j_r\leqslant r$的限制下可以任意排列的，因此有

$$\begin{aligned}\Delta_n(a_{ij})=&\sum_{\substack{(j_1\cdots j_rj_{r+1}\cdots j_n)\\ 1\leqslant j_1,\cdots,j_r\leqslant r\\ r+1\leqslant j_{r+1},\cdots,j_n\leqslant n}}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_r)}(-1)^{\tau(j_{r+1}\cdots j_n)}\\&\cdot a_{1j_1}\cdots a_{rj_r}\cdot a_{r+1,j_{r+1}}\cdots a_{nj_n}\\=&\sum_{\substack{(j_1\cdots j_r)\\ 1\leqslant j_1,\cdots,j_r\leqslant r}}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_r)}a_{1j_1}\cdots a_{rj_r}\\&\cdot\sum_{\substack{(j_{r+1}\cdots j_n)\\ r+1\leqslant j_{r+1},\cdots,j_n\leqslant n}}(-1)^{\tau(j_{r+1}\cdots j_n)}a_{r+1,j_{r+1}}\cdots a_{nj_n}\\=&\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1r}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ a_{r1}&\cdots&a_{rr}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_{r+1,r+1}&\cdots&a_{r+1,n}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n,r+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

这种形式的行列式，后面将不止一次地遇到，特别当$r=1$时，有

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

由上面的例可见，用定义式(1)直接计算一般行列式的值，常是十分费事的，下面我们将推导行列式的一些性质，通过它们可使得行列式的计算在许多情况下大为化简.

行列式的性质

性质 1 行列式行列互换，其值不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

我们将右端的行列式称为是左端行列式的**转置行列式**. 左端行列式记为 $\Delta(a_{ij})$，其转置行列式记为 $\Delta'(a'_{ij})$，显然 $a'_{ij} = a_{ji}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$. 当然 Δ 也是 Δ' 的转置行列式，也就是说 Δ 与 Δ' 互为转置行列式. 性质 1 可叙述为：行列式经转置其值不变.

证 如果能证明 Δ' 中任一项都是原行列式 Δ 中的某一项，那么由于 $(\Delta')' = \Delta$，因此，Δ 中任一项亦必是 Δ' 中的某一项，于是 Δ' 与 Δ 有完全相同的项，Δ' 与 Δ 相等.

对 Δ' 中的任一项，显然

$$\begin{aligned} & (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a'_{1i_1} a'_{2i_2} \cdots a'_{ni_n} \\ = & (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \\ = & (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}. \end{aligned}$$

因此，只要能证明

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} = (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)},$$

就证明了 Δ' 中任一项，的确是 Δ 中的某一项. 事实上，当把 $a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$ 用对换改写成 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 时，这过程可表示为：

$$\begin{array}{lllll} & a_{i_1 1}\ a_{i_2 2}\ \cdots\ a_{i_n n} & & a_{1j_1}\ a_{2j_2}\ \cdots\ a_{nj_n} \\ \text{行指标} & (i_1\ \ i_2\ \ \cdots\ \ i_n) & \xrightarrow{\text{经}p\text{次对换}} & (1\ \ 2\ \ \cdots\ \ n) \\ \text{列指标} & (1\ \ 2\ \ \cdots\ \ n) & & (j_1\ \ j_2\ \ \cdots\ \ j_n) \end{array}$$

因为当行指标的排列 $(i_1i_2\cdots i_n)$ 经 p 次对换成为自然排列$(12\cdots n)$ 的同时，列指标的排列就从自然排列$(12\cdots n)$ 经 p 次对换成为$(j_1j_2\cdots j_n)$. 由排列的性质 2 可知

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}=(-1)^p;\ (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^p,$$

所以有

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}=(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

于是性质 1 得证.

性质 1 表明，行列式中行与列的地位是对称的，因此凡有关行具有的性质，对列也同样成立，反之亦然. 也可以说行和列有相同的作用. 因此下面讨论行列式的性质时，只对行加以讨论，对列也具有相应的结果，就不再一一赘述了. 由性质 1 可知关于行列式的定义，也可规定为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \equiv \sum_{(i_1i_2\cdots i_n)}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}.$$

将例 2 的上三角形行列式转置，就得到计算下三角形行列式的公式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

利用性质 1，由例 3 可以得到：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,r+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,r+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

特别，当 $r = 1$ 时，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 2 行列式两行互换，其值变号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 按定义并利用排列的性质 1 证之，

$$左边 = \sum_{(j_1 \cdots j_k \cdots j_l \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_k \cdots j_l \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{lj_l} \cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{(j_1\cdots j_k\cdots j_l\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_l\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{lj_l}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$$

$$= -\sum_{(j_1\cdots j_l\cdots j_k\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_l\cdots j_k\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{lj_l}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n} = \text{右边}$$

性质 3 行列式某行的公因子可以提到行列式外边来. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & \cdots & \lambda a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证

$$\text{左边} = \sum_{(j_1\cdots j_k\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots(\lambda a_{kj_k})\cdots a_{nj_n}$$

$$= \lambda \sum_{(j_1\cdots j_k\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n} = \text{右边}$$

性质 4 若行列式中某一行的元素都是两项之和, 则该行列式可拆成两个行列式之和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1}+c_{k1} & b_{k2}+c_{k2} & \cdots & b_{kn}+c_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$